L3 2024-2025 : Topologie et analyse fonctionnelle

David Harari

Table des matières

Préliminaires

Dans les deux premières années d'université on étudie deux notions importantes : la *continuité* d'une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (et plus généralement de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$) et la *limite* d'une suite de nombres (réels ou complexes). Ces notions sont basées sur une version mathématique précise de celle de "points voisins" ou de proximité entre deux points d'un même ensemble. Le but de la topologie est de donner un cadre général qui unifie tous ces concepts. On s'intéressera dans ce cours principalement à la notion d'*espace métrique*, dans lequel la notion de *distance* a un sens et généralise celle de distance de deux points dans un espace euclidien. Les *espaces vectoriels normés* en seront des cas particuliers, dans lesquels la distance a des propriétés suplémentaires compatibles avec la structure d'espace vectoriel ; ils interviennent souvent en analyse comme espaces de fonctions (d'où le nom d'analyse fonctionnelle). A contrario, il sera parfois nécessaire de considérer des espaces un peu plus généraux que les espaces métriques, les *espaces topologiques*, pour lesquels les notions de continuité et de voisinage seront encore définies mais pourront se comporter de maniée moins intuitive que dans les exemples classiques de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$.

On supposera connues les propriétés suivantes de $\mathbf{R}$:

— Toute partie non vide majorée A de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit élément parmi l'ensemble

$$M_A := \{x \in \mathbf{R}, \forall y \in A, x \geq y\}$$

de ses majorants. De même, toute partie non vide minorée de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure. Ces propriétés résultent [1] de la construction de

1. Pour être précis, l'une des constructions classiques, via les coupures de Dedekind, donne ces propriétés. Une autre possibilité est de construire $\mathbf{R}$ à partir des suites de Cauchy

R à partir de **Q**, et peuvent être considérées comme des axiomes des nombres réels.

— Tout intervalle $]a, b[$ de **R** avec $a < b$ contient un rationnel.

— De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente (cf. aussi les sections 1.3. et 6.) Ce dernier théorème (Bolzano-Weierstrass) peut se déduire de l'axiome de la borne supérieure en démontrant d'abord qu'une intersection $I = \bigcap_{n\in\mathbf{N}}[a_n, b_n]$ d'une suite de fermés emboîtés (i.e. $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$), avec $(b_n - a_n)$ tendant vers zéro, vérifie que I est un singleton, limite des suites adjacentes (a_n) et (b_n).

On rappelle également que si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles, on pose pour toute partie G de F :

$$f^{-1}(G) = \{x \in E, f(x) \in G\}.$$

On a alors, pour toute famille $(G_i)_{i\in I}$ de parties de G :

$$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} G_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(G_i);\ f^{-1}(\bigcup_{i\in I} G_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(G_i).$$

On a aussi, pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de parties de F :

$$f(\bigcup_{i\in I} F_i) = \bigcup_{i\in I} f(F_i).$$

Attention, on n'a en général qu'une inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ si A, B sont deux parties de E (prendre par exemple $A = \mathbf{R}_+$, $B = \mathbf{R}_-$, $E = F = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$). De même, si G est une partie de F, on a bien $f^{-1}(F - G) = f^{-1}(F) - f^{-1}(G)$, mais seulement $f(E - A) \supset f(E) - f(A)$ si A est une partie de E (prendre l'exemple précédent).

1. Espaces métriques

1.1. Définition, premiers exemples

Définition 1.1 Une *distance* sur un ensemble X est une application $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ vérifiant :

i) On a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (séparation).

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$ (symétrie).

de nombres rationnels, ce qui donne plus immédiatement que **R** est un espace métrique complet, voir le paragraphe 1.3.

iii) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ pour tous $x,y,z \in X$ (inégalité triangulaire).

Un *espace métrique* est un couple (X,d), où X est un ensemble et d une distance sur X.

Exemple 1.2 1. L'ensemble $\mathbf{R}$ est muni d'une distance (dite usuelle) via $d(x,y) := |x-y|$, où $|.|$ est la valeur absolue.

2. L'ensemble $\mathbf{C}$ est muni d'une distance (également dite usuelle) via $d(x,y) := |x-y|$, où $|.|$ est le module.

3. Plus généralement, si E est un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ (ex. $\mathbf{R}^n$ avec le produit scalaire canonique $\langle (x_i),(y_i) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$), on définit une distance sur E par

$$d(x,y) = \sqrt{\langle (x-y),(x-y) \rangle}.$$

C'est un cas particulier d'*espace vectoriel normé*, que nous définirons un peu plus loin et etudierons plus en détails dans un chapitre ultérieur.

4. La *distance discrète* sur un ensemble X est définie par $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$.

5. Si (E,d) est un espace métrique, alors pour toute partie A de E la restriction de d à A fait de A un espace métrique, appelé sous-espace de E pour la distance induite. Cela permet de considérer toute partie de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$ comme un espace métrique pour la distance induite par la distance usuelle.

Définition 1.3 Soit E un espace vectoriel sur un corps K, qui peut être le corps des réels ou celui des complexes. [2] Une *norme* sur E est une application $N : E \to \mathbf{R}_+$ vérifiant :

i) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

ii) Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in K$, on a

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$$

iii) Pour tous $x,y \in E$, on a

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Un couple (E,N) comme ci-dessus est appelé un *espace vectoriel normé* (e.v.n. en abrégé). On notera alors souvent $|| \; ||$ la norme sur E.

On vérifie immédiatement :

2. Il est possible de définir cette notion sur des corps plus généraux, dits *valués*, mais nous n'en parlerons pas dans ce cours.

Proposition 1.4 *Soit E un espace vectoriel normé. Alors l'application d définie par $d(x, y) = ||x - y||$ est une distance sur E.*

Ainsi, un espace vectoriel normé peut être vu comme un cas particulier d'espace métrique.

Exemple 1.5 Sur $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}^n$), on peut définir les trois normes suivantes :

a) $||x||_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ("norme sup").

b) $||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ("norme de la ville").

c) $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ (norme euclidienne ou hermitienne).

On démontrera plus tard (théorème 6.22) que toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont *équivalentes*, c'est-à-dire que si N_1 et N_2 sont deux normes, il existe des constantes positives C et D telles que

$$N_1(x) \leq CN_2(x); \; N_2(x) \leq DN_1(x)$$

pour tout x de $\mathbf{R}^n$. On peut le vérifier facilement pour les trois normes ci-dessus.

1.2. Ouverts et fermés d'un espace métrique

Définition 1.6 Soit (E, d) un espace métrique. Soient $a \in E$ et $r > 0$. On appelle *boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r* le sous-ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E, d(x, a) < r\},$$

resp.

$$B_f(a, r) = \{x \in E, d(x, a) \leq r\}.$$

Par exemple, les boules ouvertes (resp. fermées) de $\mathbf{R}^2$ pour la distance euclidienne sont les disques ouverts (resp. fermés) au sens usuel. Pour la norme sup, les boules sont des carrés.

Définition 1.7 Une partie A d'un espace métrique E est dite *ouverte* si pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Une partie de E est dite *fermée* si son complémentaire $E - A$ est ouvert.

Exemple 1.8 "Ouvert" n'est pas le contraire de "fermé". Par exemple :

a) E est toujours une partie ouverte et fermée de E. Si on munit $\mathbf{Z}$ de la distance induite par celle de $\mathbf{R}$, toute partie est ouverte (et donc aussi fermée) puisque si $x \in \mathbf{Z}$, la boule $B(x, 1/2)$ se réduit à x.

b) La partie $[0,1[$ de $\mathbf{R}$ n'est ni ouverte ni fermée. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Les intervalles $[a,b]$, ou encore $[a,+\infty[$ sont fermés (mais pas ouverts) dans $\mathbf{R}$. Les intervalles $]a,b[$ ou $]a,+\infty[$ sont ouverts mais pas fermés dans $\mathbf{R}$.

c) Bien noter qu'"ouvert" et "fermé" sont des notions relatives. Si A est une partie d'un espace métrique E, A est toujours une partie ouverte de A (muni de la distance induite par celle de E), mais pas forcément de E. On précisera donc toujours par rapport à quel espace on fait référence quand on dit qu'une partie est ouverte ou fermée. De même, la notion de boule ouverte ou fermée fait référence à l'espace dans laquelle elle est définie ($B(0,1/2)$ est réduit à $\{0\}$ si on regarde cette boule dans $\mathbf{Z}$, mais c'est un ensemble infini si on la regarde dans $\mathbf{R}$).

Proposition 1.9 *Soit E un espace métrique.*

a) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille (pas forcément finie) d'ouverts de E, alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de E.

b) Si U et V sont deux ouverts de E, $U \cap V$ est un ouvert de E. De même pour l'intersection d'une famille finie d'ouverts.

c) Une boule ouverte de E est un ouvert de E.

d) Les ouverts de E sont les réunions de boules ouvertes.

Démonstration : a) Soit $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Alors il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Comme U_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_i$. A fortiori, $B(x,r) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Ainsi $\bigcup_{i\in I} U_i$ est ouvert.

b) Soit $x \in U \cap V$. Comme U et V sont ouverts, il existe des réels $r, r' > 0$ tels que $B(x,r) \subset U$ et $B(x,r') \subset V$. Posons $s = \min(r,r')$, alors $s > 0$ et $B(x,s) \subset (U \cap V)$. Ainsi, $U \cap V$ est ouvert. On généralise cela immédiatement par récurrence à un nombre fini d'ouverts.

c) Soit $B(a,r)$ une boule ouverte avec $r > 0$. Soit $x \in B(a,r)$. Posons $r' = d(a,r) - d(a,x)$, on a $r' > 0$. Soit alors $y \in B(x,r')$. Alors

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r' + d(a,r) - r' = d(a,r).$$

On a donc $B(x,r') \subset B(a,r)$, ce qui prouve que $B(a,r)$ est ouvert.

d) Soit U un ouvert de E. Pour tout x de U, il existe une boule ouverte $B_x = B(x,r_x)$ incluse dans U. On a alors $U = \bigcup_{x\in U} B_x$. Réciproquement, une réunion de boules ouvertes est un ouvert d'après a) et c).

□

La même méthode que c) donne qu'une boule fermée est un fermé de E. Attention, l'intersection d'un nombre infini d'ouverts peut ne pas être un ouvert, comme le montre l'exemple de la famille des $]-1/n, 1/n[$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ dans $\mathbf{R}$, dont l'intersection est réduite à $\{0\}$.

Définition 1.10 Soit A une partie non vide d'un espace métrique. Le *diamètre* de A est l'élément de $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

On dit que A est *bornée* si $\delta(A) < +\infty$. Il revient au même de dire qu'il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $d(x, y) \leq M$ pour tous x, y de A, ou encore (via l'inégalité triangulaire) que A est inclus dans une boule.

Définition 1.11 Soit (u_n) une suite à valeurs dans un espace métrique E. Soit $l \in E$. On dit que la suite (u_n) *converge vers* l si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n, l) \leq \varepsilon$. On dit alors que l est la *limite* de la suite (u_n).

Bien entendu, cette notion coïncide avec la notion usuelle quand il s'agit de suites réelles ou complexes. Noter aussi que si $C > 0$ est une constante, la conclusion que (u_n) converge vers l demeure si on remplace la condition $d(x_n, l) \leq \varepsilon$ par $d(x_n, l) \leq C\varepsilon$ (par exemple avec $C = 2, 3, ...$), puisqu'on peut toujours appliquer cela à ε/C au lieu de ε. Du coup, on peut aussi remplacer $d(x_n, l) \leq \varepsilon$ par $d(x_n, l) < \varepsilon$ dans la définition.

Remarque 1.12 Dire que (u_n) converge vers l est équivalent à dire que pour tout ouvert U contenant l, il existe un entier N tel qu'on ait $u_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Si elle existe, la limite l de la suite est unique car si l et l' étaient deux limites différentes, on pourrait choisir $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \frac{1}{2}d(l, l')$. Pour n assez grand, on a alors $d(u_n, l) \leq \varepsilon$ et $d(u_n, l') \leq \varepsilon$ d'où par inégalité triangulaire : $d(l, l') \leq 2\varepsilon < d(l, l')$, contradiction.

Exemple 1.13 a) La suite réelle $u_n = 1/(n + 1)$ converge vers 0.

b) Toute suite convergente (u_n) est bornée. La réciproque est fausse, par exemple la suite réelle $(-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

c) Soit $x_n = (x_{1,n}, ..., x_{p,n})$ une suite à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ (muni de la distance associée à la norme sup). On voit immédiatement que (x_n) converge dans $\mathbf{R}^p$ si et seulement si chacune des suites réelles $(x_{1,n}, ..., x_{p,n})$ converge. Le résultat tient encore avec une autre norme, via le fait (que l'on démontrera plus tard) que toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes.

1.3. Espace métrique complet (I)

Dans ce paragraphe, nous donnons les premières définitions et propriétés liées à la notion d'espace métrique complet. Cette étude sera poursuivie dans la section 5.

Définition 1.14 On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans un espace métrique E est *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geq 0$ tels que pour tous entiers $m, n \geq N$, on ait $d(u_n, u_m) \leq \varepsilon$.

Proposition 1.15 *a) Toute suite convergente est de Cauchy.*

b) Toute suite de Cauchy est bornée.

c) Soit (u_n) une suite de Cauchy. Si (u_n) admet une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergente, alors (u_n) est-elle même convergente.

Rappelons qu'une *suite extraite* (ou sous-suite) d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.

Démonstration : a) Soit (x_n) une suite convergeant vers un élément $l \in E$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tels que pour $n \geq N$, on ait $d(x_n, l) \leq \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, on a alors $d(x_n, x_m) \leq 2\varepsilon$ pour tous $m, n \geq N$, ce qui montre que (x_n) est de Cauchy.

b) Soit (x_n) une suite de Cauchy. Prenons $\varepsilon = 1$, il existe alors un entier N tel que pour $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) \leq 1$, en particulier $d(x_n, x_N) \leq 1$. Soit alors $M = \max_{0 \leq i \leq N}(d(x_i, x_N))$, on a alors

$$d(x_n, x_N) \leq M + 1$$

pour tout entier naturel n. Par inégalité triangulaire, on a donc maintenant $d(x_n, x_k) \leq 2M + 2$ pour tous entiers naturels n, k, ce qui montre que la suite (x_n) est bornée.

c) Soit l la limite de la suite $u_{\varphi(n)}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, il existe un entier N tels que pour tous $m, n \geq N$, on on ait $d(u_n, u_m) \leq \varepsilon$. Comme $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l, on peut trouver un N_1 (de la forme $\varphi(k)$ pour k entier), qu'on peut supposer au moins égal à N, tel que $d(u_{N_1}, l) \leq \varepsilon$. Alors, pour $n \geq N_1$, on a $d(u_n, u_{N_1}) \leq \varepsilon$ d'où $d(u_n, l) \leq 2\varepsilon$, ce qui montre que (u_n) converge vers l.

$\square$

Définition 1.16 Un espace métrique X est *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente.

Exemple 1.17 a) L'espace métrique $\mathbf{R}$, muni de sa topologie usuelle, est complet. En effet, toute suite de Cauchy de réels est bornée, donc admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, donc converge d'après la proposition 1.15.

b) $\mathbf{R}^p$, muni de sa structure d'espace métrique induite par la norme sup, est complet. En effet, on voit immédiatement qu'une suite $x_n = (x_{1,n}, ..., x_{p,n})$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ est de Cauchy si et seulement si chacune des suites réelles $(x_{1,n}), ..., (x_{p,n})$ est de Cauchy. Dans ce cas, chacune de ces suites converge vu que $\mathbf{R}$ est complet, donc la suite (x_n) converge dans $\mathbf{R}^p$. Cela vaut aussi pour une autre norme (via le fait qu'elles sont toutes équivalentes, cf. théorème 6.22).

c) L'espace métrique $E =]0, 1]$ (muni de la distance induite par celle de $\mathbf{R}$) n'est pas complet. En effet, la suite $(1/n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est de Cauchy dans E (vu qu'elle converge dans $\mathbf{R}$), mais ne converge pas dans E (sa limite dans $\mathbf{R}$ est 0, qui n'est pas dans E). En quelque sorte, la limite "sort" de l'espace E, ce qui vient du fait que E n'est pas fermé dans $\mathbf{R}$.

d) L'espace métrique $\mathbf{Q}$ n'est pas complet. En effet, il existe des suites de nombres rationnels (x_n) qui convergent dans $\mathbf{R}$ (ce qui implique immédiatement que (x_n) est de Cauchy), mais dont la limite n'est pas un nombre rationnel[3], donc (x_n) ne converge pas dans $\mathbf{Q}$. Un exemple est la suite

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

qui converge vers e (dont c'est un exercice classique de montrer qu'il n'est pas rationnel). On verra d'ailleurs bientôt que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

2. Espaces topologiques

La possibilité de traduire la convergence des suites dans un espace métrique aussi bien en terme de distance que d'ouverts amène à généraliser cela à un cadre où on dispose de la notion d'ouvert, mais pas forcément de distance. C'est ce qui motive l'introduction des espaces topologiques.

3. C'est pour pallier cette difficulté que les réels ont été inventés. Une construction possible de $\mathbf{R}$ est de le définir comme anneau quotient de l'anneau des suites de Cauchy de rationnels par les suites convergeant vers zéro, l'idée étant en quelque sorte de forcer les suites de Cauchy à converger vers quelque chose.

2.1. Définition, premières propriétés

Si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties.

Définition 2.1 Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}(X)$ (dont les éléments sont appelés les *ouverts* de X pour cette topologie) vérifiant :

i) Les parties X et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{O}$.

ii) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i$ est dans $\mathcal{O}$ ("une réunion quelconque d'ouverts est ouverte").

iii) Si U et V sont dans $\mathcal{O}$, alors $U \cap V$ est dans $\mathcal{O}$ ("l'intersection de deux ouverts est un ouvert").

