Math 256-Séries de Fourier

David Harari

2017-2018

Nous commençons dans ce chapitre à nous intéresser à un type particulier de séries de fonctions, appelées séries trigonométriques ou séries de Fourier. Ces séries sont particulièrement adaptées pour l'étude des fonctions périodiques, dont nous allons commencer par établir quelques propriétés.

1. Fonctions périodiques

Définition 1.1 Soit T un réel non nul. Une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ ou dans $\mathbf{C}$ est dite *périodique de période* T (ou T*-périodique*) si on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout x de $\mathbf{R}$.

Remarque 1.2 a) Si f est T-périodique, elle est aussi kT-périodique pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

b) S'il y a un plus petit $T > 0$ tel que f soit T-périodique, on dit parfois que T est *la* période de f. C'est toujours le cas si f est continue, mais sinon il n'y pas toujours de plus petite période strictement positive (par exemple la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui vaut 0 sur les rationnels et 1 ailleurs est T-périodique pour tout $T \in \mathbf{Q}$).

Exemple 1.3 a) Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont 2π-périodiques.

b) La fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui envoie x sur e^{ix} est 2π-périodique.

c) Pour tout x de $\mathbf{R}$, notons $E(x)$ la partie entière de x : c'est par définition le plus grand entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq x$ (par exemple $E(2.5) = 2$ et $E(-2,5) = -3$). Alors la fonction $f(x) = x - E(x)$ ("partie fractionnaire de x") est 1-périodique.

d) Si f est une fonction définie sur $[0, T[$, alors elle se prolonge de manière unique en une fonction T-périodique g sur $\mathbf{R}$. Si f est continue sur $[0, T[$, la fonction correspondante g est continue sur $\mathbf{R}$ à condition que $\lim_{x \to T^-} f(x) = f(0)$. De même, une fonction continue f sur $[0, T]$ *telle que* $f(0) = f(T)$ se prolonge de manière unique en une fonction continue T-périodique g sur $\mathbf{R}$.

Proposition 1.4 *Soit f une fonction continue par morceaux et T-périodique sur $\mathbf{R}$. Alors, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, on a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt.$$

$$\int_b^{b+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

La deuxième égalité signifie ici que si f est une fonction T-périodique, l'intégrale de f sur un intervalle de longueur T est la même quel que soit l'intervalle de longueur T choisi.

Démonstration : La première égalité s'obtient en faisant le changement de variable $u = t + T$, et en observant que $f(t-T) = f(t)$ pour tout t. La deuxième égalité résulte de la première (appliquée à $a = 0$) et de la relation de Chasles :

$$\int_b^{b+T} f(t)\,dt = \int_b^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{b+T} f(t)\,dt =$$

$$\int_0^T f(t)\,dt + (\int_T^{b+T} f(t)\,dt - \int_0^b f(t)\,dt).$$

□

2. Séries trigonométriques réelles

Parmi les fonctions 2π-périodiques, les plus courantes sont celles formées à partir des fonctions cos et sin, ou encore comme sommes de telles fonctions. Cela motive la définition suivante :

Définition 2.1 Une *série trigonométrique* réelle est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$, où chaque fonction $f_n(x)$ est de la forme $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, avec $a_n, b_n \in \mathbf{R}$.

Pour une telle série, on a notamment $f_0(x) = a_0$, et on peut convenir que $b_0 = 0$ puisque de toute façon le terme $b_0 \sin(0.x)$ est nul. Bien noter que les coefficients a_n, b_n ne doivent pas dépendre de x.

Les propriétés générales des séries de fonctions s'appliquent à de telles séries. Notons en particulier :

a) Si la série $\sum_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge simplement sur $\mathbf{R}$, la fonction $f(x)=\sum_{n=0}^{+}\infty(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ est 2π-périodique. En effet chaque fonction $f_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ est 2π-périodique.

b) Si cette série converge uniformément sur $\mathbf{R}$, alors la fonction $f(x)$ ci-dessus est continue. En effet chaque fonction $f_n(x)$ est continue. C'est notamment le cas en cas de convergence normale, donc par exemple si la série $\sum_{n\geq 0}(|a_n|+|b_n|)$ converge (ou encore si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument), puisqu'on a la majoration

$$|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|\leq |a_n|+|b_n|.$$

c) Comme d'habitude, même si la série converge, pour savoir que la fonction

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

est dérivable (ou encore C^1), on a besoin de plus. Cela marche par exemple si la série dérivée est normalement convergente, ce qui se produit en particulier si la série

$$\sum_{n\geq 0} n(|a_n|+|b_n|)$$

converge. En effet la série dérivée est $\sum_{n\geq 0} f_n'(x)$, avec

$$f_n'(x)=-na_n\sin(nx)+nb_b\cos(nx)$$

.

