TD1 : correction

1 Définition et interprétation graphique de la dérivée

Exercice 1. Le graphe de la dérivée du graphe (a) est le graphe II.

- En effet, dans (a), on a deux extrema locaux, ce qui se traduit par 2 points où la dérivée s'annule.
- De plus, entre ces 2 points, la fonction est croissante, ce qui correspond bien au fait que dans la fonction du graphe II est positive, et inversement en-dehors de ces 2 points.
- Une dernière analyse de la convexité et concavité nous montre qu'avant 0, le graphe de (a) est convexe et donc le graphe de sa dérivée est croissante ; puis, il est concave après et donc sa dérivée est décroissante.

Le graphe de la dérivée du graphe (b) est le graphe IV.

- En effet, on a ici affaire à 3 segments de droite, donc sur ces segments le graphe de la dérivée doit être constant.
- De plus, il est à noter que sur les 2 points où l'on change de segments de droite, la dérivée n'est pas définie, ce qui correspond bien à ce que l'on observe sur le graphe IV.

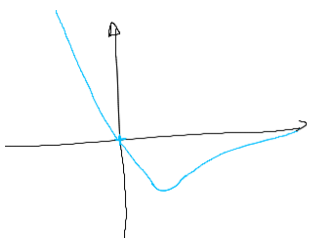
Le graphe de la dérivée du graphe (c) est le graphe I.

Le graphe de la dérivée du graphe (d) est le graphe III.

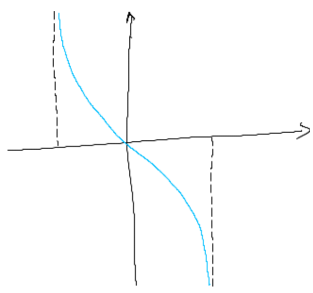
Exercice 2. Ici, il y a 2 graphes qui correspondent, ce sont les graphes (c) et (d).

- En effet, les 3 zéros du graphe de g' se traduisent par 3 extrema locaux (éliminant ainsi (b)) et l'analyse des parties où g' est négative et positive, nous permet d'éliminer (a) et de conserver (c) et (d).
- Ensuite, en regardant (c) et (d), on constate que la fonction f_c représentée par le graphe (c) et de la fonction f_d représentée par le graphe (d) ont la relation suivante $f_c(x) = f_d(x) - 4$ (ils sont égaux à une constante près, ici -4). Or, par les propriétés des dérivées, 2 fonctions égales à une constante près ont la même fonction dérivée.

Exercice 3. Pour les deux graphes ci-dessous, représenter le graphe de leurs dérivées.



(a)



(b)

Exercice 4. La courbe (a) correspond à f, (b) à f' et (c) à f''.

- En effet, on remarque tout d'abord, que proche de 0, (a) est positif, or (b) et (c) sont décroissantes. Donc (a) ne peut être ni la dérivée de (b), ni de (c). Sa seule possibilité est donc d'être f.
- Maintenant, on regarde le maximum local de (a), il se situe au niveau du zéro de (b) et l'étude de la variation de (a) et du signe de (b) est cohérente avec le fait que (b) soit la dérivée de (a), soit f'.

— Finalement, on remarque que (b) a 2 extrema locaux qui correspondent aux zéros de (c) et l'étude de la variation de (b) et du signe de (c) est cohérente avec le fait que (c) soit la dérivée de (b), soit f''.

2 Dérivée de fonctions usuelles et sommes

Exercice 5. 1. $f'(x) = 0$.

2. $f'(t) = 3t^{3-1} - 4 \times 1 = 3t^2 - 4$.
3. $g'(x) = 3 \times \frac{8}{3}x^{\frac{8}{3}-1} - 2 \times (-1.47) \times \times x^{-1.47-1} = 8x^{5/3} + 2.94x^{-2.47}$.
4. $f'(x) = -e^x + 2 \times \frac{1}{x} = -e^x + \frac{2}{x}$.
5. On réécrit $h(x)$ en $h(x) = x^{-1} + 4 \times x^{-1/2}$, puis on dérive en
$$h'(x) = -1 \times x^{-1-1} + 4 \times \frac{-1}{2}x^{-1/2-1} = -x^{-2} - 2x^{-3/2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x\sqrt{x}}.$$
6. On réécrit $g(t)$ en $g(t) = -\ln(t) + 3.14e^t - 2.5 \times t^{-1.4} + \pi$, puis on dérive en
$$g'(t) = -\frac{1}{t} + 3.14e^t - 2.5 \times (-1.4)t^{-1.4-1} = -\frac{1}{t} + 3.14e^t + \frac{3.5}{t^{2.4}}.$$

3 Dérivée de produits et quotients

Exercice 6. 1. En notant $u(x) = 1 + 2x^2$ et $v(x) = x - x^2$, on voit que $f(x) = u(x)v(x)$. Par ailleurs, on sait que la dérivée $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 1 - 2x$. Donc en utilisant la formule de la dérivée, on obtient
$$f'(x) = 4x(x-x^2)+(1+2x^2)(1-2x) = 4x^2-4x^3+1+2x^2-2x-4x^3 = 1-2x+6x^2-8x^3.$$

2. Sinon, on développe, d'abord,
$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 - 2x^4,$$
puis on dérive $f'(x) = 1 - 2x + 6x^2 - 8x^3$.