Un *espace topologique* est un ensemble muni d'une topologie. Une partie d'un espace topologique est dite *fermée* si son complémentaire est ouvert.

Noter que par récurrence, l'intersection d'une famille finie d'ouverts est encore un ouvert via iii). En passant au complémentaire, on voit qu'une intersection quelconque de fermés est fermée, ainsi que la réunion d'un nombre fini de fermés.

Exemple 2.2 a) Un espace métrique est muni de la topologie où les ouverts sont ceux de la définition 1.7, via la proposition 1.9.

b) La *topologie discrète* sur un ensemble X est celle pour laquelle toutes les parties de X sont ouvertes. Elle est induite par la distance discrète (définie dans l'exemple 1.2, 4.). Par exemple la distance usuelle de $\mathbf{R}$ induit la topologie discrète sur $\mathbf{Z}$.

c) La *topologie grossière* (ou chaotique) sur un ensemble X est celle pour laquelle les seuls ouverts sont X et $\emptyset$.

d) Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. On définit une topologie sur E, dite *topologie de l'ordre* en prenant pour ouverts les réunions de parties de la forme suivante : E, les intervalles ouverts $]a, b[$ avec $a, b \in E$, et les demi-droites ouvertes $E_{>a} := \{x \in E, x > a\}$ et $E_{<a} := \{x \in E, x < a\}$ pour $a \in E$. On vérifie que cette topologie est la topologie usuelle de $\mathbf{R}$. La topologie de l'ordre sur $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ induit aussi sur $\mathbf{R}$ la topologie usuelle.

e) Soit X un espace topologique. Soit A une partie de X. On définit une topologie sur A en définissant les ouverts de A comme les ensembles de la forme $U \cap A$, où U est un ouvert de X (de même, les fermés de A sont les $F \cap A$, où F est un fermé de X). Cette topologie sur A est dite *induite* par celle de X. On vérifie que si A est lui-même un ouvert de X, alors, les ouverts de A pour la topologie induite sont les ouverts de X inclus dans A (si A n'est pas un ouvert de X, il y en a plus, par exemple A lui-même). On voit au passage qu'ouvert et fermé sont des notions relatives. Noter aussi que si X est muni de la topologie associée à une distance, alors la topologie induite sur A est celle associée à la distance induite sur A.

f) Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément ouverte, par exemple l'intersection des $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ pour $\varepsilon > 0$ est réduite à $\{1\}$, qui n'est pas un ouvert de $\mathbf{R}$. En passant au complémentaire, on obtient une réunion quelconque de fermés qui n'est pas fermée.

2.2. Intérieur, adhérence, voisinage

Définition 2.3 Soient X un espace topologique et $x \in X$. Un *voisinage de* x (sous-entendu dans X) est une partie de X contenant un ouvert contenant x.

Par exemple, dans tout espace métrique, $B_f(x, r)$ est un voisinage de x si $r > 0$, car il contient l'ouvert $B(x, r)$ qui contient x.

Proposition 2.4 *Une partie A d'un espace topologique X est ouverte si et seulement si A est un voisinage de tous ses points.*

Démonstration : Si A est ouvert, alors par définition c'est un voisinage de tout $x \in A$. Réciproquement, si A est voisinage de tous ses points, alors pour tout x de A, il existe un ouvert V_x de X contenant x et inclus dans A. Comme A est alors la réunion de tous les V_x, c'est un ouvert de X.

□

Définition 2.5 Soit A une partie d'un espace topologique X. L'*adhérence* (ou fermeture) de A dans X, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points x de X tels que tout voisinage V de x dans X vérifie : $V \cap A \neq \emptyset$.

On a clairement $A \subset \overline{A}$. Noter aussi qu'on peut remplacer dans la définition "voisinage" par "voisinage ouvert", i.e. ouvert de X contenant x.

Exemple 2.6 a) L'adhérence de $]0, 1[$ dans $\mathbf{R}$ est $[0, 1]$.

b) L'adhérence de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ est $\mathbf{R}$. On dit que $\mathbf{Q}$ est *dense dans* $\mathbf{R}$.

c) Si A est une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$, sa borne supérieure $\sup A$ (et de même sa borne inférieure $\inf A$ si A est minorée) sont dans $\overline{A}$. En effet, si M est la borne supérieure de A, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élement x de A avec $M - \varepsilon < x \leq M$ (puisque $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A), donc la boule ouverte $B(M, \varepsilon) =]M - \varepsilon, M + \varepsilon[$ contient un élément de A.

d) L'adhérence de $B(x,r)$ dans un espace métrique n'est pas toujours $B_f(x,r)$. Par exemple, dans $\mathbf{Z}$, l'adhérence de $B(0,1)$ est $\{0\}$, alors que $B_f(0,1) = \{-1,0,1\}$.

Proposition 2.7 *Si A est une partie d'un espace topologique X, alors $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de X qui contiennent A, c'est donc le plus petit fermé de X qui contient A. En particulier une partie A de X est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Démonstration : Soit $x \in \overline{A}$ et soit F un fermé de X contenant A. Alors $X - F$ est un ouvert de X qui ne rencontre pas A, donc il ne peut contenir x (qui est adhérent à A), ce qui signifie que $x \in F$. Ainsi $\overline{A} \subset F$. Réciproquement, si x est un point de X qui est dans tous les fermés contenant A, soit U un ouvert de X contenant x. Alors $X - U$ est un fermé de X qui ne contient pas x, donc $X - U$ ne peut contenir A, ce qui montre que U rencontre A. Finalement on a bien $x \in \overline{A}$.

$\square$

Définition 2.8 Soit A une partie d'un espace topologique X. L'*intérieur* de A est l'ensemble des $x \in A$ tel que A soit un voisinage de x. On le note A°.

On vérifie facilement que $X - A^\circ = \overline{(X - A)}$, en particulier A° est un ouvert de X et c'est le plus grand ouvert (ou la réunion des ouverts) de X inclus dans A.

Exemple 2.9 a) L'intérieur de $\mathbf{Q}$ est $\emptyset$.

b) L'intérieur de $[0,1]$ est $]0,1[$.

c) L'intérieur de $B_f(0,1)$ dans $\mathbf{Z}$ est elle-même et non pas $B(0,1)$ (puisque toute partie de $\mathbf{Z}$ est ouverte).

2.3. Suites dans un espace topologique ou métrique

On généralise aisément la notion de suite convergente (vue pour un espace métrique) à un espace topologique :

Définition 2.10 Soit X un espace topologique. Soit (x_n) une suite d'éléments de X. Soit $l \in X$. On dit que (x_n) *converge vers* l si pour tout voisinage V de l (qu'on peut supposer ouvert), il existe un entier N tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$.

On voit immédiatement que dans le cas d'un espace métrique, on retrouve la notion définie précédemment, en considérant les voisinages de x de la forme $B(x, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$, vu que tout voisinage de x contient une telle boule ouverte (on dit que ces boules forment une *base de voisinages* de x). Par contre, si on veut garder l'unicité de la limite, il est nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire sur l'espace X :

Définition 2.11 Un espace topologique X est dit *séparé* (ou de Hausdorff) si pour tous $x, y \in X$, il existe des ouverts U et V de X avec $x \in U$, $y \in V$, et $U \cap V = \emptyset$.

Exemple 2.12 a) Tout espace métrique est séparé : en effet, si x et y sont deux points distincts de X, on pose $\varepsilon = d(x, y)/2$, et il suffit alors (grâce à l'inégalité triangulaire) de prendre $U = B(x, \varepsilon)$ et $V = B(y, \varepsilon)$.

b) Un ensemble X muni de la topologie grossière n'est pas séparé dès qu'il a au moins deux éléments. En particulier, la topologie grossière ne provient pas d'une distance (on dit que cet espace topologique n'est pas *métrisable*). Il est plus difficile de donner un exemple d'espace topologique séparé mais non métrisable.

c) Tout sous-espace (muni de la topologie induite) d'un espace séparé est séparé.

d) Dans un espace topologique séparé X, les singletons sont fermés (et donc toute partie finie est fermée comme union finie de singletons). En effet, si $x \in X$, alors si y est dans $X - \{x\}$, cela signifie que $y \neq x$, et il existe donc des ouverts U et V de X avec $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, et $y \in V$. Par conséquent, l'ouvert V contient y et est inclus dans $X - \{x\}$, on a donc bien montré que $X - \{x\}$ est ouvert. Attention, la réciproque est fausse : si on munit $\mathbf{C}$ de la topologie (dite *de Zariski*) pour laquelle les fermés sont $\mathbf{C}$ et les ensembles finis, on vérifie immédiatement que deux ouverts non vides quelconques ont une intersection non vide, donc cet espace n'est pas séparé (alors que les singletons sont fermés par définition).

Proposition 2.13 (Unicité de la limite) *Si une suite (u_n) converge vers l et l' dans un espace topologique séparé, alors $l = l'$.*

La preuve est similaire à celle que l'on a faite dans un espace métrique.

Définition 2.14 Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace topologique X. On dit que $x \in X$ est une *valeur d'adhérence* de (u_n) si pour tout voisinage V de x, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbf{N}$ tels que $u_n \in V$.

Proposition 2.15 *Posons $X_k := \{u_n, n \geq k\}$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} \overline{X_k}$.*

Démonstration : Dire que x est une valeur d'adhérence de (u_n) signifie que pour tout voisinage V de x et tout entier k, il existe $n \geq k$ tel que $u_n \in V$, autrement dit : pour tout entier k, on a $(X_k \cap V) \neq \emptyset$ pour tout voisinage V de x. Par définition de l'adhérence, c'est équivalent à $x \in \overline{X_k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

$\square$

Remarque 2.16 Si (u_n) converge vers l, alors l est une valeur d'adhérence de (u_n) (et c'est la seule si X est séparé). La proposition précédente montre que toute valeur d'adhérence d'une suite est dans l'adhérence de l'ensemble des valeurs prises par la suite, mais attention, la réciproque est fausse : par exemple la seule valeur d'adhérence de la suite $u_n = 1/(n+1)$ dans $\mathbf{R}$ est sa limite 0.

Dans les espaces métriques, la notion de valeur d'adhérence est étroitement liée à celle de suite extraite :

Theorème 2.17 *Soit X un espace métrique. Soit (u_n) une suite d'éléments de X. Soit $x \in X$. Alors x est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement s'il existe une suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui converge vers x.*

Démonstration : Supposons qu'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers x. Soit V un voisinage de x. Alors il existe $N > 0$ tel que les $(u_{\varphi(n)})$ pour $n > N$ soient dans V. Comme φ est une application injective, cela fait une infinité de termes de la suite (u_n) qui sont dans V, et x est bien une valeur d'adhérence de (u_n) (ce sens est valable dans un espace topologique quelconque).

Supposons réciproquement que x soit une valeur d'adhérence de (u_n). On va construire par récurrence une suite extraite qui converge vers x. Considérons la boule $B(x, 1)$, il existe un terme de la suite dans cette boule, qu'on note $u_{\varphi(0)}$. Supposons $\varphi(0), ..., \varphi(n)$ construits. Dans la boule $B(x, 1/(n+1))$, il y a une infinité de termes de la suite (u_n), et on peut donc choisir un $\varphi(n + 1) > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n+1)} \in B(x, 1/(n + 1))$. Par construction, φ est alors strictement croissante. De plus l'inégalité $d(x, u_{\varphi(n)}) < 1/n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ montre que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers x.

$\square$

Proposition 2.18 *Soit X un espace métrique. Soit A une partie de X. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de X qui sont limite d'une suite d'élements de A. En particulier, A est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans X a sa limite dans A.*

Démonstration : Si $x \in X$ est limite d'une suite (u_n) d'éléments de A, alors tout voisinage de x contient les u_n pour n assez grand, donc a fortiori rencontre A ; ainsi $x \in \overline{A}$.

Si réciproquement $x \in \overline{A}$, alors pour tout $n > 0$, la boule $B(x, 1/n)$ contient un élément de A, notons le x_n. Comme $d(x, x_n) < 1/n$, la suite (x_n) converge alors vers x, et elle est à valeurs dans A.

□

Par exemple, une suite réelle (u_n) qui converge vers l et vérifie $u_n \leq A$ (où A est une constante) à partir d'un certain rang vérifie $l \geq A$, mais l'hypothèse $u_n < A$ ne permet pas de conclure que $l < A$ (la suite $(1/n)$ est à termes > 0 et converge vers 0).

Remarque 2.19 Soient X un espace topologique et $x \in X$. Une *base de voisinages* de x est une famille $(V_i)_{i \in I}$ de voisinages de x vérifiant : pour tout voisinage W de x, il existe $i \in I$ tel que $V_i \subset W$. La propriété importante des espaces métriques qu'on a utilisée dans le théorème 2.17 et la proposition 2.18 est que tout point x d'un espace métrique admet une base dénombrable de voisinages, à savoir les $B(x, 1/n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

3. Applications continues ; produits d'espaces topologiques

3.1. Généralités

La définition habituelle d'une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ s'étend à une application entre espaces topologiques. En gros, l'idée est que f est continue en x si pour x' proche de x, on peut rendre $f(x')$ aussi proche qu'on veut de $f(x)$.

Définition 3.1 Soit f une application d'un espace topologique X vers un espace topologique Y. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. On dit que f *est continue en* x si pour tout voisinage V de y, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$. L'application f est dite *continue* (sur X) si elle continue en tout point de X.

Dans un espace métrique, un voisinage de x n'est pas autre chose qu'une partie qui contient une boule ouverte $B(x, r)$ avec $r > 0$ (ou une boule fermée $B_f(x, r)$). D'où la traduction suivante :

Proposition 3.2 *Soit f une application d'un espace métrique X dans un espace métrique Y. Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors, f est continue en x si* *et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x' \in X$, la condition $d(x', x) \leq \eta$ implique $d(f(x'), y) \leq \varepsilon$ (on peut aussi remplacer les deux dernières inégalités larges par des inégalités strictes).*

Exemple 3.3 a) L'application identique de X dans X est continue.

b) Toute application constante est continue.

c) Si X est muni de la topologie discrète, toute application de X dans Y est continue (puisque si $x \in X$, $\{x\}$ est alors un voisinage de X).

d) Si Y est muni de la topologie discrète, les applications continues f de X dans Y sont les applications *localement constantes*, i.e. telles que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage de x sur laquelle f est constante.

e) Soit $f : X \to Y$ une application continue. Alors, si A est une partie de X, la restriction $f : A \to Y$ (où A est munie de la topologie induite par celle de X) est continue. Plus généralement, si f est continue en un point $a \in A$, la restriction de f à A est continue en a. Attention, la réciproque est fausse, par exemple la fonction caractéristique de $[0, 1]$ (de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$) n'est pas continue en 0 ni en 1, alors que sa restriction à $[0, 1]$ est une fonction constante, donc continue. Cette difficulté disparaît si on suppose que A est un ouvert de X.

Theorème 3.4 *Soit f une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

i) f est continue.

ii) Pour tout ouvert V de Y, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X.

iii) Pour tout fermé F de Y, l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

Démonstration : L'équivalence de ii) et iii) est immédiate par passage au complémentaire (rappelons que si A est une partie de Y, alors $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$).

Supposons i). Soit V un ouvert de Y et soit $x \in f^{-1}(V)$. Posons $y = f(x)$, alors $y \in V$. Comme V est ouvert, c'est un voisinage de y et comme f est continue, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f(U) \subset V$. Alors $x \in U \subset f^{-1}(V)$, et on a donc montré que $f^{-1}(V)$ est voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert de X.

Supposons ii). Soient $x \in X$ et $y = f(x)$, montrons que f est continue en x. Soit V un voisinage ouvert de y dans Y. Comme $x \in f^{-1}(V)$ (qui est ouvert), il existe un ouvert U de X contenant x et inclus dans $f^{-1}(V)$. Ainsi $f(U) \subset V$ et f est continue en x.

$\square$

Remarque 3.5 Attention, l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas forcément un ouvert (et de même avec fermé). Par exemple, si f est l'application constante nulle de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $f(\mathbf{R}) = \{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbf{R}$. L'image de $\mathbf{C}$ par l'application continue exp de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ est $\mathbf{C}^*$, qui n'est pas un fermé de $\mathbf{C}$.

Proposition 3.6 *Soit $f : X \to Y$ une application continue. Soit A une partie de X. Alors $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Démonstration : Soit $y = f(x)$ dans $f(\overline{A})$, avec $x \in \overline{A}$. Soit V un voisinage de y. Comme f est continue, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$. Comme $x \in \overline{A}$, il existe x' dans $A \cap U$. Alors, comme $f(x') \in (f(A) \cap V)$, on a bien montré que $f(A)$ rencontre V, et finalement $y \in \overline{f(A)}$.

$\square$

Définition 3.7 Un *homéomorphisme* $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est une application continue, bijective, dont la réciproque est continue. Deux espaces topologiques sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme entre eux.

Cette notion est donc l'analogue en topologie de celle d'isomorphisme en algèbre, mais bien noter que la condition que pour f bijective continue, il n'est pas automatique que f^{-1} soit continue. Deux espaces homéomorphes ont les mêmes "propriétés topologiques", par exemple l'un est séparé si et seulement si l'autre l'est, de même pour les propriétés que nous verrons ultérieurement de connexité, compacité etc.