Exemple 2.2 a) La série

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\cos(nx)}{n^2+1}$$

converge normalement sur $\mathbf{R}$ car $|\frac{\cos(nx)}{n^2+1}|\leq\frac{1}{n^2+1}$ et la série $\sum\frac{1}{n^2+1}$ converge. Ainsi la fonction

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2+1}$$

est continue et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$.

b) La série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Si x est de la forme $k\pi$ avec $k\in\mathbf{Z}$, c'est clair (car la série est nulle) et pour les autres x, cela résulte de l'exercice 9 de la feuille de TD 3.

Si on pose $c_0 = a_0$ et

$$\forall n \geq 1, c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n); \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \tag{1}$$

alors on voit que formellement les nombres complexes c_n (définis pour tout $n \in \mathbf{Z}$) permettent d'écrire la série trigonométrique

$$\sum_{n \geq 0} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

sous la forme plus synthétique suivante :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx},$$

grâce aux formules $\cos(nx) = 1/2(e^{inx} + e^{-inx})$ et $\sin(nx) = 1/2i(e^{inx} - e^{-inx})$. En sens inverse, si la série complexe ci-dessus est à valeurs réelles, alors le conjugué $\bar{c}_n$ de c_n doit être égal à c_{-n} pour tout n (en particulier $c_0 \in \mathbf{R}$), et on passe alors de la forme complexe à la forme réelle par les formules :

$$a_0 = c_0; \quad \forall n \geq 1, a_n = 2\mathrm{Re}(c_n); \quad b_n = -2\mathrm{Im}(c_n). \tag{2}$$

Ces observations vont maintenant motiver l'introduction de la notion de série trigonométrique complexe.

3. Séries trigonométriques complexes

Définition 3.1 Une *série trigonométrique complexe* est une série de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx},$$

où les c_n sont des nombres complexes.

Le cas particulier d'une série trigonométrique réelle correspond au cas où les c_n vérifient la relation de symétrie $\bar{c}_n = c_{-n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Dans ce cas, la série complexe correspond à la série réelle $\sum_{n \geq 0} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, où les a_n sont donnés en fonction des c_n par les formules (2) (attention au fait que la formule diffère d'un facteur 2 pour $n = 0$). Réciproquement, on obtient la forme complexe à partir de la forme réelle via les formules (1) (là encore, noter que le cas $n = 0$ est exceptionnel).

Précisons maintenant ce qu'on entend quand on considère une série de fonctions $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ dont les termes sont indexés par $\mathbf{Z}$ et pas comme d'habitude par $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^*$.

Définition 3.2 a) Par convention on dira qu'une telle série converge simplement sur une partie I de $\mathbf{R}$ si la suite des *sommes partielles* $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ converge simplement sur I. On notera alors

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

la limite quand n tend vers $+\infty$ de $S_n(x)$.

b) On a une définition analogue pour la convergence uniforme. Ainsi, la situation est similaire aux séries indexées par $\mathbf{N}$, à part que la suite des sommes partielles qu'on considère est de la forme $\sum_{k=-n}^{n} \ldots$ au lieu de $\sum_{k=0}^{n} \ldots$.

c) On dira que la série converge normalement (ce qui implique qu'elle converge uniformément) sur une partie I de $\mathbf{R}$ si la série des modules $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|$ converge, ce qui revient à dire que la suite $s_n := \sum_{k=-n}^{n} |c_k|$ est convergente (ou encore est majorée, puisque c'est une suite croissante).