Exercice 7. 1. On a une forme produit $f(x) = \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{e^x}_{v(x)}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$, donc
$$f'(x) = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{e^x}_{v(x)} + \underbrace{x}_{u(x)} \times \underbrace{e^x}_{v'(x)} = (1 + x)e^x.$$

2. On a une forme produit avec $h(t) = \underbrace{(1 + \ln(t))}_{u(t)}\underbrace{(t^2 + \sqrt{t})}_{v(t)}$ avec
$$u'(t) = 0 + \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \text{ et } v'(t) = 2t + \frac{1}{2}t^{1/2-1} = 2t + \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Ainsi, au final,

$$\begin{aligned}
h'(t) &= \underbrace{1/t}_{u'(t)} \times \underbrace{(t^2+\sqrt{t})}_{v(t)} + \underbrace{(1+\ln t)}_{u(t)} \times \underbrace{\left(2t+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)}_{v'(t)} \\
&= t + \frac{1}{\sqrt{t}} + 2t + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \left(2t+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\ln(t) \\
&= 2t + \frac{3}{2\sqrt{t}} + \left(2t+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\ln(t).
\end{aligned}$$

3. On a une forme quotient $g(x) = \frac{3x+5}{2x+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x+5$ et $v(x) = 2x+1$. Ainsi, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$. Par le formulaire, on en déduit que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\underbrace{3}_{u'(x)} \times \underbrace{(2x+1)}_{v(x)} - \underbrace{(3x+5)}_{u(x)} \times \underbrace{2}_{v'(x)}}{\underbrace{(2x+1)^2}_{v(x)^2}} \\
&= \frac{3(2x+1)-2(3x+5)}{(2x+1)^2} \\
&= \frac{6x+3-6x-10}{(2x+1)^2} = \frac{-7}{(2x+1)^2}
\end{aligned}$$

4. On a une forme quotient $f(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2e^x+4} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = -\ln(x)$ et $v(x) = x^2e^x+4$.
   — Or $u'(x) = -\frac{1}{x}$ (facile) et
   — $v(x) = x^2e^x + 4$ est de la forme somme avec $u_1(x) = x^2e^x$ et $u_2(x) = 4$:
      — $u_2'(x) = 0$ et
      — $u_1(x) = x^2e^x$ est de la forme produit avec $v_1(x) = x^2$ et $v_2(x) = e^x$. On obtient, enfin, nos dernières fonctions usuelles dont les dérivées sont $v_1'(x) = 2x$ et $v_2'(x) = e^x$. Par le formulaire, on en déduit $u_1'(x) = v_1'(x)v_2(x) + v_1(x)v_2'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(2+x)e^x$.
      — Par le formulaire sur la somme, $v'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) = x(2+x)e^x$.
   — Ainsi, par le formulaire sur la dérivée,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{-1/x(x^2e^x+4) - (-\ln(x))x(2+x)e^x}{(x^2e^x+4)^2} \\
&= \frac{-xe^x + 4/x + \ln(x)x(2+x)e^x}{(x^2e^x+4)^2}
\end{aligned}$$

5. On a une forme produit $g(x) = (x^2+1)(x+\ln(x))e^x = u_1(x)u_2(x)$ avec $u_1(x) = x^2+1$ et $u_2(x) = (x+\ln(x))e^x$.
   — $u_1(x)$ est de la forme somme. On obtient $u_1'(x) = 2x$.
   — $u_2(x) = v_1(x)v_2(x)$ est de la forme produit avec $v_1(x) = x + \ln(x)$ et $v_2(x) = e^x$:
      — $v_1(x)$ est de la forme somme, donc $v_1'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

    — D'après le formulaire, $v_2'(x) = e^x$.
- — Finalement,

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2x(x+\ln(x))e^x + (x^2+1)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)e^x + (x+\ln(x))e^x\right) \\ &= 2x(x+\ln(x))e^x + (x^2+1)\left(1+\frac{1}{x}+x+\ln(x)\right)e^x \end{aligned}$$

6. On a une forme quotient $h(t) = \frac{\ln(t)(t^{1.2}+1)}{t^3+t\sqrt{t}+e^2} = \frac{u(t)}{v(t)}$ avec $u(t) = \ln(t)(t^{1.2}+1)$ et $v(t) = t^3 + t\sqrt{t} + e^2$.
   - — $u(t) = \ln(t)(t^{1.2}+1)$ est de la forme produit. On obtient $u'(t) = \frac{1}{t}(t^{1.2}+1) + 1.2\ln(t)t^{0.2}$.
   - — $v(t) = t^3 + t\sqrt{t} + e^2$ est de la forme somme (et $t\sqrt{t}$ est de la forme produit). On obtient $v'(t) = 3t^2 + \sqrt{t} + \frac{t}{2\sqrt{t}} = 3t^2 + \frac{3}{2}\sqrt{t}$.
   - — Par le formulaire, on a $h'(t) = \frac{u'(t)v(t)-u(t)v'(t)}{v(t)^2}$.