Exemple 3.8 a) Soit X un ensemble. Soient $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ deux topologies sur X. Le théorème montre que l'identité i de $(X, \mathcal{O})$ dans $(X, \mathcal{O}')$ est continue si et seulement si $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, autrement dit si $\mathcal{O}$ a plus d'ouverts (au sens large) que $\mathcal{O}'$, on dit alors qu'elle est *plus fine* que $\mathcal{O}'$. En particulier, i peut être continue sans que sa réciproque soit continue (prendre par exemple pour $\mathcal{O}$ la topologie discrète et pour $\mathcal{O}'$ la topologie grossière).

b) Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble X. Alors, l'identité entre les espaces métriques (X, d_1) et (X, d_2) est un homéomorphisme si et seulement si les deux distances définissent la même topologie (on dit alors que d_1 et d_2 sont *topologiquement équivalentes*). C'est le cas en particulier s'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$d_1(x,y) \leq C_1 d_2(x,y); d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y)$$

pour tous x, y de X (on dit dans ce cas que d_1 et d_2 sont *équivalentes* ou *Lipschitz-équivalentes*. Nous verrons plus tard (corollaire 6.24) que toutes les normes sur un e.v.n. de dimension finie sont équivalentes, et en particulier induisent des distances équivalentes. C'est notamment le cas pour les trois normes standard (cf. exemple 1.5) sur $\mathbf{R}^n$.

c) Soit S^1 l'ensemble des complexes de module 1 (muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{C}$). L'application $[0, 2\pi[\to S^1, x \mapsto e^{ix}$ est bijective, continue, mais sa réciproque n'est pas continue.

d) L'espace topologique $\mathbf{R}$ est homéomorphe à $]-1, 1[$, via par exemple [4] l'application

$$\mathbf{R} \to]-1, 1[, \ x \mapsto \frac{x}{1+|x|},$$

dont la réciproque est

$$]-1, 1[\to \mathbf{R}, \ x \mapsto \frac{x}{1-|x|}.$$

On en déduit facilement que $\mathbf{R}$ est aussi homéomorphe à tout intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $a < b$, via l'application affine qui envoie -1 sur a et 1 sur b. On peut aussi vérifier que $]0, 1[$ est homéomorphe à $\mathbf{R}_+^*$ (puis à toute demi-droite ouverte de $\mathbf{R}$ via une transformation affine) via $x \mapsto \frac{1}{x} - 1$.

Remarque 3.9 Une notion un peu plus générale que celle de continuité est celle de *limite* d'une application $f : A \to Y$, où A est une partie d'un espace topologique X et Y un espace topologique. Si $a \in \overline{A}$, on dit que f admet pour limite $l \in Y$ lorsque x tend vers a en appartenant à A si : pour tout voisinage V de l, il existe un voisinage U de a dans X tel que $f(U \cap A) \subset V$. Si Y est séparé, la limite est unique et on note alors

$$l = \lim_{x \to a, x \in A} f(x).$$

Si de plus $a \in A$, la limite ne peut être que $f(a)$ et on retrouve la notion de continuité en a. Par ailleurs, il existe une notion encore plus générale, celle de limite suivant un filtre ou une base de filtre, qui permet par exemple de donner un sens à des expressions telles que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ pour une fonction définie sur $\mathbf{R}$ ou $\lim_{||x|| \to +\infty} f(x)$ pour une fonction définie sur un e.v.n. Voir [1], chapitre 9.

4. On peut aussi utiliser $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ comme homéomorphisme, mais il faut alors connaître le théorème des valeurs intermédiaires, que nous démontrerons un peu plus loin.

3.2. Continuité dans un espace métrique

Dans le cas particulier d'un espace métrique, il est possible de tester la continuité en utilisant des suites, ce qui est souvent commode.

Proposition 3.10 *Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques. Soient $x \in X$ et $y = f(x)$. Si f est continue en x, alors pour toute suite (x_n) convergeant vers x, alors $(f(x_n))$ converge vers y.*

Démonstration : Soit V un voisinage de y, alors comme f est continue en x, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$. Comme (x_n) converge vers x, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in U$. Alors, $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geq N$, donc $(f(x_n))$ converge vers y.

□

Theorème 3.11 *Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces métriques. Soient $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors, on a équivalence entre :*

i) f est continue en x.

ii) Pour toute suite (x_n) convergeant vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers y.

iii) Pour toute suite (x_n) convergeant vers x, la suite $(f(x_n))$ converge.

Démonstration : La proposition 3.10 dit que i) implique ii). Il est immédiat que ii) implique iii). Supposons iii). Montrons d'abord ii). Soit (x_n) une suite convergeant vers x. Soit (x'_n) la suite définie par $x'_n = x$ si n est pair et $x'_n = x_n$ si n est impair. Il est clair que (x'_n) converge encore vers x et que les suites extraites $(f(x'_{2n}))$ et $(f(x'_{2n+1}))$ (qui sont respectivement constante et extraite de $(f(x_n))$) convergent respectivement vers y et vers la limite de $(f(x_n))$, cette limite est donc égale à y. On a donc montré ii).

Il reste à montrer que ii) implique i). Si f n'était pas continue en x, il existerait $r > 0$ tel qu'aucun voisinage U de x ne vérifie $f(U) \subset B(y, r)$. En considerant les voisinages de x de la forme $B(x, 1/n)$, on construit une suite (x_n) de points de X vérifiant $d(x_n, x) < 1/n$ et $d(f(x_n), y) \geq r$. En particulier (x_n) converge vers x et $(f(x_n))$ ne converge pas vers y, ce qui contredit ii).

□

Une notion plus forte que la continuité existe dans les espaces métriques :

Définition 3.12 Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tous $x, y \in X$, la condition $d(x, y) \leq \eta$ implique $d(f(x), f(y) \leq \varepsilon$.

Noter que le η dans cette définition ne doit pas dépendre de x. Une application uniformément continue est clairement continue, mais la réciproque est fausse en général.

Exemple 3.13 a) Soit $k > 0$. Une application k-lipschitzienne $f : X \to Y$ entre espaces métriques est une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$$

pour tous $x, y \in X$. Une telle application est uniformément continue (en prenant $\eta = \varepsilon/k$ dans la définition), donc continue.

b) Soit x_0 un point d'un espace métrique X. L'inégalité triangulaire donne que $x \mapsto d(x, x_0)$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue. Soit plus généralement A une partie non vide de X. On définit l'application distance à A par $X \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$. On vérifie encore via l'inégalité triangulaire que l'application $d(., A)$ est 1-lipschitzienne ; Par ailleurs, on a $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

c) On vérifiera que $x \mapsto 1/x$ est continue mais pas uniformément continue de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ (cela résulte aussi du théorème 5.5 que nous verrons plus tard, cette fonction ne pouvant pas se prolonger continûment en 0).

3.3. Opérations sur les applications continues

Theorème 3.14 *Soient X, Y, Z des espaces topologiques. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Soit $x \in X$, $y := f(x)$, $z := g(y)$. Alors, si f est continue en x et g est continue en y, alors $g \circ f$ est continue en x. En particulier, si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.*

Démonstration : Soit W un voisinage de z. Alors il existe un voisinage V de y tel que $g(V) \subset W$ car g est continue en y. Il existe ensuite un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$ car f est continue en x. Alors $(g \circ f)(U) \subset W$, donc $g \circ f$est bien continue en x. La deuxième assertion découle immédiatement de la première.

□

Theorème 3.15 *Soit X un espace topologique. Soient f et g deux applications de X dans $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$). Alors, $f + g$ et fg sont continues de X dans $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$).*

Démonstration : Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$, on a

$$|(f+g)(y)-(f+g)(x)| \leq |f(y)-f(x)|+|g(y)-g(x)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ (on peut supposer $\varepsilon \leq 1$). Comme f et g sont continues en x, on peut trouver des voisinages ouverts U, V de x tels que pour $y \in U$ (resp. $y \in V$), on ait $|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$ (resp. $|g(y)-g(x)| \leq \varepsilon$). Alors, pour y dans $U \cap V$ (qui est un ouvert de X), on a

$$|(f+g)(y)-(f+g)(x)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre que $f+g$ est continue en x.

On a aussi

$$f(y)g(y)-f(x)g(x) = (f(y)-f(x))g(x)+(g(y)-g(x))f(y).$$

Posons $M = \max(|f(x)|, |g(x)|)$. Comme $\varepsilon \leq 1$, on a $|f(y) \leq |M+1$, d'où finalement, pour $y \in U \cap V$:

$$|f(y)g(y)-f(x)g(x)| \leq M\varepsilon+(M+1)\varepsilon = (2M+1)\varepsilon,$$

ce qui prouve (comme M est une constante) que fg est continue en x.

$\square$

Noter que l'assertion sur la somme s'étend aisément si on remplace $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) par un espace vectoriel normé quelconque (auquel cas on a aussi que αf est continue si f est continue et α est un scalaire). L'énoncé sur le produit est également une conséquence d'un résultat sur les applications bilinéaires de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, voir corollaire 7.7.

Exemple 3.16 a) Une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ (munie d'une des normes définies dans l'exemple 1.5) est continue.

b) En particulier, la fonction déterminant de $M_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ est continue, où on a identifié $M_n(\mathbf{R})$ à $\mathbf{R}^{n^2}$ via sa base canonique.

3.4. Topologie sur un espace produit

Soient $X_1, ..., X_r$ des espaces topologiques. On cherche à définir une topologie sur le produit $X := \prod_{i=1}^r X_i$, telle que les projections $p_i : X \to X_i$ soient continues, et en quelque sorte "minimale" (i.e. avec le moins d'ouverts possibles) pour cette propriété. On voit que si U_j est un ouvert de X_j, alors

$$p_j^{-1}(U_j) = X_1 \times ... \times U_j \times ... \times X_r$$

doit être un ouvert de X, et comme l'intersection d'une famille finie d'ouverts doit être ouverte, il en va de même pour les sous-ensembles de X de la forme $\prod_{i=1}^r U_i$, où U_i est ouvert dans X_i. Comme une réunion quelconque d'ouverts doit être ouverte, ceci conduit à la définition suivante :

Définition 3.17 On appelle *ouvert élémentaire* de X un sous-ensemble de la forme $\prod_{i=1}^r U_i$, où chaque U_i est un ouvert de X_i. La *topologie produit* sur X est celle dont les ouverts sont les réunions d'ouverts élémentaires.

Le seul axiome non évident à vérifier est qu'une intersection de deux ouverts est un ouvert. Pour cela, il suffit de voir qu'une intersection de deux ouverts élémentaires est encore un ouvert élémentaire, ce qui résulte de ce que dans chaque X_i, l'intersection de deux ouverts est un ouvert.

Theorème 3.18 *Soient $X_1, ..., X_r$ des espaces topologiques, on munit l'ensemble $X = \prod_{i=1}^r X_i$ de la topologie produit. Alors :*

a) Les voisinages d'un élément $(x_1, ..., x_r)$ de X sont les parties contenant un ouvert élémentaire $\prod_{i=1}^r U_i$, où $x_i \in U_i$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$.

b) Soit (u_n) une suite d'éléments de X, écrivons $u_n = (u_{1,n}, ..., u_{r,n})$. Alors la suite (u_n) converge vers $(x_1, ..., x_r)$ si et seulement si chaque suite $(u_{i,n})$ converge vers x_i pour $i \in \{1, ..., r\}$.

c) Les projections $p_i : X \to X_i$ sont des applications continues et ouvertes (i.e. l'image d'un ouvert de X par p_i est un ouvert).

d) Soit E un espace topologique. Alors une application $f : E \to X$ est continue si et seulement si les fonctions composantes $f_i = p_i \circ f$ sont continues pour tout $i \in \{1, ..., r\}$.

e) Si tous les X_i sont séparés, alors X est séparé.

Démonstration : a) Par définition, un ouvert élémentaire contenant $x = (x_1, ..., x_r)$ est un voisinage de x. Réciproquement, tout voisinage V de x contient un ouvert contenant x, donc contient une réunion d'ouverts élémentaires contenant x ; du coup, l'un de ces ouverts élémentaires contient x et est inclus dans V.

b) Supposons que (u_n) converge vers $(x_1, ..., x_r)$. Soit $i \in \{1, ..., r\}$. Soit V_i un voisinage ouvert de x_i, alors $U := X_1 \times ... \times V_i \times ... \times X_r$ est un voisinage ouvert de x. Il existe donc un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $(x_{1,n}, ..., x_{r,n}) \in U$, ce qui implique $x_{i,n} \in V_i$. Ainsi la suite $(x_{i,n})$ converge vers x_i.

Supposons réciproquement que chaque suite $(x_{i,n})$ converge vers x_i. Soit V un voisinage de x, alors V contient un ouvert élémentaire $U := \prod_{i=1}^r U_i$

contenant x. Chaque U_i est un voisinage de x_i, donc il existe un entier N_i tel que $x_{i,n} \in U_i$ pour tout $n \geq N_i$. Posons $N = \max_{1\leq i\leq r} N_i$, alors pour tout $n \geq N$ on a $x_n \in U \subset V$. Ainsi (x_n) converge vers x.

c) Soit U_i un ouvert de X_i, alors son image réciproque par p_i est l'ensemble $X_1 \times ... \times U_i \times ... \times X_r$, qui est un ouvert de X. Ceci montre que p_i est continue. Soit maintenant U un ouvert de X, alors U est une réunion d'ouverts élémentaires V_k, donc $p_i(U)$ est réunion des $p_i(V_k)$. Comme l'image par p_i d'un ouvert élémentaire est clairement un ouvert de X_i, on en déduit que $p_i(U)$ est bien un ouvert.

d) Si f est continue, alors chaque f_i est continue d'après c). Supposons maintenant que chaque f_i soit continue. Soit V un ouvert de X, alors il est réunion d'ouverts élémentaires et il est donc suffisant de montrer que l'image réciproque par f d'un ouvert élémentaire $\prod_{i=1}^r V_i$ est ouvert. Cette image réciproque est $\bigcap_{i=1}^r f_i^{-1}(V_i)$, qui est ouvert comme intersection d'un nombre fini d'ouverts.

e) Soient x, y deux points distincts de X. Alors, il existe $i \in \{1, ..., r\}$ tel que $x_i \neq y_i$ Comme X_i est séparé, il existe deux ouverts disjoints U_i et V_i de X_i avec $x_i \in U_i$ et $y_i \in V_i$. Alors $X_1 \times ...U_i \times ... \times X_r$ et $X_1 \times ...V_i \times ... \times X_r$ sont deux ouverts disjoints contenant respectivement x et y.

$\square$

Exemple 3.19 a) Supposons de plus que les X_i soient des espaces métriques. Alors la topologie produit sur X est associé à la distance

$$d(x, y) = \max_{1\leq i\leq r} d(x_i, y_i),$$

où on a posé $x = (x_1, ..., x_r)$ et $y = (y_1, ..., y_r)$. En particulier, la topologie usuelle sur $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}^n$) s'obtient bien comme topologie produit de la topologie usuelle sur $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$).

b) Attention, l'image d'un fermé de X par une projection n'est pas forcément un fermé. Par exemple le sous-ensemble H de $\mathbf{R}^2$ défini par l'équation $xy = 1$ est fermé (image réciproque du fermé $\{1\}$ par une application continue), mais sa première projection est $\mathbf{R}^*$, qui n'est pas un fermé de $\mathbf{R}$.

c) Certains ouverts ne sont pas élémentaires, c'est le cas par exemple de l'ouvert $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ de $\mathbf{R}^2$.

d) Il n'y a pas d'analogue du théorème 3.18 c) pour une application définie sur un espace produit (au lieu d'être à valeurs dans un espace produit). Par exemple l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

si $(x, y) \neq (0,0)$ est $f(0,0) = 0$ n'est pas continue en $(0,0)$ (par exemple parce que $f(1/n, 1/n) = 1/2$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et la suite $(1/n, 1/n)$ converge vers $(0,0)$), pourtant les applications "partielles" $y \mapsto f(0, y)$ et $x \mapsto f(x, 0)$ sont constantes nulles, donc continues. On peut juste dire que si f est continue sur un produit $A \times B$, les applications partielles $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ sont continues pour tous $a \in A, b \in B$ (comme composées d'applications continues).

Remarque 3.20 Il est possible de définir une topologie sur un produit infini $\prod_{i \in I}$ d'espaces topologiques, mais dans ce cas pour garder les assertions du théorème 3.18, il est nécessaire de définir les ouverts élémentaires comme les $\prod_{i \in I} U_i$ avec U_i ouvert de X_i, en ajoutant la condition que $U_i = X_i$ pour presque tout i (i.e. pour tout i à l'exception d'un nombre fini). Si de plus $I = \mathbf{N}$ (ou plus généralement I est dénombrable) et les X_i sont des espaces métriques, cette topologie produit est alors associée à la distance

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \min(1, d(x_n, y_n))/2^n.$$

Proposition 3.21 *Un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale*

$$\Delta = \{(x, x), x \in X\}$$

est un fermé de $X \times X$.

Démonstration : Supposons X séparé. Soit $(x, y) \in X \times X$, si $(x, y) \notin \Delta$ alors $x \neq y$. Il existe alors des ouverts disjoints U, V de X avec $x \in U$ et $y \in V$. Alors $U \times V$ est un ouvert de $X \times X$ qui ne rencontre pas Δ et contient (x, y) ; ceci montre que le complémentaire de Δ dans $X \times X$ est ouvert, donc Δ est un fermé de $X \times X$.

Réciproquement, si Δ est un fermé de $X \times X$, alors pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, on a $(x, y) \notin \Delta$. Comme le complémentaire de Δ dans $X \times X$ est ouvert, il existe un ouvert W de $X \times X$ contenant (x, y) et ne rencontrant pas Δ. Cet ouvert est réunion d'ouverts élémentaires, donc l'un de ces ouverts élémentaires $U \times V$ contient (x, y). On a alors $x \in U, y \in V$, et $U \cap V = \emptyset$ puisque $(U \cap V) \subset W$ ne rencontre pas Δ.