Remarque 3.3 Quand on considère des séries trigonométriques (réelles ou complexes), il suffit d'avoir convergence simple (resp. uniforme) sur $[0, 2\pi]$ (ou encore sur tout intervalle fermé de longueur 2π) pour avoir cette même propriété sur $\mathbf{R}$, puisque chaque terme de la série est une fonction 2π-périodique.

On déduit des théorèmes généraux sur la convergence normale d'une série de fonctions le résultat suivant :

Theorème 3.4 *Soit* $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ *une série trigonométrique complexe avec* $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|$ *convergente. Alors la fonction*

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

est continue sur $\mathbf{R}$.

Par exemple le théorème s'applique si $c_n = \frac{1}{n^2+1}$. De même si la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |nc_n|$ converge, la fonction $S(x)$ est C^1 et sa dérivée est

$$S'(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} inc_n e^{inx},$$

par application du théorème sur la dérivabilité de la somme d'une série de fonctions. Noter que dans l'exemple précédent, cette hypothèse plus forte n'est pas vérifiée et on ne peut donc pas conclure que S est dérivable.

4. Coefficients de Fourier

La notion de coefficient de Fourier vient du théorème suivant :

Theorème 4.1 *Soit* $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ *une série trigonométrique complexe qui converge uniformément sur* $\mathbf{R}$ *(c'est par exemple le cas si la série numérique* $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|$ *est convergente). Posons*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Alors les coefficients c_n *sont donnés par la formule :*

$$\forall n \in \mathbf{Z}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Notons que d'après la proposition 1.4, on pourrait prendre l'intégrale sur n'importe quel intervalle de longueur 2π au lieu de $[0, 2\pi]$, par exemple $[-\pi, \pi]$.

Pour démontrer le théorème, on utilise le lemme suivant, déjà vu dans le chapitre sur les inttégrales :

Lemme 4.2 *Soit* $k \in \mathbf{Z}$*. Alors si* $k \neq 0$*, on a :*

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = 0.$$

Si $k = 0$*, l'intégrale vaut* 2π*.*

Démonstration : (rappel) Pour $k = 0$, c'est immédiat car la fonction sous l'intégrale est constante égale à 1. Supposons donc $k \neq 0$. Alors une primitive de la fonction $t \mapsto e^{ikt}$ est $t \mapsto \frac{e^{ikt}}{ik}$ d'où :

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = [\frac{e^{ikt}}{ik}]_0^{2\pi},$$

qui vaut bien 0 puisque e^{ikt} prend la même valeur en $t = 0$ et en $t = 2\pi$.

□

Preuve du théorème 4.1 : Fixons $n \in \mathbf{Z}$. Comme la série converge uniformément, on peut intervertir l'intégrale et la somme infinie; ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt.$$

D'après le lemme, dans la somme, seul le terme correspondant à $k = n$ est non nul (et il vaut $2\pi c_k$), ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = 2\pi c_n$$

comme on voulait.

□

Par analogie, on est alors amené à associer en sens inverse des nombres complexes c_n à une fonction 2π-périodique f et à se demander ensuite si la série trigonométrique associée converge vers f. C'est un problème en général compliqué, que nous aborderons dans les prochains paragraphes. Pour l'instant, on commence par poser une définition :

Définition 4.3 Soit f une fonction 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, continue par morceaux (i.e. f est bornée et n'a qu'un nombre fini de points de discontinuités sur $[0, 2\pi]$). On définit, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le *n-ième coefficient de Fourier complexe de* f par la formule :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\, dt.$$

Remarque 4.4 a) On peut remplacer dans l'intégrale l'intervalle $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle de longueur 2π.

b) Attention à ne pas oublier le signe $-$ dans la définition de c_n.

c) On ne considère cette notion que pour des fonctions 2π-périodiques.

Quand f est de plus à valeurs réelles, on définit ses coefficients de Fourier réels à partir des coefficients complexes par les mêmes formules que pour les séries trigonométriques, les formules (2). Cela donne :

Définition 4.5 Soit f une fonction 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue par morceaux. On définit pour $n \in \mathbf{N}$ ses *coefficients de Fourier réels* par

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt; b_0 = 0.$$

$$\forall n \geq 1, a_n = 2\mathrm{Re}(c_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt.$$
$$\forall n \geq 1, b_n = -2\mathrm{Im}(c_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

Remarque 4.6 a) Là encore, on peut remplacer $[0, 2\pi]$ par tout intervalle de longueur 2π pour calculer l'intégrale.

b) Attention ici au facteur 2 de différence (dans le coefficient devant l'intégrale) entre la définition pour $n = 0$ et pour $n > 0$.

c) On ne parle de coefficients de Fourier réels que si f est à valeurs réelles.

