Feuille d'exercices 6

Séries de Fourier (II) ; transformée de Fourier

Exercice 1 : Soit $\alpha \notin \mathbb{Z}$ un nombre réel.
Soit $f :\to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique, définie par $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour $|x| < \pi$.
1. Développer en série de Fourier la fonction f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier vers la fonction et montrer que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}$$

(*) Exercice 2 : Soit f de période 2π telle que $f(x) = x^2 + \pi x$ pour $-\pi < x < \pi$.

1. Former le développement en série de Fourier de f ainsi que la formule de Parseval. En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

2. Déduire le développement de F de période 2π telle que $F(x) = \int_0^x (f(t) - \pi^2/3)dt$.

Exercice 3 : On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution de la température dans une barre métallique, donc les extrémités sont maintenues à zéro degré Celsius. On verra la barre métallique comme un objet unidimensionnel de longueur $2L$, et on identifiera un point de la barre avec un point $x \in [-L, L]$.

On notera $u(t, x)$ la température (exprimée en degrés Celsius) au point x et à l'instant t. Comme on suppose la température nulle aux extrémités, on doit avoir

$$(t, L) = u(t, -L) = 0. \tag{1}$$

De plus, u doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles suivante (cf. vos cours de physique !) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

On suppose de plus que, à l'instant initial,

$$u(0, x) = u_0(x) := \begin{cases} L + x & si \quad -L \leq x \leq -L/2 \\ -x & si \quad -L/2 \leq x \leq L/2 \\ x - L & si \quad L/2 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{3}$$

Le but de cet exercice est de trouver une fonction vérifiant les trois condition (1), (2), (3).
1) Représenter graphiquement la fonction u_0.
2) Montrer qu'il existe une suite de nombres $b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [-L, L], \quad u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Calculer explicitement ces coefficients.

3) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi^2 tn^2/L^2} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ converge simplement sur $[-\pi, \pi]$. On notera $u(t,x)$ sa limite. Vérifier que $u(t,x)$ satisfait (1), (2) et (3).

4)(*) Peut-on adapter la méthode précédente à des fonctions u_0 plus générales ?

Exercice 4 : Si f est une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, et si $\lambda > 0$, on note f_λ la fonction dilatée de la fonction f, définie par

$$x \mapsto f_\lambda(x) = f(\lambda x) .$$

Etablir une relation directe entre la transformée de Fourier de f_λ et celle de f.

Exercice 5 : On note Λ la fonction égale à 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et à 0 ailleurs.
1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction Λ.
2. En déduire, pour tous $a > 0$ et $c \in \mathbb{R}$, la transformée de Fourier de la fonction égale à c sur $[-a, a]$ et à 0 ailleurs. (On pourra utiliser l'exercice 1)
3. Calculer la convolée $\Lambda * \Lambda$ de Λ avec elle-même, tracer son graphe puis calculer sa transformée de Fourier.
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x\Lambda(x)$, qui envoie x sur lui-même pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et sur 0 sinon.

Exercice 6 : 1. Déterminer, pour $\lambda > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\lambda|x|}$.
2. En utilisant la formule d'inversion de Fourier, déduire de la question précédente la transformée de Fourier de la fonction $1/(x^2 + \lambda^2)$.
3. Retrouver sans calcul que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.
4. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, calculer le produit de convolution des fonctions $x \mapsto 1/(x^2 + \lambda^2)$ et $x \mapsto 1/(x^2 + \mu^2)$ en calculant d'abord la transformée de Fourier de cette convolée.

Exercice 7 : (Principe d'incertitude d'Heisenberg)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ à support compact.
1. En intégrant par parties, démontrer qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = -2\Re \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \bar{f}'(x) \, dx$$

où $\Re$ désigne la partie réelle.
2. En utilisant la majoration de Cauchy-Schwarz puis la formule de Plancherel, en déduire la majoration suivante, appelée *Principe d'incertitude de Heisenberg* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \leq 2\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2}.$$

3. Montrer qu'on a égalité dans la majoration obtenue à la question 2. lorsque f est la gaussienne $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.