□

Corollaire 3.22 *Soient f et g des applications continues d'un espace topologique X dans un espace topologique séparé Y. Si f et g coïncident sur une partie dense A de X, alors $f = g$.*

Rappelons que A dense dans X signifie $\overline{A} = X$.

Démonstration : La diagonale Δ de Y est un fermé. Soit $Z \subset X$ l'ensemble des x de X tels que $f(x) = g(x)$. Alors Z est l'image réciproque de Δ par l'application continue $x \mapsto (f(x), g(x))$ de X dans $Y \times Y$, c'est donc un fermé de X. Comme Z contient A, il contient $\overline{A} = X$, d'où $f = g$.

□

3.5. Topologie quotient

Définition 3.23 Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On définit une topologie sur l'ensemble quotient $X/\mathcal{R}$ en prenant comme ouvert les parties U de $X/\mathcal{R}$ dont l'image réciproque $p^{-1}(U)$ par la surjection canonique $p : X \to X/\mathcal{R}$ est un ouvert de X.

Par définition, cette topologie rend $p : X \to X/\mathcal{R}$ continue. En d'autres termes, les ouverts de $X/\mathcal{R}$ sont les images par p des ouverts *saturés* de X (ceux qui sont réunion de classes d'équivalences pour $\mathcal{R}$).

Proposition 3.24 *Si Y est un espace topologique, alors une application $f : X/\mathcal{R} \to Y$ est continue si et seulement si $f \circ p : X \to Y$ est continue.*

Démonstration : Si f est continue, alors $f \circ p$ est continue par composition. Réciproquement, supposons $f \circ p$ continue. Soit V un ouvert de Y, alors dire que $f^{-1}(V)$ est ouvert est équivalent par définition à dire que $p^{-1}(f^{-1}(V))$ est ouvert, ou encore que $(f \circ p)^{-1}(V)$ est ouvert, ce qui est bien le cas puisque $f \circ p$ est continue.

□

En particulier, une application $g : X \to Y$ continue et constante sur chaque classe d'équivalence se factorise en une application continue de $X/\mathcal{R}$ dans Y.

Exemple 3.25 a) Considérons le groupe quotient $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ (c'est-à-dire le quotient de $\mathbf{R}$ par la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi $(x - y) \in \mathbf{Q}$). La topologie quotient sur $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ est la topologie grossière : en effet il suffit pour le voir de montrer que tout ouvert saturé non vide de $\mathbf{R}$ est égal à $\mathbf{R}$. Soit V un tel ouvert, il contient un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$. Si $x \in \mathbf{R}$, il existe (par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$) un rationnel $r \in]x - b, x - a[$, soit $x - r \in]a, b[$, ce qui montre que $x \in V$ vu que V est saturé.

On voit au passage que l'espace quotient n'est pas forcément séparé même si X est séparé.

b) Le groupe quotient $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est homéomorphe au disque unité complexe S^1, via l'application continue $x \mapsto \exp(2i\pi x)$ de $\mathbf{R}$ dans S^1 qui se factorise par le sous-groupe $\mathbf{Z}$.

Proposition 3.26 *Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X, dont on note Γ le graphe, c'est-à-dire l'ensemble des (x, y) de $X \times X$ tel que $x \sim y$. Alors, si $X/\mathcal{R}$ est séparé, le graphe Γ est un fermé de l'espace topologique produit $X \times X$. La réciproque est vraie si on suppose de plus que la surjection canonique $p : X \to X/\mathcal{R}$ est ouverte (ou encore que si A est une partie ouverte de X, son saturé $p^{-1}(p(A))$ est un ouvert).*

Démonstration : Supposons $X/\mathcal{R}$ séparé. Alors la diagonale Δ de $X/\mathcal{R}$ est fermée (proposition 3.21), donc son image réciproque par l'application continue $(x, y) \mapsto (p(x), p(y))$ l'est aussi, or cette image réciproque est précisément Γ.

Supposons réciproquement que Γ soit fermé et que p soit une application ouverte. Soient $\bar{x}, \bar{y}$ deux éléments distincts de $X/\mathcal{R}$, classes d'équivalence respectives de $x, y \in X$. Par définition $(x, y) \notin \Gamma$, et comme Γ est un fermé de $X \times X$, il existe un ouvert élémentaire $U \times V$ de $X \times X$ contenant (x, y) et ne rencontrant pas Γ. Alors $p(U)$ et $p(V)$ sont des ouverts de $X/\mathcal{R}$ via l'hypothèse sur p, et on a $\bar{x} \in p(U)$, $\bar{y} \in p(V)$. Enfin, $p(U)$ et $p(V)$ sont disjoints, sinon on aurait un élément x' de U dans la même classe d'équivalence qu'un élément y' de V, ce qui signifierait $(x', y') \in \Gamma$, contredisant le fait que $U \times V$ ne rencontre pas Γ.

$\square$

Remarque 3.27 La condition que l'application p est ouverte est automatique si G est un *groupe topologique* (un groupe dans lequel les applications $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont continues respectivement sur $G \times G$ et G) et l'espace quotient considéré G/H est celui des classes (à gauche ou à droite) suivant un sous-groupe H. En effet, dans ce cas, le saturé d'un ouvert U de G est $\bigcup_{a \in H} aU$ qui est une réunion d'ouverts (aU est ouvert car image réciproque de U par $x \mapsto a^{-1}x$). La condition que G/H soit séparé est alors équivalente au fait que le sous-groupe H soit fermé dans G.

4. Espaces topologiques connexes

Il s'agit ici de mathématiser la notion intuitive de partie "d'un seul tenant".

4.1. Notion de connexité

Proposition 4.1 *Soit X un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides.

ii) Il n'existe pas de partition de X en deux fermés non vides.

iii) Les seule parties ouvertes et fermées de X sont X et $\emptyset$.

iv) Toute application continue de X dans l'espace discret $\{0,1\}$ (ou encore dans un espace discret quelconque) est constante.

Un espace X qui vérifie ces propriétés est dit connexe. Une partie d'un espace topologique X est connexe si c'est un espace connexe lorsqu'on la munit de la topologie induite.

Démonstration : L'équivalence de i) et ii) est immédiate par passage au complémentaire.

i) $\Rightarrow$ iii) : Soit A une partie ouverte et fermée de X. Alors $X-A$ est aussi ouverte et fermée, donc A et $X-A$ réalisent une partition de X en deux ouverts. Ainsi, A ou $X-A$ est vide, i.e. A est vide ou $A=X$.

iii) $\Rightarrow$ iv) : Soit f une application continue de X dans un espace discret Y. Alors, si $y \in Y$ est dans l'image de f, $f^{-1}(\{y\})$ est une partie ouverte et fermée car comme Y est discret, $\{y\}$ est une partie ouverte et fermée de X. Ainsi $f^{-1}(\{y\})$ (qui n'est pas vide par hypothèse) est égal à X, et f est constante égale à y.

iv) $\Rightarrow$ i) : si X admet une partition en deux ouverts non vides A et $X-A$, soit $f : X \to \{0,1\}$ la fonction caractéristique de A. Alors f est continue car l'image réciproque d'une partie de $\{0,1\}$ est $\emptyset$, X, A, ou $X-A$, qui sont tous ouverts. Ainsi f est constante égale à 1 (auquel cas $A=X$) ou à 0 (auquel cas $A=\emptyset$).

□

Theorème 4.2 *a) Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Si A est une partie connexe de X, alors $f(A)$ est une partie connexe de Y.*

b) Si A est une partie connexe d'un espace topologique, alors son adhérence $\overline{A}$ (et plus généralement toute partie B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$) est connexe.

c) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties connexes d'un espace topologique. On suppose qu'il existe $j \in I$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Alors la réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Démonstration : a) Soit $g : f(A) \to \{0,1\}$ une application continue, alors $g \circ f : A \to \{0,1\}$ est continue, donc constante, ce qui implique immédiatement que g est constante. Ainsi, $f(A)$ est connexe.

b) Soit $f : B \to \{0,1\}$ une application continue, alors sa restriction à A est encore continue, donc constante par connexité de A. Comme l'adhérence de A dans B est B tout entier (vu que son adhérence dans X contient B), la proposition 3.6 donne que f est constante (toute partie de $\{0,1\}$ est fermée, donc égale à son adhérence).

c) Soit $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ une application continue, alors la restriction de f à chaque A_i est constante, mais cette constante est la même pour tout i que pour $i = j$, vu que A_i et A_j ont au moins un élément en commun. Ainsi, f est constante.

□

Proposition 4.3 *Soient A et B deux espaces topologiques connexes. Alors l'espace topologique produit $A \times B$ est connexe. De même, le produit d'un nombre fini d'espaces connexes est connexe.*

Démonstration : Soit $f : A\times B \to \{0,1\}$ une application continue. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $A \times B$. On observe que l'application $y \mapsto f(x_1, y)$ est continue sur B, elle est donc constante. En particulier $f(x_1, y_1) = f(x_1, y_2)$. De même, l'application $x \mapsto f(x, y_2)$ est continue sur A, donc constante, d'où $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2)$. On a donc bien $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Finalement, f est constante. On étend immédiatement le résultat par récurrence à un produit fini d'espaces connexes.

□

Remarque 4.4 Ceci s'étend à un produit infini d'espaces connexes, en remarquant que si $f : \prod_{i\in I} X_i \to \{0,1\}$ est continue et prend par exemple la valeur 0, alors $f^{-1}(0)$ contient un ouvert élémentaire du type $\prod_{i\in J} V_i \times \prod_{i\notin J} X_i$ avec J fini et V_i ouvert non vide de X_i, ce qui permet de se ramener au cas où I est fini.

4.2. Connexes de R, connexité par arcs

On commence par montrer la connexité de $\mathbf{R}$ et de $[0,1]$:

Theorème 4.5 *L'espace topologique $\mathbf{R}$ est connexe, ainsi que l'intervalle $[0,1]$.*

Démonstration : On utilise le lemme suivant :

Lemme 4.6 *Soit Y une partie non vide, ouverte et fermée, de $\mathbf{R}$. Alors Y n'est pas majorée ni minorée.*

Supposons par exemple que Y soit majorée. Alors elle admet une borne supérieure M. On aurait alors $M \in Y$ car Y est fermée, mais aussi l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $]M - \varepsilon, M + \varepsilon[\subset Y$ car Y est ouverte. En particulier, $(M + \frac{\varepsilon}{2}) \in Y$, ce qui contredit $M = \sup Y$. On montre de même que A n'est pas minorée.

$\square$

Soit maintenant A une partie non vide, ouverte, et fermée de $\mathbf{R}$, montrons que $A = \mathbf{R}$. Sinon, on aurait un réel $a \notin A$. L'un des deux ensembles $]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$ contient alors un élément de A, par exemple $]a, +\infty[$. Mais alors, $]a, +\infty[\cap A = [a, +\infty[\cap A$ est une partie ouverte et fermée de A, donc aussi de $\mathbf{R}$, et est minorée, ce qui contredit le lemme.

Maintenant, l'intervalle $]0, 1[$ (qui est homéomorphe à $\mathbf{R}$) est connexe, donc aussi son adhérence $[0, 1]$.

$\square$

Définition 4.7 Un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si pour tout $x, y \in X$, il existe une application continue (appelée *chemin* entre x et y) $f : [0, 1] \to X$ tel que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

On peut bien sûr remplacer dans cette définition $[0, 1]$ par n'importe quel segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ (via une transformation affine envoyant $[0, 1]$ sur $[a, b]$). En utilisant les segments $[0, 1]$, $[1, 2]$, et $[0, 2]$, on voit en particulier que s'il y a un chemin entre x et y et un chemin entre y et z, il y en a un entre x et z.

Il n'est pas immédiatement évident qu'un espace connexe par arcs est connexe. Pour cela, on va avoir recours à la notion suivante :

Définition 4.8 Rappelons qu'une partie *convexe* d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (ou $\mathbf{C}$-espace vectoriel) est une partie A qui vérifie : si $x, y \in A$, alors le segment

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}$$

est inclus dans A.

Theorème 4.9 *a) Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.*

b) Toute partie convexe d'un e.v.n. est connexe par arcs (donc connexe). Réciproquement, les connexes de $\mathbf{R}$ *sont ses parties convexes, i.e. ses intervalles.*

Démonstration : a) Soit X un espace topologique connexe par arcs. Soit $g : X \to \{0,1\}$ une application continue. Pour tous x, y de A, il existe $f : [0,1] \to X$ continue telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. L'application $u : t \mapsto g(f(t))$ est alors continue de $[0,1]$ dans $\{0,1\}$, donc constante puisque $[0,1]$ est connexe. En particulier, $u(0) = u(1)$, soit $g(x) = g(y)$. Finalement, g est constante et X est connexe.

b) Si A est une partie convexe d'un e.v.n. et $x, y \in A$, alors l'application $t \mapsto (1-t)x + ty$ est un chemin entre x et y, donc A est connexe par arcs. Il reste à montrer qu'une partie non convexe A de $\mathbf{R}$ n'est pas connexe. Par définition, il existe $a, b \in A$ et $c \notin A$ tels que $a < b < c$. Alors, A est réunion des deux ouverts non vides (de A) $A \cap]-\infty, c[$ et $A \cap]c, +\infty[$, donc A n'est pas connexe.

□

Exemple 4.10 a) Toute boule (ouverte ou fermée) d'un e.v.n. est convexe, donc connexe.

b) L'intérieur d'un connexe n'est pas forcément connexe, par exemple la réunion A de deux disques fermés tangents de $\mathbf{R}^2$ est connexe comme réunion de deux connexes qui ont un point commun, tandis que l'intérieur A° est la réunion de deux disques ouverts disjoints, donc réunion de deux ouverts disjoints non vides.

c) Dans $\mathbf{R}^2$, il y a des parties connexes non convexes, par exemple la réunion de deux droites non parallèles dans $\mathbf{R}^2$, ou encore un cercle (voir e)).

d) Les seuls espaces discrets connexes sont $\emptyset$ et les singletons.

e) Le cercle S^1 de $\mathbf{C}$ est connexe, car image du connexe $[0, 2\pi[$ (ou $\mathbf{R}$) par l'application continue $t \mapsto e^{it}$.

f) Si X est connexe, alors l'image d'une application continue $X \to \mathbf{R}$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ (*théorème des valeurs intermédiaires*).

Noter qu'il existe des espaces topologiques connexes mais pas connexes par arcs (cf. TD). On a cependant :

Proposition 4.11 *Soit U un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé E. Alors U est connexe par arcs.*

Démonstration : Soit $x \in U$. Notons V l'ensemble des y de U tels qu'il existe un chemin entre x et y. Soit $y \in V$, il existe une boule ouverte $B(y, r)$ incluse dans U vu que U est un ouvert de E. Si $z \in B(y, r)$, alors le segment $[y, z]$ est inclus dans $B(y, r)$ (donc dans U) et est un chemin entre y et z. Comme il existe un chemin dans U entre x et y, il y en a un entre x et z, donc $z \in V$. Ceci montre que V est ouvert dans U. De même, si $y \notin V$, un élément z de $B(y,r)$ ne peut pas être dans V, sinon il y aurait un chemin entre x et z, donc aussi entre x et y via le segment $[z,y]$. Ainsi V est ouvert et fermé dans U. Comme U est connexe et V non vide (il contient x), on a $U = V$. Ainsi, U est connexe par arcs.

□

4.3. Composantes connexes

Proposition 4.12 *Soit X un espace topologique. Soit x dans X. Alors la réunion $C(x)$ des parties connexes de X contenant x est connexe. C'est le plus grand connexe de X qui contient x, on l'appelle composante connexe de x dans X. Les classes d'équivalences pour la relation $x \sim y$ ssi $C(x) = C(y)$ s'appellent les composantes connexes de X ; on a $C(x) = C(y)$ dès que $y \in C(x)$.*

Démonstration : Tout d'abord, il y a bien au moins un connexe contenant x, à savoir $\{x\}$. La réunion de tous les connexes contenant x est connexe d'après le théorème 4.2, c). Tout connexe contenant x est alors contenu par définition dans $C(x)$, qui est donc bien le plus grand connexe contenant x. Enfin, si $y \in C(x)$, on a en fait $C(x) = C(y)$: en effet, $C(x)$ est alors un connexe contenant y donc il est inclus dans $C(y)$; mais alors $C(y)$ est un connexe contenant $C(x)$, donc x, donc $C(y) = C(x)$ vu que $C(x)$ est le plus grand connexe de X contenant x.

□

Exemple 4.13 a) Les composantes connexes de $\mathbf{R}^*$ sont $\mathbf{R}^*_+$ et $\mathbf{R}^*_-$.

b) Les composantes connexes de $\mathbf{Q}$ sont les singletons : en effet une partie connexe de $\mathbf{Q}$ est un connexe de $\mathbf{R}$, donc un intervalle, mais tout intervalle autre qu'un singleton contient un nombre irrationnel. De même en remplaçant $\mathbf{Q}$ par $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

c) Les composantes connexes d'un espace topologique X sont fermées dans X car si $C(x)$ est la composante connexe de x, son adhérence dans X est encore connexe (théorème 4.2, b) et contient x, donc est égale à $C(x)$. Il se peut que $C(x)$ ne soit pas ouverte, comme le montre l'exemple de $\mathbf{Q}$. S'il y a un nombre fini de composantes connexes, elles sont ouvertes (chaque composante étant le complémentaire de la réunion des autres, qui est finie comme réunion d'un nombre fini de fermés).

5. Espaces métriques complets (II)

Nous poursuivons dans cette section l'étude démarrée au paragraphe 1.3.