Proposition 4.7 *Soit f une fonction 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue par morceaux. Alors :*

a) Ses coefficients de Fourier complexes vérifient la symétrie $\bar{c}_n = c_{-n}$.

b) Si f est paire, les coefficients b_n sont tous nuls.

c) si f est impaire, les coefficients a_n sont tous nuls.

Démonstration : a) On a $c_n = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ et $c_{-n} = \int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\,dt$. Comme f est à valeurs réelles, le conjugué de $f(t)$ est $f(t)$, et celui de $e^{-int} = \cos(nt) - i\sin(nt)$ est bien $e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$. Le résultat en découle (rappelons que par linéarité de l'intégrale, l'intégrale de la conjuguée $\bar{g}$ d'une fonction g est bien le conjugué de l'intégrale de g). Noter que ceci est aussi cohérent avec les formules permettant de passer des coefficients de Fourier réels aux coefficients de Fourier complexes.

b) On a (d'après la remarque 4.6 a) :

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \int_{-\pi}^{0} f(t)\sin(nt)\,dt + \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = -u$ dans la première intégrale, on trouve

$$\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin(nt)\,dt = \int_{\pi}^{0} -f(-u)\sin(-nu)du = -\int_0^{\pi} f(u)\sin(nu)du$$

car f est paire et sinus est une fonction impaire. Finalement on trouve $\pi b_n = 0$ donc $b_n = 0$.

c) C'est exactement similaire à b) en utilisant cette fois-ci que f est impaire et que cosinus est une fonction paire.

□

Pour faire le lien entre les notions précédentes, on est amené à introduire la définition suivante.

Définition 4.8 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ la famille de ses coefficients de Fourier complexes. On appelle *série de Fourier complexe* de f la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$.

Quand f est de plus à valeurs réelles, on peut aussi poser :

Définition 4.9 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Soient a_n et b_n (pour $n \geq 0$) ses coefficients de Fourier réels. La *série de Fourier réelle* de f est la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Bien entendu, pour f à valeurs réelles, la série de Fourier réelle est bien la série trigonométrique réelle associée à la série de Fourier complexe, comme il résulte des formules reliant les c_n aux a_n et aux b_n.

5. Convergence de la série de Fourier d'une fonction

La série de Fourier d'une fonction continue par morceaux et 2π-périodique ne converge pas toujours (bien qu'il soit difficile de trouver un contre-exemple), et même si elle converge $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ peut différer de $f(x)$ (on verra un peu plus tard un cas où cela se produit). Par contre, le théorème 4.1 nous dit que si la série converge uniformément vers une fonction g, alors les coefficients de Fourier de g sont bien les c_n (et on verra que dans ce cas $g(x) = f(x)$ pour tout x).

Il se trouve que la question de savoir si la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique converge est en général très compliquée. Avant de donner des résultats généraux, on va voir sur un exemple le genre de phénomènes qui peut se produire.

Exemple 5.1 Définissons une fonction 2π-périodique en posant $f(t) = t$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Observons qu'en particulier $f(2k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, et f est discontinue en tout réel de la forme $x_0 = 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$: en effet en un tel x_0, la limite à gauche de f est 2π et sa limite à droite est 0. De façon explicite, on peut aussi définir f par la formule

$$f(x) = 2\pi(\frac{x}{2\pi} - E(\frac{x}{2\pi}))$$

où E est la partie entière, c'est-à-dire que $f(x)$ est la partie fractionnaire de $\frac{x}{2\pi}$ multipliée par 2π (cf. l'exemple 1.3, c).