5.1. Parties complètes d'un espace métrique

On dit qu'une partie A d'un espace métrique X est complète si A est un espace métrique complet lorsqu'on le munit de la distance induite par celle de X.

Proposition 5.1 *Soit A une partie d'un espace métrique X.*

a) Si A est complète, alors A est fermée dans X.

b) Réciproquement, si X est complet et A fermée dans X, alors A est complète.

Démonstration : a) Soit (x_n) une suite d'élements de A qui converge vers $l \in X$. Alors, c'est une suite de Cauchy, donc elle converge dans A. Par unicité de la limite, on a $l \in A$. En vertu de la proposition 2.18, la partie A est fermée dans X.

b) Soit (x_n) une suite de Cauchy d'élements de A. Elle reste de Cauchy dans X, donc converge dans X. Alors, sa limite est dans A via loc. cit. Ainsi, (x_n) converge dans A et A est bien complet.

□

Exemple 5.2 a) L'espace métrique $\mathbf{Z}$ est complet, car fermé dans l'espace complet $\mathbf{R}$.

b) Bien que $\mathbf{Q}$ ne soit pas complet, il admet des sous-espaces complets, par exemple les singletons ou $\mathbf{Z}$.

c) Soit $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. L'homéomorphisme

$$\mathbf{R} \to]-1,1[, \ x \mapsto \frac{x}{1+|x|},$$

s'étend un homéomorphisme u de $\overline{\mathbf{R}}$ sur $[-1,1]$ en posant $u(+\infty) = 1$ et $u(-\infty) = -1$. On peut alors définit une distance sur $\overline{\mathbf{R}}$, qui induit sa topologie usuelle, via

$$d(x,y) = |u(x) - u(y)|.$$

La complétude de $[-1,1]$ implique facilement [5] que $\overline{\mathbf{R}}$ est complet pour cette distance. Mais attention, le sous-espace $\mathbf{R}$ n'est pas complet pour la distance

5. En fait, on verra que $\overline{\mathbf{R}}$ est compact pour cette distance, et que ceci implique automatiquement qu'il est complet.

induite par d (bien que la topologie qu'elle induise soit bien la topologie usuelle de $\mathbf{R}$), vu qu'il est dense dans $\overline{\mathbf{R}}$ et non pas fermé. On voit ici que la complétude est une notion qui dépend vraiment de la distance et pas seulement de la topologie qu'elle induit.

5.2. Complétude et uniforme continuité

Proposition 5.3 *Soit $f : X \to Y$ une application uniformément continue entre espaces métriques. Si (x_n) est une suite de Cauchy d'éléments de X, alors $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy d'éléments de Y.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour $d(x, y) \leq \eta$, on ait $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Comme (x_n) est de Cauchy, il existe un entier N tel que pour $m, n \geq N$, on ait $d(x_m, x_n) \leq \eta$, d'où $d(f(x_m), f(x_n)) \leq \varepsilon$. Ainsi $(f(x_n))$ est bien de Cauchy.

□

Corollaire 5.4 *Soient X et Y deux espaces métriques. S'il existe une application bijective $f : X \to Y$ telle que f et f^{-1} soient uniformément continues, alors X est complet si et seulement si Y est complet.*

Démonstration : En effet, si par exemple Y est complet, alors une suite de Cauchy (x_n) dans X vérifie que $(f(x_n))$ est de Cauchy, donc converge, donc (comme f^{-1} est continue) (x_n) converge aussi vu que $x_n = f^{-1}(f(x_n))$.

□

Le corollaire ne vaut pas si on remplace "uniformément continues" par continues, comme le montre l'exemple suivant : $X = \mathbf{R}$ muni de sa métrique usuelle, $Y = \mathbf{R}$ muni de la métrique induite par celle de $\overline{\mathbf{R}}$ (cf. exemple 5.2), $f = \mathrm{Id}$. En effet, f est un homéomorphisme (X et Y ont même topologie) mais X est complet alors que Y ne l'est pas. Le corollaire permet aussi de voir que si deux distances d, d' sont Lipschitz-équivalentes sur E, alors (E, d) est complet si et seulement si (E, d') l'est (en effet l'identité entre les deux espaces est alors lipschitzienne, donc uniformément continue).

Theorème 5.5 *Soient X et Y deux espaces métriques. Soit A une partie de X. Soit $f : A \to Y$ une application uniformément continue. On suppose Y complet. Alors, il existe une unique application continue $\tilde{f} : \overline{A} \to Y$ qui prolonge f ; de plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.*

Démonstration : L'unicité résulte (comme Y est un espace topologique séparé) du corollaire 3.22. Pour l'existence, on observe d'abord que pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers $x \in \overline{A}$, la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy via la proposition 5.3, donc $(f(x_n))$ converge par complétude de Y. De plus la limite de $(f(x_n))$ ne dépend pas de la suite (x_n) convergeant vers x, car si (y_n) est une autre telle suite, la convergence de la suite "mélangée" (z_n) définie par $z_n = x_n$ si n est pair et $z_n = y_n$ si n est impair implique que $(f(y_n))$ et $(f(x_n))$ ont même limite dans Y. Ceci permet de définir $\tilde{f}$ par

$$\tilde{f}(x) = \lim(f(x_n)),$$

où (x_n) est une suite quelconque d'éléments de A convergeant vers x (une telle suite existe par la proposition 2.18).

Il reste à montrer que $\tilde{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur A, il existe $\eta > 0$ tel que pour $a, b \in A$, la condition $d(a,b) \leq \eta$ implique $d(f(a), f(b)) \leq \varepsilon$. Soient alors $x, y \in \overline{A}$ avec $d(x,y) \leq \eta/3$, montrons que $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$, ce qui prouvera que $\tilde{f}$ est uniformément continue. Soit (x_n) une suite d'éléments de A convergeant vers x et (y_n) une suite d'éléments de A convergeant vers y. Il existe alors un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait

$$d(x_n, x) \leq \eta/3; \ d(y_n, y) \leq \eta/3,$$

d'où par inégalité triangulaire $d(x_n, y_n) \leq \eta$. Alors, on a $d(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui implique en passant à la limite $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$ comme on voulait (rappelons que $(a,b) \mapsto d(a,b)$ est continue sur $Y \times Y$).

□

Exemple 5.6 On retrouve que $x \mapsto 1/x$ n'est pas uniformément continue de $]0,1]$ dans $\mathbf{R}$, car elle n'admet pas de prolongement continu en 0.

5.3. Le théorème de Baire

On commence par un énoncé qui généralise le théorème des segments emboîtés dans $\mathbf{R}$.

Theorème 5.7 *Soit E un espace métrique complet. Soit (F_n) une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides de E dont le diamètre tend vers zéro. Alors $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n$ est un singleton (en particulier cet ensemble est non vide).*

Noter que l'énoncé est faux si les F_n ne sont pas supposés fermés (prendre $E = \mathbf{R}$, $F_n =]0, 1/n[$), et également si leur diamètre ne tend pas vers zéro (prendre $E = \mathbf{R}$, $F_n = [n, +\infty[$).

Démonstration : Pour chaque n, choisissons un élément x_n de F_n. Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait $\delta(F_n) \leq \varepsilon$. Ceci implique que pour $m, n \geq N$, on a $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$, donc (x_n) est bien de Cauchy. Par complétude de E, elle converge vers un $l \in E$. Comme la suite des F_n est décroissante, on a $x_m \in F_n$ pour tout $m \geq n$, d'où, en passant à la limite sur $m \geq n$, $l \in F_n$ car F_n est fermé. Ceci étant vrai pour tout n, on obtient $l \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n$. Enfin, on a évidemment

$$\delta(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n) \leq \delta(F_m)$$

pour tout m, ce qui montre en passant à la limite sur m que $\delta(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n) = 0$, ce qui donne que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n$ ne peut contenir deux éléments distincts, i.e. c'est un singleton.

□

Theorème 5.8 (Baire) *Soit E un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite d'ouverts denses de E. Alors $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} U_n$ est une partie dense de E.*

Démonstration : Soit V un ouvert non vide de E, il s'agit de montrer que $V \cap \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} U_n$ est non vide. On construit par récurrence sur n une suite décroissante de boules fermées B_n, dont le diamètre tend vers zéro, vérifiant :

$$B_n \subset V \cap \bigcap_{k=1}^{n} U_k.$$

Comme U_1 est dense dans E, l'ouvert $V \cap U_1$ est non vide. Il contient donc une boule fermée B_1 de rayon > 0 (qu'on peut supposer ≤ 1). Supposons $B_1, ..., B_n$ construites. Notons B'_n la boule ouverte associée. Alors l'ouvert $B'_n \cap U_{n+1}$ est non vide, il contient une boule fermée B_{n+1} de rayon > 0, et qu'on peut supposer $\leq \frac{1}{n+1}$. On a bien alors $B_{n+1} \subset B_n$ et $B_{n+1} \subset U_{n+1}$, ce qui montre que

$$B_{n+1} \subset V \cap \bigcap_{k=0}^{n+1} U_k$$

et achève la récurrence. On a de plus le rayon de B_n majoré par $\frac{1}{n}$, ce qui prouve que le diamètre du fermé B_n tend vers zéro. Le théorème 5.7 dit alors que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n$ est non vide, donc a fortiori $V \cap \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} U_n$ est non vide.

□

Corollaire 5.9 *Soit E un espace métrique complet. Alors, toute réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est une partie d'intérieure vide.*

Démonstration : Cela résulte du théorème de Baire, par passage au complémentaire.

□

Définition 5.10 On dit qu'un espace topologique X est *de Baire* si toute intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est une partie dense.

Le théorème de Baire dit donc qu'un espace métrique complet est de Baire.

Proposition 5.11 *Soit X un espace de Baire. Soit V un ouvert de X. Alors V est un espace de Baire.*

Démonstration : Soit (U_n) une suite d'ouverts denses de V. Comme V est ouvert dans X, ce sont aussi des ouverts de X et l'adhérence $\overline{U_n}$ de U_n dans X contient V, donc est égale à $\overline{V}$. Posons $U'_n = U_n \cup (X - \overline{V})$, alors U'_n est un ouvert dense de X (en effet l'adhérence de U'_n contient $\overline{U_n} = \overline{V}$ et $(X - \overline{V})$). Comme X est de Baire, l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U'_n$ est une partie dense de X. Cela signifie que $Y := (\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n) \cup (X - \overline{V})$ est une partie dense de X. Si maintenant U est un ouvert non vide de V, alors $U \cap Y \neq \emptyset$ vu que U est aussi un ouvert de X, mais comme U ne rencontre pas $(X - \overline{V})$ vu que $U \subset V$, ceci implique que $U \cap \bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n \neq \emptyset$. Ainsi $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$ est dense dans V. Finalement, V est bien un espace de Baire.

□

Corollaire 5.12 *a) Tout ouvert d'un espace métrique complet est de Baire.*

b) Soit X un espace de Baire. Soit (F_n) une suite de fermés de X telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$. Alors l'ouvert $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n^\circ$ est dense dans X.

Démonstration : a) résulte du théorème de Baire et de la proposition 5.11.

b) Soit V un ouvert non vide de X. Comme $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (F_n \cap V) = V$ et V est de Baire d'après loc. cit., l'un des fermés $(F_n \cap V)$ de V n'est pas d'intérieur vide (dans X ou V, cela revient au même car V est ouvert dans X). Ceci se traduit par le fait qu'il existe n avec $F_n^\circ \cap V \neq \emptyset$. Ainsi, V rencontre $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n^\circ$. Cec étant vrai pour tout ouvert non vide V de X, on obtient que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n^\circ$ est dense dans X.

□

6. Espaces topologiques compacts

La notion d'espace compact est une des plus fondamentales en topologie. Des analogues de cette notion interviennent d'ailleurs en algèbre et en géométrie algébrique.

6.1. Compacité via les recouvrements

Définition 6.1 Soit X un espace topologique. On dit que X est *compact* s'il est séparé, et s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

a) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe une sous-famille finie $(U_j)_{j\in J}$ telle que $X = \bigcup_{j\in J} U_j$ ("De tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini").

b) Pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ de X dont l'intersection est vide, il existe une sous-famille finie $(F_j)_{j\in J}$ dont l'intersection est vide.

Une partie A d'un espace topologique X est dite compacte si c'est un espace compact pour la topologie induite. Il revient au même de dire que si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe une sous-famille finie $(U_j)_{j\in J}$ telle que $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. Noter aussi que dans un espace compact, une intersection décroissante de fermés non vides est non vide via la caractérisation b).

L'équivalence de a) et b) est évidente par passage au complémentaire. Un espace qui vérifie a) et b) mais n'est pas supposé séparé est dit *quasi-compact*.

Exemple 6.2 a) Soit X un ensemble fini, muni de la topologie discrète. Alors X est compact (il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts).

b) La compacité (tout comme la connexité ou le fait d'être séparé) se conserve par homéomorphisme.

c) On verra au prochain paragraphe que les intervalles $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ sont compacts.

Theorème 6.3 *Soit X un espace topologique. Soit A une partie de X.*

a) Si X est séparé et A est compacte, alors A est fermée dans X.

b) Si X est compact et A est fermée dans X, alors A est compacte.

Démonstration : a) Soit $x \in X - A$. Comme X est séparé, il existe pour tout y de A des ouverts U_y et V_y de X tels que $y \in U_y$, $x \in V_y$, et $U_y \cap V_y = \emptyset$. Comme les U_y recouvrent A et A est compacte, il existe une famille finie $y_1, ..., y_r$ de points de A telle que les U_{y_i} recouvrent A. Posons alors $V = \bigcap_{i=1}^{r} V_{y_i}$, alors V est un ouvert de X qui contient x et ne rencontre pas A (vu qu'il ne rencontre aucun des U_{y_i}). Ainsi $V \subset (X - A)$ et $X - A$ est ouvert dans X, ce qui montre que A est un fermé de X.

b) On sait déjà que A est séparé. Soit F_i une famille de fermés de A telle que $\bigcap_i F_i = \emptyset$. Comme A est fermée dans X, les F_i sont aussi des fermés de X et comme X est compact, il existe une sous-famille finie des F_i dont l'intersection est vide. Ainsi, A est compacte.

□

Theorème 6.4 *Soit $f : X \to Y$ une application continue. Supposons Y séparé. Alors si A est une partie compacte de X, $f(A)$ est une partie compacte de Y.*

Démonstration : Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$. Alors les $f^{-1}(V_i)$ sont des ouverts de X (car f est continue) et ils recouvrent A : en effet, si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ donc $f(x)$ est dans l'un des V_i. On peut donc trouver une sous-famille finie $(f^{-1}(V_j))_{j \in J}$ qui recouvrent A vu que A est compact. Alors, la famille finie des (V_j) recouvre $f(A)$.

□

Corollaire 6.5 *Soit $f : X \to Y$ une application continue et bijective avec X compact et Y séparé. Alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration : Il suffit de montrer que l'image réciproque par f^{-1} d'un fermé de X est un fermé de Y, ou encore que l'image $f(A)$ d'un fermé A de X est un fermé de Y. Mais A est compact d'après le théorème 6.3 b), donc $f(A)$ est compact d'après le théorème 6.4. Le théorème 6.3 b) dit alors que $f(A)$ est un fermé de Y.

□

6.2. Espaces métriques compacts

Dans le cas des espaces métriques, on va voir qu'on dispose d'une caractérisation *séquentielle* (i.e. avec des suites) de la compacité.

Proposition 6.6 *Soit E un espace métrique compact. Alors, E est borné.*

Démonstration : L'espace E est recouvert par les boules $B(x, 1)$ avec $x \in E$. On en extrait un recouvrement fini par des $B(x_i, 1)$, $1 \leq i \leq r$. L'inégalité triangulaire montre alors que le diamètre de E est majoré par $2 + \max_{1 \leq i,j \leq r} d(x_i, x_j)$.

□

Définition 6.7 Soit E un espace métrique.

On dit que E est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de E par un nombre fini de boules ouvertes $B(x, \varepsilon)$.

Si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E, un *nombre de Lebesgue pour ce recouvrement* est un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subset U_i$.

Voici maintenant le théorème principal :

Theorème 6.8 *Soit E un espace métrique. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

i) E est compact.

ii) De toute suite (x_n) d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite convergente.

iii) E est précompact et tout recouvrement de E admet un nombre de Lebesgue $r > 0$.

Démonstration : i) $\Rightarrow$ ii) : d'après le théorème 2.17, il suffit de démontrer que toute suite (x_n) admet une valeur d'adhérence. Or, l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\bigcap_n \overline{X_n}$, où $X_n := \{x_k, k \geq n\}$. Les $\overline{X_n}$ forment une suite décroissante de fermés non vides de l'espace compact X, donc leur intersection ne peut pas être vide. [6]

ii) $\Rightarrow$ iii) : Soit $\varepsilon > 0$. Si E n'était pas recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε, on pourrait construire par récurrence une suite infinie $x_0, ..., x_n, ...$ telle que pour tout entier positif n, $x_{n+1} \notin \bigcup_{0 \leq k \leq n} B(x_k, \varepsilon)$. On obtient alors que $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ dès que $n > m$, d'où il ressort immédiatement qu'on ne peut extraire aucune suite de Cauchy (et donc aucune suite convergente) de (x_n). Ainsi, E est précompact.