Calculons les coefficients de Fourier réels de f. On a

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} t\,dt = [\frac{t^2}{2}]_0^{2\pi} = 2\pi^2,$$

d'où $a_0 = \pi$. Pour $n \geq 1$, on a, via une intégration par parties :

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} t\cos(nt)\,dt = [\frac{t\sin(nt)}{n}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n}\,dt = 0 - 0 = 0.$$

Rappelons en effet que $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n}\,dt$ est la partie imaginaire de $\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt$, qui est 0 d'après le lemme 4.2. Ainsi $a_n = 0$ si $n > 0$. On calcule de même

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,dt = [\frac{-t\cos(nt)}{n}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{-\cos(nt)}{n}\,dt =$$

$$(-\frac{2\pi}{n}) - 0 = -\frac{2\pi}{n},$$

ce qui donne $b_n = -\frac{2}{n}$. Ainsi la série de Fourier de f est

$$\pi - 2\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}. \tag{3}$$

(on peut aussi calculer les coefficients de Fourier complexes c_n; on trouve $c_0 = \pi$ et $c_n = i/n$ si $n \neq 0$, ce qui donne la série $\pi + \sum_{n\in\mathbf{Z}, n\neq 0} \frac{i}{n} e^{inx}$. On vérifiera que cela donne le même résultat qu'en faisant le calcul avec les coefficients réels, en regroupant ensuite le terme en n et en $-n$ pour chaque $n > 0$).

Observons que si x est de la forme $x_0 = 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, l'expression (3) converge clairement vers π car tous les termes dans la somme sont nuls. Pourtant π n'est pas la valeur de la fonction f en x_0 puisque $f(x_0) = 0$. Ce phénomène vient de ce que la fonction f n'est pas continue en x_0, et que la série prend en quelque sorte en compte les valeurs de f au voisinage de x_0 aussi bien à droite qu'à gauche. Ici la série converge en un tel x_0 non pas vers $f(x_0)$ mais vers la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite de f en x_0, soit $\frac{2\pi+0}{2} = \pi$. Ce phénomène est général, comme on va le voir maintenant.

Le théorème suivant, dit *théorème de convergence simple de Dirichlet* est sans doute le plus important de toute la théorie des séries de Fourier. Ses hypothèses sont un peu techniques, mais seront le plus souvent vérifiées en pratique.

Theorème 5.2 *Soit f une fonction continue par morceaux et 2π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ (ou dans $\mathbf{R}$). Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que :*

a) La fonction f admet en x_0 une limite à gauche (notée $f(x_0^-)$) et une limite à gauche (notée $f(x_0^+)$).

b) La fonction f est C^1 par morceaux au sens suivant : il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$ en un nombre fini d'intervalles fermés $[a, b]$, tels que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a, b[$ admette un prolongement C^1 sur $[a, b]$.

Alors la série de Fourier complexe de f (et bien entendu aussi sa série réelle si f est à valeurs réelles) converge en $x = x_0$ vers

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

Remarque 5.3 i) Le théorème donne la convergence de la série de Fourier en un point x_0 fixé, ce n'est pas un résultat de convergence uniforme.

ii) L'hypothèse a) est clairement nécessaire pour que la conclusion du théorème ait un sens. L'hypothèse b) peut sembler compliquée; le point est qu'on veut pouvoir appliquer le théorème à des fonctions qui ne sont pas continues en x_0, auquel cas elles ne peuvent pas être dérivables à la fois à gauche et à droite en x_0. Par exemple, la fonction f de l'exemple 5.1 n'est pas continue à gauche en x_0 si x_0 est de la forme $x_0 = 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$ (à droite, il n'y a pas de problème, elle est continue et dérivable de dérivée 1); mais si on change f en x_0 en prenant comme valeur 2π au lieu de 0, on obtient bien une fonction dérivable à gauche en x_0. En pratique, l'hypothèse b) sera facile à vérifier.

La preuve du théorème de Dirichlet dépasse le cadre du programme. On va juste donner des corollaires :

Corollaire 5.4 *Sous les hypothèses du théorème, supposons de plus f continue en x_0. Alors sa série de Fourier converge simplement en x_0 vers $f(x_0)$.*

Démonstration : En effet dans ce cas on a $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$. □

Appliqué à la fonction f de l'exemple 5.1, ceci donne par exemple que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, on a

$$x = \pi - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

puisque $f(x) = x$ sur $]0, 2\pi[$ (elle est donc en particulier continue sur $]0, 2\pi[$).

Corollaire 5.5 *Soit f une fonction C^1 et 2π-périodique. Alors sa série de Fourier converge en tout x vers $f(x)$.*

Démonstration : En effet f est en particulier continue, et à fortiori C^1 par morceaux puisqu'elle est C^1, ce qui permet d'appliquer le corollaire précédent.

$\square$

Exemple 5.6 On utilise en physique la fonction 2π-périodique f dite *fonction créneau* définie par : $f(x) = -1$ si $x \in]-\pi, 0[$, $f(x) = 0$ si x est de la forme $x = k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, et $f(x) = 1$ si $x \in]0, \pi[$. Comme cette fonction est impaire, ses coefficients de Fourier réels a_n sont nuls. Pour $n \geq 1$, on calcule

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \int_{-\pi}^{0} -\sin(nt)\,dt + \int_{0}^{\pi} \sin(nt)\,dt =$$

$$[\frac{\cos(nt)}{n}]_{-\pi}^{0} + [\frac{-\cos(nt)}{n}]_0^{\pi} =$$

$$\frac{2(1-(-1)^n)}{n}.$$

Finalement on trouve $b_n = 0$ pour n pair et $b_n = \frac{4}{n\pi}$ pour n impair. Ainsi la série de Fourier de f est, en écrivant les entiers positifs impairs sous la forme $2n+1$, $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{4\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}.$$

Le théorème de Dirichlet donne ici que pour tout $x \in \mathbf{R}$, cette série converge vers $f(x)$ car même en un point $x_0 = k\pi$ (k entier) où f n'est pas continue, on a $f(x_0) = 0 = 1/2(f(x_0^-) + f(x_0^+))$. On a ainsi, pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}.$$

6. Taille des coefficients de Fourier

Pour espérer avoir des propriétés de convergence uniforme d'une série de Fourier, il est utile de savoir majorer le module des coefficients de Fourier d'une fonction. On va voir qu'on peut obtenir des majorations d'autant meilleures que la fonction est suffisamment dérivable. C'est l'objet des deux théorèmes suivants.

Theorème 6.1 *Soit f une fonction C^1 et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. Alors :*

a) la fonction f' est aussi 2π-périodique.

b) Les coefficients de Fourier complexes $c_n(f')$ de la fonction f' sont donnés par

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f') = in\, c_n(f),$$

où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier complexes de f.

Démonstration : a) s'obtient en dérivant l'égalité (valable pour tout x) :

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

b) résulte d'une intégration par parties.

□

Noter qu'on peut retrouver intuitivement la formule du théorème en écrivant formellement "$f(x) = \sum c_n e^{inx}$" et en dérivant la série terme à terme, même si en général on a vu que la série ne converge pas toujours vers $f(x)$. On peut aussi (exercice !) traduire le théorème en termes de coefficients de Fourier réels si f est à valeurs réels.

Theorème 6.2 *Soit f une fonction 2π-périodique et de classe C^1. Alors il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on ait*

$$|nc_n(f)| \leq M,$$

autrement dit $c_n(f) = O(\frac{1}{n})$ quand n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration : Si f est continue et 2π-périodique, alors ses coefficients de Fourier complexes vérifient

$$|c_n(f)| \leq M,$$

où M est le sup de f sur $[0, 2\pi]$ (rappelons que l'hypothèse f continue implique que ce sup existe bien dans $\mathbf{R}$, parce qu'on est sur un intervalle *fermé et borné*). En effet, on peut écrire

$$|c_n(f)| = |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)e^{-int}|\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,dt = M.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème précédent à f'.

□

Corollaire 6.3 *Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Soit f une fonction 2π-périodique et de classe C^r. Alors il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on ait*

$$|n^r c_n(f)| \leq M,$$

autrement dit $c_n(f) = O(\frac{1}{n^r})$

Démonstration : C'est tout à fait similaire au résultat précédent, en procédant par récurrence sur r.