Montrons maintenant par l'absurde que tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ admet un nombre de Lebesgue. Si ce n'était pas le cas, on aurait pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ un $y_n \in E$ tel que pour tout $i \in I$, $B(y_n, 1/n) \not\subset U_i$. Soit y une valeur d'adhérence de la suite (y_n), elle est dans l'un des U_i (appelons le U_k). Comme U_k est ouvert, il existe $\alpha > 0$ avec $B(y, \alpha) \subset U_k$. Comme y est une valeur d'adhérence de (y_n), on peut alors trouver $m > \frac{2}{\alpha}$ avec $y_m \in B(y, \alpha/2)$. Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient $B(y_m, \alpha/2) \subset B(y, \alpha)$, puis

$$B(y_m, 1/m) \subset B(y_m, \alpha/2) \subset B(y, \alpha) \subset U_k,$$

6. Le même argument montre que dans un espace topologique compact, toute suite admet une valeur d'adhérence, mais cela n'implique pas en général qu'on puisse toujours extraire une sous-suite convergente.

ce qui contredit l'hypothèse $B(y_m, 1/m) \not\subset U_k$.

iii) $\Rightarrow$ i) : Soit (U_i) un recouvrement ouvert de E, il admet un nombre de Lebesgue $r > 0$. Comme E est précompact, on peut recouvrir E par un nombre fini $B_1, ..., B_r$ de boules ouvertes de rayon r. Comme chacune de ces boules ouvertes est contenue dans l'un des U_i, on a a fortiori un nombre fini de U_i qui recouvent E, ce qui montre que E est compact.

□

On en déduit le très important résultat suivant (qu'on pourrait aussi retrouver avec les recouvrements, en utilisant l'axiome de la borne supérieure) :

Corollaire 6.9 *Une partie A de $\mathbf{R}$ est compacte si et seulement si elle est fermée dans $\mathbf{R}$ et bornée.*

Démonstration : Si A est compacte, elle est fermée et bornée en vertu du théorème 6.3 et de la proposition 6.6. Supposons réciproquement que A est fermée et bornée. Alors toute suite (x_n) d'éléments de A admet une sous-suite convergente dans $\mathbf{R}$ (Bolzano-Weierstrass), et la limite reste dans A vu que A est fermé dans $\mathbf{R}$. Ainsi A est compacte par le théorème 6.8.

□

Corollaire 6.10 *Soit E un espace métrique compact. Alors :*

a) E est complet.

b) Si une suite (x_n) dans E possède une unique valeur d'adhérence l, elle converge vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration : a) Soit (u_n) une suite de Cauchy dans E. Comme E est compact, elle admet une valeur d'adhérence, donc converge vers cette valeur d'adhérence d'après la proposition 1.15. Ainsi, E est complet.

b) Supposons par l'absurde que (x_n) ne converge pas vers l. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'une infinité de termes de la suite ne soient pas dans $B(l, \varepsilon)$, ce qui permet de construire une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ vérifiant $d(x_{\varphi(n)}, l) \geq \varepsilon$ pour tout n. Comme E est compact, cette suite extraite admet une valeur d'adhérence, qui est aussi valeur d'adhérence de (x_n), donc ne peut être que l d'après l'hypothèse. Mais ceci contredit $d(x_{\varphi(n)}, l) \geq \varepsilon$ pour tout n.

□

Exemple 6.11 a) Il y a des espaces métriques complets qui ne sont pas compacts (par exemple $\mathbf{R}$).

b) La deuxième assertion est fausse si E est seulement supposé complet et pas compact, par exemple la suite réelle définie par $x_n = 0$ si n est pair et

$x_n = n$ si n est impair n'a que 0 comme valeur d'adhérence, mais ne converge pas.

c) L'espace métrique $\overline{\mathbf{R}}$ est compact. En effet, on a vu qu'il était homéomorphe à $[-1, 1]$, qui est compact via le corollaire 6.9.

d) Si $f : A \to \mathbf{R}$ est une fonction continue sur un espace topologique compact, elle est bornée et atteint ses bornes vu que $f(A)$ est un compact de $\mathbf{R}$, donc est fermé et borné. Ceci s'applique par exemple si $A = [a, b]$ est un intervalle fermé de $\mathbf{R}$ (avec $a, b \in \mathbf{R}$).

Theorème 6.12 (Heine) *Soit E un espace métrique compact. Soit F un espace métrique. Alors toute application continue $f : E \to F$ est uniformément continue.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in E$, f est continue en x ; il existe donc une boule ouverte $B(x, \eta_x)$ telle que pour tout $y \in B(x, \eta_x)$, on ait $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Les ouverts $B_x := B(x, \eta_x/2)$ recouvrent le compact E, on en extrait un sous-recouvrement fini $B_{x_1}, ..., B_{x_r}$. On choisit alors

$$\eta = \frac{1}{3} \min_{1 \leq i \leq r} \eta_{x_i}.$$

Soient alors x, y dans E, montrons que si on a $d(x, y) \leq \eta$, alors on a $d(f(x), f(y)) \leq 2\varepsilon$. Il existe i tel que $x \in B_{x_i}$. Comme $d(x, y) \leq \eta < \eta_{x_i}/2$, on a $y \in B(x_i, \eta_{x_i})$. Via la définition des η_x, on a donc

$$d(f(x), f(x_i)) \leq \varepsilon; \; d(f(y), f(x_i)) \leq \varepsilon,$$

d'où finalement $d(f(x), f(y)) \leq 2\varepsilon$.

□

Proposition 6.13 *Si $E_1, ..., E_r$ sont des espaces métriques*[7] *compacts, l'espace produit $E = E_1 \times ... \times E_r$ est compact.*

Démonstration : Par récurrence, il suffit de traiter le cas $r = 2$. Soit $(u_n) = (x_n, y_n)$ une suite de points de E, alors la suite (x_n) (à valeurs dans le compact E_1) admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ (à valeurs dans le compact E_2) admet à son tour une sous-suite convergente $(y_{(\varphi \circ \psi)(n)})$. Posons $\theta = \varphi \circ \psi$, alors la suite $(u_{\theta(n)})$ est extraite de (u_n) et converge. On conclut avec le théorème 6.8.

□

7. Le résultat est vrai avec des espaces topologiques (pas forcément métriques), et même pour un produit infini, mais la preuve est plus compliquée.

Remarque 6.14 Le *procédé diagonal* permet de voir qu'un produit dénombrable $E = \prod_{k \in \mathbf{N}^*} E_k$ d'espaces métriques compacts (équipé de la métrique définie à la remarque 3.20) reste compact. Voici en quoi cela consiste. Si $X_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, ...)$ est une suite à valeurs dans E (avec $x_{k,n} \in E_k$ pour tout n), on extrait de $x_{1,n}$ une sous-suite convergente $x_{1,\varphi_1(n)}$. Puis de $x_{2,\varphi_1(n)}$, on extrait une sous-suite convergente $x_{2,\varphi_1(\varphi_2(n))}$ etc. On pose alors

$$\theta(n) = (\varphi_1 \circ \varphi_2 ... \circ \varphi_n)(n),$$

c'est une application strictement croissante de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$. On voit alors que pour k fixé, la suite $(x_{k,\theta(n)})_{n \geq k}$ est extraite de $x_{k,(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ ... \circ \varphi_k)(n)}$, laquelle est convergente par construction. Ainsi, toutes les suites $(x_{k,\theta(n)})$ convergent, ce qui montre que $(X_{\theta(n)})$ converge.

6.3. Espaces localement compacts

Définition 6.15 Un espace topologique X est dit *localement compact* s'il est séparé et si tout point x de X admet un voisinage compact.

Exemple 6.16 a) Tout ouvert U de $\mathbf{R}$ est localement compact car tout point a de U possède un voisinage du type $[a-r, a+r]$ (qui est compact) avec $r > 0$.

b) De même tout ouvert de $\mathbf{R}^n$ (muni de la norme sup) est localement compact, vu que les produits d'intervalles du type $[a, b]$ sont compacts via la proposition 6.13.

c) $\mathbf{Q}$ n'est pas localement compact. En effet, si $a \in \mathbf{Q}$ possèdait un voisinage compact $V \subset \mathbf{Q}$, ce voisinage compact contiendrait une partie du type $A = \mathbf{Q} \cap [a-r, a+r]$ avec $r > 0$, et on aurait donc $A = V \cap [a-r, a+r]$ compacte en tant que fermé du compact V. Or, $\mathbf{Q} \cap [a-r, a+r]$ n'est pas compact (car pas fermé dans $\mathbf{R}$).

d) Une partie fermée A d'un espace localement compact est localement compacte (en effet tout point a de A admet un voisinage compact V, et $V \cap A$ est alors un voisinage compact de a dans A).

e) On verra plus tard qu'un e.v.n. de dimension infinie n'est jamais localement compact, alors qu'il peut être complet. A contrario, $]0, 1[$ est localement compact mais pas complet.

Proposition 6.17 *Soit X un espace topologique localement compact. Alors tout point x de X a une base de voisinages compacts.*

Démonstration : Quitte à remplacer X par un voisinage compact de x, on peut supposer que X est compact. Soit U un ouvert de X contenant x. Alors la *frontière* $F := \overline{U} - U$ de $\overline{U}$ est un fermé de X, donc F est compact d'après le théorème 6.3 b). Comme X est séparé, on peut pour tout y de F trouver des ouverts U_y et V_y de X (avec $U_y \subset U$, quitte à remplacer U_y par $U_y \cap U$) tels que $x \in U_y, y \in V_y$ et $U_y \cap V_y = \emptyset$. Comme F est compact et recouvert par les V_y, il existe un recouvrement de F par un nombre fini $V_{y_1}, ..., V_{y_r}$ de ces ouverts. Posons alors $W = \bigcap_{i=1}^{r} U_{y_i}$, c'est un voisinage de x inclus dans U, et $\overline{W}$ est un voisinage compact (car fermé dans X) de x. De plus W ne rencontre aucun des V_{y_i} par construction, donc $\overline{W}$ ne rencontre pas F (sinon on on aurait un point y de F dans l'un des V_{y_i} avec $y \in \overline{W}$; comme V_{y_i} est ouvert il rencontrerait W). Finalement $\overline{W}$ est inclus dans $\overline{U}$ et ne rencontre pas F, d'où $\overline{W} \subset U$ comme on voulait.

□

Corollaire 6.18 *Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact.*

Démonstration : Soit U un ouvert d'un espace localement compact X. Soit $x \in U$, alors d'après la proposition précédente il existe un voisinage compact V de x dans X avec $V \subset U$, ce qui fait que V est un voisinage compact de x dans U.

□

Proposition 6.19 *Soit X un espace localement compact. Alors X est un espace de Baire.*

Démonstration (esquisse): C'est tout à fait similaire à la preuve du théorème de Baire (théorème 5.8) dans un espace métrique complet : si (U_n) est une suite d'ouverts denses de X et U un ouvert non vide de X, on construit par récurrence via la proposition 6.17 une suite décroissante (K_n) de compacts d'intérieurs non vides avec $K_n \subset U \cap U_1 \cap ... \cap U_n$. On a alors $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} K_n \neq \emptyset$, ce qui montre que $U \cap \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} U_n$ est également non vide.

□

6.4. Compacts de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$

Theorème 6.20 *Les parties compactes de $\mathbf{R}^n$ (muni de la topologie produit, ou encore de la norme sup) sont les fermés bornés.*

Démonstration : On sait déjà qu'une partie compacte de $\mathbf{R}^n$ est fermée et bornée (théorème 6.3 et proposition 6.6). Réciproquement, si A est une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^n$, c'est une partie fermée de $[-r, r]^n$ pour un certain $r > 0$, donc A est un fermé d'un compact via le corollaire 6.9 et la proposition 6.13. D'après le théorème 6.3, A est compact.

□

Corollaire 6.21 *Les parties compactes de $\mathbf{C}^n$ (muni de la topologie produit, ou encore de la norme sup) sont les fermés bornés.*

Démonstration : On commence par le cas $n = 1$. Identifions $\mathbf{C}$ au $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, alors la topologie usuelle de $\mathbf{C}$ est induite par la norme sup sur $\mathbf{R}^2$, et une partie bornée de $\mathbf{C}$ correspond à une partie bornée de $\mathbf{R}^2$ pour cette norme. Le résultat découle alors du théorème 6.20. Pour n quelconque, une partie fermée bornée A de $\mathbf{C}^n$ est une partie fermée de

$$D_r := \{(z_1, ...z_n) \in \mathbf{C}^n, \forall i \in \{1, ..., n\}, |z_i| \leq r\},$$

qui est compact comme produit de compacts. Ainsi A est compacte par le théorème 6.3. Réciproquement, une partie compacte de $\mathbf{C}^n$ est fermée dans $\mathbf{C}^n$ et bornée, comme on l'a déjà vu.

□

Theorème 6.22 *Toutes les normes sur $\mathbf{R}^n$ (resp. sur $\mathbf{C}^n$) sont équivalentes.*

Démonstration : Traitons le cas de $\mathbf{R}^n$ (le cas complexe est analogue). Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, notons $|| \; ||$ la norme sup sur $\mathbf{R}^n$. Soit N une norme quelconque sur $\mathbf{R}^n$, on va montrer qu'elle est équivalente à $|| \; ||$. On commence par un lemme :

Lemme 6.23 *L'application $N : (\mathbf{R}^n, || \; ||) \to \mathbf{R}_+$ est lipschitzienne (donc uniformément continue).*

Démonstration : Pour tous x, y de $\mathbf{R}^n$, on a

$$-N(x - y) \leq N(x) - N(y) \leq N(x - y)$$

via l'inégalité triangulaire et le fait que $N(z) = N(-z)$ pour tout z de E. Ainsi $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. Posons $C = \sup_{1 \leq i \leq n} N(e_i)$. Soit alors $z = z_1 e_1 + ... + z_n e_n$ dans $\mathbf{R}^n$, on a par définition $||z|| = \sup_{1 \leq i \leq n} |z_i|$, d'où

$$N(z) \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| N(e_i) \leq nC||z||.$$

On a ainsi
$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq nC||x - y||,$$
ce qui montre que N est C-lipschitzienne.

□

Reprenons la preuve du théorème 6.22. Soit S l'ensemble des x de $\mathbf{R}^n$ tels que $||x|| = 1$. C'est un fermé borné de $\mathbf{R}^n$ pour la norme sup, donc un compact d'après le théorème 6.20. D'après le lemme, l'application $N : S \to \mathbf{R}_+^*$ est continue (S étant muni de la topologie induite par la norme sup), donc elle est bornée et atteint ses bornes. Cela signifie en particulier qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que
$$\alpha \leq N(x) \leq \beta$$
pour tout x de S. En appliquant cela à $\frac{x}{||x||}$ pour tout x non nul de $\mathbf{R}^n$, on obtient
$$\alpha||x|| \leq N(x) \leq \beta||x||$$
pour tout x de E, ce qui signifie que les normes N et $|| \ ||$ sont équivalentes.

□

Corollaire 6.24 *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (resp. un $\mathbf{C}$-espace vectoriel) de dimension finie. Alors, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration : Soit u une application linéaire bijective de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) dans E. Alors, si N_1 et N_2 sont deux normes sur E, on observe que $x \mapsto N_1(u(x))$ et $x \mapsto N_1(u(x))$ sont deux normes sur $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$), elles sont donc équivalentes par le théorème 6.22. Comme u est bijective, tout y de E s'écrit $u(x)$ pour un certain x, et on a donc des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que
$$\alpha N_1(y) \leq N_2(y) \leq \beta N_1(y)$$
pour tout y de E, ce qui signifie que N_1 et N_2 sont équivalentes.

□

Corollaire 6.25 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie (sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).*

a) Les parties compactes de E sont les fermés bornés.

b) L'espace E est complet et localement compact.

Démonstration : Fixons une base $(e_1, ..., e_n)$ de E. D'après le corollaire 6.24, on peut supposer que E est muni de la norme sup associée à cette base. Munissons également K^n de la norme sup. Alors, l'application

$$u : K^n \to E, (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

est une bijection linéaire qui satisfait $||u(x)|| = ||x||$ pour tout x de K^n (en particulier, u est un homéomorphisme car u et u^{-1} sont 1-lipschitziennes). Le a) résulte alors du théorème 6.20 et du corollaire 6.21. Le b) est une conséquence de l'exemple 1.17 b) et de l'exemple 6.16 b).

□

Corollaire 6.26 *Soit E un e.v.n. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors, F est fermé dans E.*

Démonstration : En effet, le corollaire 6.25 b) dit que F est complet, il est donc fermé par la proposition 5.1 a).

□

Remarque 6.27 On verra dans le chapitre sur les e.v.n. que tous les résultats de ce paragraphe sont en général faux en dimension infinie : un fermé borné n'est pas forcément compact, il peut y avoir des normes qui ne sont pas équivalentes, et l'espace n'est pas forcément complet.

7. Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Nous avons déjà rencontré de nombreuses propriétés spécifiques des espaces vectoriels normés, notamment en dimension finie. Nous complétons cette étude dans cette section. La lettre K désigne toujours le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$, et E un K-espace vectoriel normé dont on note $|| \, ||$ la norme.

7.1. Applications linéaires et multilinéaires continues

Dans le cas des applications linéaires entre e.v.n., il est facile de caractériser la continuité :

Theorème 7.1 *Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux K-e.v.n. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) u est continue.

ii) u est continue en 0.

iii) u est bornée sur la boule unité fermée $B := B_f(0,1)$ (c'est-à-dire : il existe $M > 0$ tel que pour tout x de norme ≤ 1, $||u(x)|| \leq M$).

Démonstration : i) $\Rightarrow$ ii) : évident.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Comme u est continue en 0, il existe une boule fermée $B_f(0,r)$ avec $r > 0$ telle que pour tout x de $B_f(0,r)$, on ait $||u(x)|| \leq 1$. Si maintenant y est dans $B_f(0,1)$, alors ry est dans $B_f(0,r)$, donc $||u(ry)|| \leq 1$, ce qui donne $||u(y)|| \leq 1/r$. Ainsi u est bornée par $1/r$ sur la boule unité B.

iii) $\Rightarrow$ i) : Soient x, y dans E avec $x \neq y$, alors $\frac{(x-y)}{||x-y||}$ est dans $B_f(0,1)$, d'où

$$||u(\frac{(x-y)}{||x-y||})|| \leq M.$$

Ainsi $||u(x)-u(y)|| \leq M||x-y||$ (et c'est encore vrai si $x = y$), ce qui montre que u est M-lipschitzienne, donc uniformément continue.

□

Remarque 7.2 On a montré au passage qu'une application linéaire continue était automatiquement uniformément continue, et même lipschitzienne. La preuve donne aussi qu'il est suffisant d'avoir u bornée sur la sphère unité (constituée des éléments de E de norme 1) pour avoir u continue.

Corollaire 7.3 *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $u : E \to F$ est continue.*

Démonstration : Fixons une base $(e_1, ..., e_n)$ de E. Comme toutes les normes sur E sont équivalentes (théorème 6.22), on peut supposer que E est muni de la norme sup associée à cette base, i.e.

$$||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i|| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|.$$

Soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ dans la boule unité de E, on a $|\alpha_i| \leq 1$ pour tout i, d'où :

$$||u(x)|| = ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(e_i)|| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| ||u(e_i)|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||u(e_i)||.$$

Ainsi u est bornée par $M := \sum_{i=1}^{n} ||u(e_i)||$ sur la boule unité, donc u est continue d'après le théorème 7.1.

□

Exemple 7.4 a) Munissons l'espace vectoriel E des fonctions continues de E dans $\mathbf{R}$ de la norme $||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ (qui est bien définie vu que $[0,1]$ est compact). Alors l'application linéaire $f \mapsto f(0)$ de E dans $\mathbf{R}$ est continue, car elle est clairement bornée par 1 sur la boule unité.

b) Munissons maintenant E de la norme $||f|| = \int_0^1 |f|$. Alors l'application linéaire $u : f \mapsto f(0)$ n'est pas continue pour cette norme. Soit en effet la suite (f_n) d'éléments de E définie par $f_n(x) = e^{-nx}$. Alors

$$\int_0^1 |f_n(x)|dx = [-\frac{e^{-nx}}{n}]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n},$$

ce qui montre que la suite (f_n) converge vers 0 dans E, alors que $f_n(0) = 1$ ne converge pas vers 0. On voit au passage qu'il peut y avoir des normes non équivalentes sur un espace vectoriel de dimension infinie. Ici nf_n est de norme ≤ 1, mais son image par u est n, on vérifie donc bien que u n'est pas bornée sur la boule unité.

c) Sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels muni de la norme $||\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n|| = \max_{n\in\mathbf{N}} |a_n|$, l'application $u : P \mapsto P'$ n'est pas continue car le polynôme dérivé de X^n (qui est de norme 1) est nX^n (dont la norme est n), ce qui fait que u n'est pas bornée sur la boule unité.

d) Si deux normes N_1 et N_2 induisent la même topologie sur un e.v.n., elles sont équivalentes (et réciproquement bien sûr) : en effet, cela signifie que l'identité de (E, N_1) vers (E, N_2) est bicontinue, mais alors cette application et sa réciproque sont lipschitziennes (car linéaires), donc N_1 et N_2 sont équivalentes.

Proposition 7.5 *Soient E et F deux e.v.n. Notons $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel normé pour*

$$||u|| := \sup_{x\in B_f(0,1)} ||u(x)||.$$

De plus, si E, F, G sont des e.v.n., $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on a

$$||v \circ u|| \leq ||v||.||u||.$$

Noter que comme une application linéaire continue est toujours bornée sur $B_f(0,1)$, la définition de $||u||$ a bien un sens. On observera aussi que par définition $||u(x)|| \leq ||u||.||x||$, et $||u||$ est le plus petit réel positif qui a cette propriété.

Démonstration : Le fait que $\mathcal{L}(E, F)$ soit un sous-espace vectoriel de l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est une conséquence immédiate du théorème 7.1 (par exemple avec le critère iii) ; on peut aussi appliquer la remarque qui suit le théorème 3.15). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $||f|| = 0$ si et seulement si $f = 0$ car si une application linéaire est nulle sur la boule unité, elle est nulle partout (la boule unité engendrant E comme K-espace vectoriel, vu que pour tout vecteur non nul x, le vecteur $\frac{x}{||x||}$ est de norme 1). Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha \in K$, on a immédiatement que $||\alpha f|| = |\alpha|.||f||$, vu que $||\alpha f(x)|| = |\alpha|.||f(x)||$ pour tout x de E. Soient enfin f, g dans $\mathcal{L}(E, F)$. Comme pour tout $x \in B_f(0, 1)$ on a :

$$||(f + g)(x)|| \leq ||f(x)|| + ||g(x)|| \leq ||f|| + ||g||,$$

on a en passant au sup sur x : $||(f + g)|| \leq ||f|| + ||g||$. Ainsi, $||\ ||$ est bien une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Si maintenant $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on a pour tout x de $B_f(0, 1)$:

$$||(v \circ u)(x)|| = ||v(u(x))|| \leq ||v||.||u(x)|| \leq ||v||.||u||.||x||,$$

d'où l'inégalité $||v \circ u|| \leq ||v||.||u||$ en passant au sup.

□

On a l'analogue du théorème 7.1 pour les applications multilinéaires. Rappelons que si $E_1, ..., E_n, F$ sont des espaces vectoriels, une application $f : \prod_{i=1}^n E_i \to F$ est *n-linéaire* si pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et tout $(x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$, l'application

$$x \mapsto f(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n)$$

est linéaire de E_i dans F.

Theorème 7.6 *Soient $E_1, ..., E_n, F$ des e.v.n. Soit $f : \prod_{i=1}^n E_i \to F$ une application n-linéaire. On munit $\prod_{i=1}^n E_i$ de la topologie produit. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f est continue.

ii) f est continue en 0.

iii) f est bornée sur le produit $\prod_{i=1}^n B_i$ des boules unité fermées de E_i.

Démonstration : Notons déjà que la topologie produit sur $\prod_{i=1}^n E_i$ est induite par la norme $||(x_1, ..., x_n)|| = \sup_{1 \leq i \leq n} ||x_i||$.

i) $\Rightarrow$ ii) est clair.

Supposons ii). Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ dans $\prod_{i=1}^n B_{i,f}(0, r)$, on ait $||f(x)|| \leq 1$. On a alors pour tout y de $\prod_{i=1}^n B_{i,f}(0, 1)$:

$$||f(y)|| \leq 1/r^n,$$

vu que $ry \in \prod_{i=1}^n B_{i,f}(0, r)$. On a donc bien iii).

Supposons iii). Supposons f bornée par $M > 0$ sur $\prod_{i=1}^n B_i$. On a alors, par n-linéarité de f :

$$||f(x_1, ..., x_n)|| \leq M||x_1||...||x_n||$$

pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\prod_{i=1}^n E_i$. Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ dans $\prod_{i=1}^n E_i$, montrons que f est continue en a. Posons $x = (x_1, ..., x_n)$, on observe que $f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n \Delta_i$, où

$$\Delta_i = f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_i, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Par n-linéarité et définition de la constante M, on a

$$||\Delta_i|| \leq M||a_1||.||a_2||...||a_{i-1}||.||x_i - a_i||...||x_{i+1}||...||x_n||.$$

Soit $\varepsilon > 0$, qu'on peut supposer ≤ 1. Soit $D = \max_{1 \leq i \leq n} ||a_i||$. Alors, si $||x_i - a_i|| \leq \varepsilon$ pour tout i, on a en particulier $||x_i|| \leq D + 1$, d'où

$$||\Delta_i|| \leq M(D + 1)^{n-1}\varepsilon,$$

et donc

$$||f(x) - f(a)|| \leq nM(D + 1)^{n-1}\varepsilon.$$

Cela montre que f est continue en a.

□

Corollaire 7.7 *Si les espaces E_i sont de dimension finie, alors toute application n-linéaire sur $\prod_{i=1}^n E_i$ est continue.*

Démonstration : On vérifie de façon tout à fait similaire à la preuve du corollaire 7.3 qu'une telle application est bornée sur le produit $\prod_{i=1}^n B_i$ des boules unité.

□

Corollaire 7.8 *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, les applications $(x, y) \mapsto x+y$ et $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ sont des applications continues, respectivement sur $E \times E$ et sur $K \times E$.*

Démonstration : Ces applications sont respectivement linéaires et bilinéaires. Munissons $E \times E$ et $K \times E$ de la norme sup associée aux normes sur E et sur K. Comme

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \leq 2||(x, y)||; \ ||\alpha x|| = |\alpha|||x||,$$

ces applications sont continues via les théorèmes 7.1 et 7.6.

□

Remarque 7.9 Contrairement au cas d'une application linéaire, on n'a pas ici la continuité uniforme d'une application multilinéaire.

On termine ce paragraphe par le classique :

Theorème 7.10 (Riesz) *Soit E un e.v.n. (sur* **R** *ou* **C***). Alors la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration : On sait déjà que si E est de dimension finie, alors $B_f(0, 1)$ (qui est fermée et bornée) est compacte d'après le corollaire 6.25. Supposons réciproquement $B_f(0, 1)$ compacte, on peut alors la recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes $B(a_i, 1/2)$ (avec $1 \leq i \leq n$). Soit F l'espace vectoriel engendré par les a_i, il est fermé d'après le corollaire 6.26.

Montrons par l'absurde que $E = F$. S'il existe $x \in E$ avec $x \notin F$, alors comme $E - F$ est ouvert on a $d(x, F) = \alpha > 0$, et par définition de $d(x, F)$ on peut alors trouver $y \in F$ avec

$$||x - y|| \leq \frac{3}{2}\alpha.$$

Soit alors $z = \frac{x-y}{||x-y||}$, il est de norme 1, d'où l'existence d'un $i \in \{1, ..., r\}$ tel que

$$||\frac{x - y}{||x - y||} - a_i|| \leq 1/2,$$

ce qui implique

$$||x - y - ||x - y||.a_i|| \leq \frac{3\alpha}{4}.$$

Ceci contredit $d(x, F) = \alpha > \frac{3\alpha}{4}$, car $y + ||x - y||a_i \in F$.

□

Corollaire 7.11 *Un e.v.n. est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie.*

Démonstration : On sait déjà qu'un e.v.n. de dimension finie est localement compact, via le corollaire 6.25. Si maintenant E est un e.v.n. localement compact, alors 0 admet un voisinage compact V ; ce voisinage contient une boule fermée de centre 0, soit $B_f(0, r)$, qui est compacte car fermée dans le compact V. Par homothétie, la boule unité fermée est compacte, et donc E est de dimension finie via le théorème de Riesz.

□

7.2. Espaces de Banach

Définition 7.12 On dit qu'un espace vectoriel normé (sur **R** ou **C**) est un *espace de Banach* s'il est complet pour la distance induite par sa norme.

Par exemple, tout e.v.n. de dimension finie est de Banach d'après le corollaire 6.25. Le théorème suivant fournit une autre famille d'exemples :

Theorème 7.13 *Soit E un e.v.n. Soit F un espace de Banach (par exemple un e.v.n. de dimension finie). Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$, muni de la norme $||u|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||$, est un espace de Banach.*

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. On observe d'abord que pour x fixé, la suite $(u_n(x))$ d'éléments de F est de Cauchy : soit en effet $\varepsilon > 0$; alors il existe $N > 0$ tels que pour $n \geq N$ et $p > 0$, on ait $||u_{n+p} - u_n|| \leq \varepsilon$, ce qui implique $||u_{n+p}(x) - u_n(x)|| \leq \varepsilon ||x||$. Posons $u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$, il est clair via le corollaire 7.8 que l'application $x \mapsto u(x)$ est linéaire de E dans F ; il reste à montrer que u est continue et (u_n) converge vers u dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Soit $x \in E$ avec $||x|| \leq 1$. Avec les notations ci-dessus, on a, pour $n \geq N$ et $p > 0$:

$$||u_{n+p}(x) - u_n(x)|| \leq \varepsilon ||x|| \leq \varepsilon.$$

Pour n et x fixés, faisons tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$||u(x) - u_n(x)|| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout x de norme ≤ 1, il vient que u est continue (car bornée sur la boule unité) et pour $n \geq N$, on a $||u - u_n|| \leq \varepsilon$, ce qui montre que la suite (u_n) converge vers u dans $\mathcal{L}(E, F)$.

□

Remarque 7.14 Le même type de preuve donne que si F est un espace de Banach et X un espace topologique compact, l'espace vectoriel des fonctions continues de X dans F, muni de la norme $||f|| = \sup_{x\in X} ||f(x)||$, est un espace de Banach. De même pour l'espace des fonctions bornées, ou encore continues et bornées, d'un espace métrique dans un espace de Banach, en prenant toujours comme norme la norme sup.

A contrario :

Proposition 7.15 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Supposons que E admette une base dénombrable (e_n) en tant qu'espace vectoriel (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Alors, E n'est pas complet.*

Démonstration : Supposons E complet. Soit E_n le sous-espace de E engendré par $e_1, ..., e_n$. Alors E_n est de dimension finie, donc complet, donc fermé dans E. Comme $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} E_n = E$ puisque E est engendré par $(e_n)_{n\in\mathbf{N}*}$, le théorème de Baire (corollaire 5.9) dit que l'un des E_n est d'intérieur non vide. Mais ceci est impossible car E_n (qui est de dimension finie) est un sous-espace strict de E et on dispose du lemme suivant :

Lemme 7.16 *Soit E un e.v.n. Alors si un sous-espace vectoriel F de E est d'intérieur non vide, il est égal à E.*

Pour montrer le lemme, on observe que si $a \in F$ est un point intérieur, alors F contient une boule fermée $B_f(a, r)$ avec $r > 0$, puis $B_f(0, 1)$ en appliquant une homothétie-translation. Comme tout vecteur non nul x de E est produit du vecteur $\frac{x}{||x||}$ (qui est de norme 1) par le scalaire $||x||$, ceci implique que $x \in F$. Finalement $F = E$.

□

Proposition 7.17 *Soit E un espace de Banach. Alors toute série $\sum x_n$ qui est absolument convergente (i.e. telle que $\sum ||x_n||$ converge) est convergente.*

Démonstration : Soit $S_n := \sum_{k=0}^n x_k$ la suite des sommes partielles. Soit $\varepsilon > 0$, alors comme $\sum ||x_n||$ est convergente, sa suite des sommes partielles (S'_n) est de Cauchy ; il existe donc $N > 0$ tels que pour $m, n \geq N$ avec par exemple $m > n$, on ait $\sum_{k=m}^n ||x_k|| \leq \varepsilon$, d'où

$$||S_n - S_m|| = ||\sum_{k=m}^{n} x_k|| \leq \sum_{k=m}^{n} ||x_k|| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite (S_n) est de Cauchy, et donc est convergente puisque E est complet.

□

Le théorème suivant, fondamental en analyse fonctionnelle, est nettement plus difficile.

Theorème 7.18 ("de l'application ouverte") *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $u : E \to F$ une application linéaire, continue, et surjective. Alors u est une application ouverte.*

Démonstration : On aura besoin de deux lemmes.

Lemme 7.19 *Il existe des réels strictement positifs η et M tels que tout $y \in F$ vérifiant $||y|| \leq \eta$ soit limite d'une suite $(u(x_n))$, où x_n est un élément de E vérifiant $||x_n|| \leq M$.*

Démonstration : Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, notons A_k l'ensemble des $u(x)$ pour $x \in E$ et $||x|| \leq k$. Comme $\bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} A_k = F$, on a a fortiori $\bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} \overline{A_k} = F$. L'espace F étant complet, on peut lui appliquer le théorème de Baire (plus précisément le corollaire 5.9) pour en déduire que l'un des fermés $\overline{A_k}$ de F est d'intérieur non vide. On a donc une boule fermée $B(y_0, \eta)$ (avec $\eta > 0$) contenue dans $\overline{A}_k$ pour un certain k. Comme y_0 est dans $\overline{A}_k$, il est limite d'une suite d'éléments de A_k, qu'on peut écrire $u(z_n)$ avec $||z_n|| \leq k$. Soit alors y dans F de norme $\leq \eta$. Comme $y+y_0$ est encore dans $B(y_0, \eta)$, on peut aussi écrire $(y + y_0)$ comme limite d'une suite $u(z'_n)$ d'élements de A_k, avec $||z'_n|| \leq k$. Posons $x_n = z'_n - z_n$. Alors (x_n) converge vers y et $||x_n|| \leq 2k$. Il suffit alors de poser $M = 2k$.

Lemme 7.20 *Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in F$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ vérifiant*

$$||x|| \leq \frac{1}{\delta}||y||;\ ||y - u(x)|| \leq \varepsilon.$$

Démonstration : Soient y non nul dans F et $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\eta}{||y||}y$ est de norme η, on peut donc lui appliquer le lemme 7.19 et écrire $\frac{\eta}{||y||}y$ comme limite d'une suite $(u(x_n))$ avec $||x_n|| \leq M$. En particulier, on peut trouver un terme $u(z)$ de cette suite tel que $||\frac{\eta}{||y||}y - u(z)|| \leq \frac{\eta}{||y||}\varepsilon$ et $||z|| \leq M$. Posons alors $x = \frac{||y||}{\eta}z$, on obtient $||y - u(x)|| \leq \varepsilon$ et $||x|| \leq \frac{M}{\eta}||y||$, d'où le résultat en posant $\delta = \eta/M$.

□

Reprenons la preuve du théorème. On va montrer que pour tout y de F avec $||y|| < \delta$, il existe $x \in E$ avec $||x|| \leq 2$ et $y = u(x)$. Ceci implique que l'image de la boule ouverte $B(0,4)$ par u contient la boule ouverte $B(0,\delta)$. Si alors U est un ouvert de E et $y' = f(x')$ avec $x' \in U$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x', 4r) \subset U$ et par homothétie-translation, on voit que $f(U)$ contient alors $B(y', \delta r)$; ainsi $f(U)$ est ouvert.