$\square$

On en déduit :

Theorème 6.4 *Soit f une fonction de classe C^2 et 2π-périodique. Alors sa série de Fourier complexe $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbf{R}$ vers $f(x)$.*

Démonstration : D'après le corollaire 6.3, il existe une constante M telle que $|c_n| \leq \frac{M}{n^2}$ pour tout $n \neq 0$. On a donc

$$|c_n e^{inx}| = |c_n| \leq \frac{M}{n^2}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc aussi $\sum_{n\in\mathbf{Z},n\neq 0} \frac{1}{n^2}$ vu que ses sommes partielles

$$\sum_{-n\leq k\leq n, k\neq 0} \frac{1}{k^2}$$

sont obtenues en multipliant par 2 les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Finalement $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|$ converge par comparaison, et la série converge bien normalement. Sa somme est bien $f(x)$ grâce au théorème de Dirichlet.

$\square$

Remarque 6.5 a) Le théorème précédent est vrai sous l'hypothèse plus faible que f est continue sur $\mathbf{R}$ et C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$. La preuve est nettement plus difficile (hors programme).

b) On peut en fait aussi démontrer que si f une fonction 2π-périodique sur $\mathbf{R}$ et continue par morceaux, alors la suite (c_n) de ses coefficients de Fourier complexes tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. De même pour les coefficients de Fourier réels si f est à valeurs réelles.

7. Formule de Parseval

Le résultat suivant est très important, car il permet d'obtenir des formules explicites pour des sommes de séries. De plus, il ne demande aucune hypothèse de régularité (du type continuité ou dérivabilité de f), contrairement aux théorèmes de convergence.

Theorème 7.1 (Formule de Parseval) *Soit f une fonction continue par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Soient c_n ses coefficients de Fourier complexes. Alors*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt.$$

Remarque 7.2 a) Comme pour toute fonction 2π-périodique, on peut remplacer $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$ par n'importe quelle intégrale $\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^2\, dt$ sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt$.

b) La formule est parfois appelée formule de Bessel-Parseval.

c) Si f est à valeurs réelles, on peut également traduire la formule de Parseval par l'égalité :

$$a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2) + ... + \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) + ... = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt,$$

où les a_n et les b_n sont les coefficients de Fourier réels de f. Cela découle de la formule de Parseval avec les c_n et de la relation entre coefficients de Fourier réels et complexes et de ce que pour f à valeurs réelles, on peut remplacer le module $|f(t)|^2$ de $f(t)^2$ simplement par $f(t)^2$, qui est dans ce cas un réel positif.

d) La formule de Parseval donne une relation entre f et ses coefficients de Fourier même quand on ne sait pas que la série de Fourier de f converge (par exemple quand on n'est pas dans les conditions d'application du théorème de Dirichlet), d'où son intérêt.

Preuve de la formule de Parseval : On va ici expliquer la preuve dans le cas où f est de classe C^2, auquel cas on a vu dans le théorème 6.4 que la série de Fourier de f converge normalement (le cas général est plus compliqué). On écrit

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{int}; \quad \overline{f(t)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \bar{c}_n e^{-int}.$$

Comme pour chaque t, les séries convergent absolument, on peut appliquer le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries (vu à la fin du cours sur les séries), ce qui donne

$$|f(t)|^2 = f(t)\overline{f(t)} = \sum_{p,q\in\mathbf{Z}} c_p\bar{c}_q e^{i(p-q)t}.$$

Le fait que la convergence soit normale (et donc uniforme) permet alors de prendre l'intégrale et d'intervertir avec la somme infinie, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{p,q \in \mathbf{Z}} c_p \bar{c}_q \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)t} \, dt.$$

Comme d'après le lemme 4.2, tous les termes $\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)t} \, dt$ sont nuls à part quand p, q sont égaux à un même entier n (auquel cas l'intégrale vaut 2π), on obtient

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \bar{c}_n.(2\pi) = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2,$$

ce qui est la formule cherchée.

□

Exemple 7.3 Appliquons la formule à la fonction f de l'exemple 5.1, définie comme la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = t$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On a vu que ses coefficients de Fourier réels étaient : $a_0 = \pi$, $a_n = 0$ pour $n > 0$ et $b_n = -\frac{2}{n}$ pour $n > 0$. D'autre part

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 \, dt = \int_0^{2\pi} t^2 \, dt = [\frac{t^3}{3}]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3,$$

d'où $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 \, dt = \frac{4}{3}\pi^2$. La formule de Parseval donne alors

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{4}{3}\pi^2,$$

soit

$$\pi^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\pi^2,$$

et finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Voici enfin une conséquence théorique de la formule de Parseval :

Theorème 7.4 *a) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique et continue, dont tous les coefficients de Fourier complexes sont nuls. Alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.*

b) Soient f et g deux fonctions 2π-périodiques et continues, qui ont les mêmes coefficients de Fourier complexes. Alors $f = g$.