Soit donc y dans F avec $||y|| < \delta$. On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'éléments de E avec $||x_1|| < 1$, vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$||y - \sum_{k=1}^{n} u(x_k)|| \leq 2^{-n}\delta;\ \ ||x_{n+1}|| \leq 2^{-n}.$$

On obtient x_1 en appliquant le lemme 7.20 avec $\varepsilon = \delta/2$. Supposons $x_1, ..., x_n$ construits, alors on réapplique le lemme à $y - \sum_{k=1}^{n} u(x_k)$ en prenant $\varepsilon = \delta/2^{n+1}$. Maintenant, la série $\sum x_n$ est absolument convergente, donc converge vers un $x \in E$ d'après la proposition 7.17. En passant à la limite, on obtient (en utilisant la continuité de u) que $y = u(x)$ et $||x|| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 2$.

□

Corollaire 7.21 *Si $u : E \to F$ est une application bijective, linéaire, et continue entre deux espaces de Banach, alors la réciproque u^{-1} est également continue.*

Démonstration : D'après le théorème de l'application ouverte, l'image réciproque d'un ouvert de E par u^{-1} est un ouvert, donc u^{-1} est continue.

□

Ce résultat est faux si les espaces ne sont pas supposés complets. Si par exemple on munit $E = \mathbf{R}[X]$ de la norme $|| \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n X^n|| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n|$, l'application qui envoie un polynôme $P = \sum a_n X^n$ sur $\sum \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$ est bijective continue de E dans l'espace F des polynômes qui s'annulent en zéro, mais la réciproque $P \mapsto P'$ n'est pas continue.

Corollaire 7.22 ("Théorème du graphe fermé") *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Si le graphe de u est un fermé de $E \times F$, alors u est continue.*

Noter que réciproquement, si u est continue, alors le graphe de u est fermé comme image réciproque de 0 par l'application continue $(x, y) \mapsto f(x) - y$ de $E \times F$ dans F.

Démonstration : Soit G le graphe de u, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach $E \times F$ (muni de la norme $||(x, y)|| = \max(||x||, ||y||)$, qui induit bien la topologie produit sur $E \times F$). Soient $p : G \to E$ et $q : G \to F$ les restrictions à G des projections (qui sont continues). Alors, p est bijective par définition de G et $u = q \circ p^{-1}$. Si G est fermé, il est complet comme fermé de l'espace complet $E \times F$. D'après le corollaire 7.21, p^{-1} est continue de E dans G, donc u est continue comme composée de deux applications continues.

□

On conclut cette partie par un autre théorème important en analyse fonctionnelle, reposant sur le théorème de Baire :

Theorème 7.23 (Banach-Steinhaus) *Soit E un espace de Banach. Soit F un e.v.n. Soit A une partie de $\mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout x de E, le sous-ensemble $\{f(x), f \in A\}$ soit une partie bornée de F. Alors A est une partie bornée de $\mathcal{L}(E, F)$ (pour la norme associée aux normes de E et F).*

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons

$$A_n = \{x \in E, \forall f \in A, ||f(x)|| \leq n.$$

Les A_n sont des fermés de E comme intersection de fermés, et par hypothèse on a $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A_n = E$. Comme E est complet, le corollaire 5.9 du théorème de Baire s'applique et donne qu'il existe un $n \in \mathbf{N}^*$ tel que A_n soit d'intérieur non vide. Alors, A_n contient une boule fermée $B_f(a, r)$ avec $r > 0$. Ainsi, pour tout x de E tel que $||x - a|| \leq r$, on a $||f(x)|| \leq n$ pour tout $f \in A$. Si maintenant $x \in E$ est de norme au plus 1, alors $(a + rx) \in B_f(a, r)$, d'où pour tout $f \in A$: $||f(a + rx)|| \leq n$, soit

$$||f(x)|| = ||\frac{1}{r}(f(a + rx) - f(a))|| \leq \frac{1}{r}(||f(a)|| + n).$$

Posons $M = \sup_{f \in A} f(a)$, alors $M < +\infty$ par hypothèse, d'où finalement $||f|| \leq \frac{1}{r}(||M|| + n)$ pour tout $f \in A$.

□

7.3. Espaces de Hilbert

Définition 7.24 Un *espace préhilbertien* réel (respectivement complexe) E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (resp. un $\mathbf{C}$-espace vectoriel) muni d'un produit scalaire euclidien (resp. hermitien).

On notera en général $\langle x,y\rangle$ le produit scalaire de deux éléments x,y de E. Un tel espace est ipso facto un e.v.n. pour la norme $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ (le fait que ce soit une norme résulte de la classique inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x,y\rangle| \leq ||x||.||y||$). De plus, si $x \in E$, alors l'application $\varphi_x : y \mapsto \langle x,y\rangle$ est linéaire et continue (en effet $||\varphi_x(y)|| \leq ||x||.||y||$) de E dans E.

Exemple 7.25 a) $\mathbf{R}^n$ est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire canonique :

$$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

De même $\mathbf{C}^n$ est un espace préhilbertien complexe pour

$$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i,$$

où on a dans les deux cas posé $x = (x_1,...,x_n)$ et $y = (y_1,...,y_n)$.

b) L'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ est un espace préhilbertien pour

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

De même en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$ et $f(t)$ par $\overline{f(t)}$.

c) Pour $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, soit l^2 l'espace vectoriel des suites (x_n) d'éléments de K telles que $\sum |x_n|^2$ converge. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne que c'est bien un espace vectoriel et que pour (x_n), (y_n) dans l^2, la série $\sum \bar{x}_n y_n$ converge absolument, ce qui permet de faire de l^2 un espace préhilbertien via le produit scalaire

$$\langle (x_n),(y_n)\rangle := \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{x}_n y_n.$$

Si A est une partie d'un espace préhilbertien E, on note

$$A^{\perp} := \{x \in E, \forall y \in A, \langle y,x\rangle = 0\}$$

l'orthogonal de A. C'est un sous-espace vectoriel fermé de E (comme intersection de fermés), et si $A \subset B$, on a $A^{\perp} \supset B^{\perp}$. De plus $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ car le produit scalaire est défini positif.

Définition 7.26 Un espace de Hilbert (sur $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$) est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée à son produit scalaire.

Exemple 7.27 a) Un espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert, d'après le corollaire 6.25.

b) L'espace l^2 est un espace de Hilbert. La preuve est tout à fait similaire à celle du théorème 7.13 (cf. aussi remarque 7.14).

Le théorème suivant est fondamental dans l'étude des espaces de Hilbert :

Theorème 7.28 *Soit E un espace de Hilbert. Soit C une partie fermée, convexe, non vide de E. Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y_0 \in C$ tel que $d(x, C) = ||x - y_0||$. De plus, la partie réelle de $\langle x - y_0, y - y_0 \rangle$ est ≤ 0 pour tout $y \in C$.*

On dit que y_0 est la *projection de x sur C*. La preuve va montrer qu'il suffit en fait de supposer C complet pour la topologie induite par celle de E, mais les applications sont le plus souvent dans le cas E complet.

Démonstration : Posons $d = d(x, C)$. Par définition de d, il existe une suite (y_n) de points de C telle que $d \leq d(y_n, x) \leq d + 1/n$.

Lemme 7.29 *La suite (y_n) est de Cauchy.*

Démonstration : Soient $m, n \in \mathbf{N}^*$. On utilise la "formule de la médiane" :

$$||y_n - x||^2 + ||y_m - x||^2 = 2||\frac{y_n + y_m}{2} - x||^2 + \frac{||y_n - y_m||^2}{2}.$$

Comme C est convexe, on a $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$, d'où $||\frac{y_n+y_m}{2} - x|| \geq d$. Ainsi

$$\frac{||y_n - y_m||^2}{2} \leq (d + 1/n)^2 + (d + 1/m)^2 - 2d^2,$$

ce qui montre que (y_n) est de Cauchy vu que le membre de droite tend vers 0 quand m et n tendent vers $+\infty$.

□

Comme E est complet, on sait alors que (y_n) a une limite y_0, qui reste dans C vu que C est fermé. En passant à la limite dans l'inégalité

$$d \leq d(y_n, x) \leq d + 1/n,$$

on obtient bien $d(x, y_0) = d = d(x, C)$.

Montrons maintenant l'unicité d'un tel y_0. Si w_0 est dans C et vérifie $d(x, w_0) = d$, on applique à nouveau la formule de la médiane en notant $z_0 = (y_0 + w_0)/2$:

$$2d^2 = ||y_0 - x||^2 + ||w_0 - x||^2 = 2||x - z_0||^2 + \frac{||y_0 - w_0||^2}{2},$$

ce qui donne, vu que $z_0 \in C$ (donc $||x - z_0|| \geq d$), que $||y_0 - w_0||^2 \leq 0$, soit $y_0 = w_0$.

Soit enfin $y \in C$ et $t \in [0, 1]$. Comme C est convexe, on a $y_0+t(y-y_0) \in C$, d'où $||y_0 + t(y - y_0) - x||^2 \geq d^2$. Ceci implique que la fonction (définie sur $[0, 1]$)

$$\varphi(t) := ||y_0+t(y-y_0)-x||^2 = ||y_0-x||^2+2t\mathrm{Re}(\langle y_0-x, y-y_0\rangle)+t^2||y_0-x||^2$$

admet un minimum en $t = 0$, ce qui implique que sa dérivée à droite en zéro $2\mathrm{Re}(\langle y_0 - x, y - y_0\rangle)$ soit positive ou nulle.

□

Corollaire 7.30 *Soiti E un espace de Hilbert sur K. Soit F un sous-espace fermé de E. Alors, $E = F \bigoplus F^\perp$.*

Démonstration : On sait déjà que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Soit $x \in E$, alors F est une partie convexe et fermée de E, on peut donc lui associer la projection y_0 de x sur F. Pour tout $\alpha \in K$ et tout $y \in F$, on a $(y_0 + \alpha y) \in F$, d'où $\mathrm{Re}(\langle x - y_0, \alpha y\rangle) \leq 0$. Prenons $\bar{\alpha} = \langle x - y_0, y\rangle$, on obtient $\bar{\alpha}\alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$. Finalement $(x-y_0) \in F^\perp$, ce qui montre que $E = F + F^\perp$ en écrivant $x = y_0 + (x - y_0)$.

□

Corollaire 7.31 *Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$. Le sous-espace F est dense dans E si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Démonstration : On a clairement $F \subset (F^\perp)^\perp$, et par ailleurs $(F^\perp)^\perp$ (qui est un orthogonal) est fermée, d'où $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$. Par ailleurs, on observe que

$$\overline{F}^\perp \cap (F^\perp)^\perp \subset \overline{F}^\perp \cap ((\overline{F})^\perp)^\perp = \{0\}.$$

Du coup, en écrivant $E = \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp$ via le corollaire 7.30, on obtient l'inclusion réciproque $(F^\perp)^\perp \subset \overline{F}$.

Si F est dense dans E, alors la formule donne que tous les éléments de E sont orthogonaux à $F^\perp$, d'où $F^\perp = \{0\}$ puisque le produit scalaire est défini positif. Réciproquement, si $F^\perp = \{0\}$, la formule donne que $\overline{F}$ est l'orthogonal de $\{0\}$, soit $\overline{F} = E$.

□

Theorème 7.32 *Soit E un espace de Hilbert. On note $E' = \mathcal{L}(E, K)$ le dual topologique de E, i.e. l'e.v.n. des formes linéaires continues sur E. Alors l'application Φ de E dans E' qui envoie x sur la forme linéaire $\varphi_x : y \mapsto \langle x, y\rangle$ est une bijection isométrique et semi-linéaire (resp. linéaire si $K = \mathbf{R}$).*

Démonstration : Il est immédiat que Φ est semi-linéaire. On a d'autre part

$$||\Phi(x)(y)|| \leq ||x||.||y||,$$

ce qui montre que $||\Phi(x)|| \leq ||x||$; si $x \neq 0$, on a en prenant $y = x$: $||\Phi(x)(y)|| = ||x||.||y||$, ce qui montre que $||\Phi(x)|| \geq ||x||$ (et c'est encore valable pour $x = 0$), ainsi Φ est isométrique (ceci vaut sans l'hypothèse que E est complet).

Montrons la surjectivité de Φ. Soit f une forme linéaire continue sur E (qu'on peut supposer non nulle) ; notons F son noyau, qui est un hyperplan fermé de E. Alors $E = F \oplus F^\perp$ (corollaire 7.30). Choisissons un vecteur non nul a de $F^\perp$, on a donc $E = F \oplus Ka$. La forme linéaire $\Phi(a)$ est nulle sur F, posons alors $\lambda = \frac{f(a)}{\Phi(a)}$, alors f et $\lambda\Phi(a)$ coincident sur F et sur a, elles sont donc égales, ce qui montre que $f = \Phi(\bar{\lambda}a)$ est surjective.

□

Noter que si E n'est pas complet, l'isométrie Φ ne peut pas être bijective, puisqu'on sait que E' est complet via le théorème 7.13.

Theorème 7.33 *Soit E un espace de Hilbert. Soit $u : E \to E$ une application linéaire continue. Alors il existe une unique application linéaire continue $u^* : E \to E$ vérifiant :*

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

pour tous x, y de H. On dit que u est l'adjoint de u. On a de plus $(u^*)^* = u$ et $||u^*|| = ||u||$.

Démonstration : L'unicité vient de ce que si $v, w \in \mathcal{L}(E)$ vérifient $\langle x, v(y)\rangle = \langle x, w(y)\rangle$ pour tous $x, y \in E$, alors en particulier

$$\langle (v - w)(y), (v - w)(y)\rangle = 0$$

pour tout $y \in E$, ce qui montre que $v(y) = w(y)$ puisque le produit scalaire est défini positif.

Pour l'existence, on utilise la bijection semi-linéaire $\Phi : E \to E'$ du théorème 7.32. Soit ${}^t u : E' \to E'$ l'endomorphisme transposé de u (rappelons que ${}^t u$ est défini par ${}^t u(f) = f \circ u$ pour tout $f \in E'$), posons $u^* = \Phi^{-1} \circ {}^t u \circ \Phi$. Il est clair que $u^* \in \mathcal{L}(E)$. De plus, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle u^*(x), y\rangle = [\Phi(\Phi^{-1} \circ^t u \circ \Phi)(x)](y) = [{}^t u(\Phi(x)](y) =$$

$$[\Phi(x)](u(y)) = \langle x, u(y)\rangle,$$

ce qui montre que u^* vérifie bien la propriété voulue. L'égalité $(u^*)^* = u$ est alors immédiate par symétrie. Pour tout x de norme 1, on a :

$$||u^*(x)||^2 = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \langle x, u(u^*(x))\rangle \leq ||u||.||u^*||,$$

d'où $||u^*||^2 \leq ||u||.||u^*||$ et finalement $||u^*|| \leq ||u||$. Par symétrie, on obtient $||u^*|| = ||u||$.

□

Proposition 7.34 *Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$, on a :*

$$(u + v)^* = (u + v)^*;\ (\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*;\ (uv)^* = v^* u^*.$$

Démonstration : C'est immédiat via la caractérisation de l'adjoint par la propriété

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

pour tous $x, y \in E$.

□

Exemple 7.35 a) Dans un $\mathbf{R}$-espace euclidien (i.e. espace de dimension finie muni d'un produit scalaire), l'adjoint d'un endomorphisme dont la matrice est A dans une base orthonormée a pour matrice ${}^t A$. De même, dans un $\mathbf{C}$-espace hermitien, la matrice dans une base orthonormée de l'adjoint s'obtient en prenant $A^* =^t \overline{A}$.

b) Prenons $E = l^2$. L'adjoint de l'endomorphisme qui envoie la suite $(x_0, ..., x_n, ...)$ sur $(0, x_0, x_1, ...)$ est l'endomorphisme qui envoie $(x_0, ..., x_n, ...)$ sur $(x_1, ..., x_n, ...)$.

Définition 7.36 Soit E un espace prehilbertien. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite *totale* si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E. La famille est *orthogonale* si on a $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tous i, j distincts dans I, *orthonormée* si on a de plus $||e_i|| = 1$ pour tout $i \in I$. Une *base hilbertienne* de E est une famille orthonormale totale.

Exemple 7.37 a) La théorie des séries de Fourier dit que la famille de fonctions $(x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t)g(t)dt.$$

b) Dans l^2, les éléments e_n définies par $(e_n)_i = \delta_{in}$ (où δ est le symbole de Kronecker) forment une base hilbertienne (on voit facilement que c'est une famille orthonormée dont l'orthogonal est nul).

Theorème 7.38 *Tout espace de Hilbert E admet une base hilbertienne.*

Démonstration (esquisse): Via le lemme de Zorn, il existe une partie orthonormée maximale A de E. Il suffit alors de montrer que $\bar{A} = E$. Mais si ce n'était pas le cas, on aurait (d'après le corollaire 7.31) un vecteur non nul x orthogonal à A. Quitte à diviser x par sa norme, on peut supposer $||x|| = 1$; mais alors $A \cup \{x\}$ serait une partie orthonormée de E, contredisant la maximalité de A.

□

Citons sans démonstration (cf. [1], Th. 4 page 257) le théorème suivant (classique dans le cadre des séries de Fourier) :

Theorème 7.39 (Parseval) *Soit E un espace de Hilbert. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E. Soit $x \in E$.*

Alors les familles $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ et $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ sont sommables, avec

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

$$||x||^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Références

[1] G. Skandalis : *Topologie et analyse*, Dunod 2004.