Observer que dans b), on ne demande pas de propriété de dérivabilité de f et g, et on ne peut donc pas assurer que les séries de Fourier de f et g convergent. Il est par contre important de travailler avec des fonctions continues pour ces énoncés : si par exemple f est la fonction 2π-périodique qui vaut 0 partout sauf en les réels de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, et qui vaut 1 en ces réels, alors il est immédiat que tous les coefficients de Fourier de f sont nuls.

Démonstration : a) Si tous les coefficients de Fourier complexes c_n de f sont nuls, la formule de Parseval donne

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = 0.$$

Comme $t \mapsto |f(t)|^2$ est une fonction *continue* positive dont l'intégrale est nulle sur $[0, 2\pi]$, cette fonction est nulle sur $[0, 2\pi]$, donc aussi sur $\mathbf{R}$ par périodicité. Finalement $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (le seul nombre complexe dont le module est nul est 0).

b) découle de a) en l'appliquant à la fonction $f - g$.

□

Corollaire 7.5 *Soit f une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. On suppose que sa série de Fourier*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx}$$

converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction $g(x)$. Alors on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Démonstration : On sait déjà ici que g est continue comme somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément. On sait aussi que les coefficients de Fourier de la fonction g sont les c_n en appliquant le théorème 4.1. Le théorème 7.4 b) donne alors que les deux fonctions f et g sont égales.

□

8. Fonctions de période autre que 2π

Il est commode en mathématiques de travailler avec des fonctions de période 2π comme les fonctions usuelles que sont sin et cos. En physique, on est souvent amené à considérer des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de période T quelconque, qu'on peut considérer comme un *signal*. On définit alors la *pulsation* de f comme $\omega := \frac{2\pi}{T}$; la pulsation 1 correspond ainsi à la période 2π. La *fréquence* du signal est $\nu := \frac{1}{T}$.

On définit alors les coefficients de Fourier complexes d'une fonction de période T par

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt,$$

et ses coefficients de Fourier réels par

$$a_0 = c_0;\ \forall n \geq 1, a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

On a alors les mêmes théorèmes de convergence que pour les fonctions de période 2π, et les mêmes relations entre coefficients de Fourier réels et complexes. Quand la série de Fourier converge vers $f(x)$ (donc par exemple dès que f est continue et C^1 par morceaux d'après le théorème de Dirichlet), on peut écrire

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)).$$

La fonction $f_n : x \mapsto a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)$ s'appelle la n-ième *harmonique* du signal f. On peut aussi l'écrire

$$a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin(n\omega x + \varphi_n)$$

via les formules d'addition en trigonométrie (où φ_n est le *déphasage*), en posant $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \sin\varphi_n$ et $\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = \cos\varphi_n$. Ainsi la convergence de la série de Fourier exprime en quelque sorte que le signal compliqué f est la somme (infinie) de toutes les harmoniques, qui sont des signaux plus simples. Pour $n \geq 1$, la n-ième harmonique peut aussi s'écrire sous forme complexe $f_n(x) = c_ne^{in\omega x} + \bar{c}_ne^{-in\omega x}$ (pour $n = 0$ c'est simplement $a_0 = c_0$).
Pour $n \geq 1$, un calcul facile (par exemple en utilisant la forme complexe) donne :

$$\int_0^T f_n(t)^2\,dt = 2T|c_n|^2 = \frac{T}{2}(a_n^2+b_n^2).$$

Cette quantité s'appelle l'*énergie* de la n-ième harmonique. Pour $n = 0$, cette énergie est $Ta_0^2 = Tc_0^2$, la formule de Parseval s'écrit

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n|^2 = a_0^2 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt.$$

Elle exprime que l'*énergie totale du signal* $\int_0^T f(t)^2\,dt$ est la somme des énergies de toutes les harmoniques.