Math 256-Suites et séries de fonctions

David Harari

2016-2017

Dans ce chapitre, on va étendre les notions de convergence pour une suite ou une série à des suites et des séries dépendant d'un paramètre réel, autrement dit à des suites et séries de fonctions. Une subtilité est que pour ces objets, il y a plusieurs notions de convergence, ce que nous allons d'abord étudier sur un exemple simple.

1. Un exemple

Considérons, pour tout entier $n \geq 0$, la fonction f_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Comme pour chaque entier $n \geq 0$ on a défini une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on parle de *suite de fonctions*. En d'autres termes, si on fixe $x \in \mathbf{R}$, on obtient une suite réelle $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$. On observe que : pour $x \in]-1,1]$, la suite $(f_n(x))$ converge, et sa limite est : 0 si $x \neq 1$, 1 si $x = 1$. On dit alors que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement sur* $]0,1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$. Pour $x \notin]-1,1]$, la suite $(f_n(x))$ ne converge pas car en $x = -1$, la suite $(f_n(-1))$ vaut alternativement 1 et -1; pour $|x| > 1$, la suite $(f_n(x))$ n'est même pas bornée, la valeur absolue $|f_n(x)|$ tendant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On s'intéresse donc désormais à la suite de fonctions (f_n) sur l'intervalle $]-1,1]$.

On observe que la fonction limite $f :]-1,1] \to \mathbf{R}$ n'est pas continue au point 1, bien que toutes les fonctions f_n soient continues. Cette remarque est en particulier à l'origine de la notion de *convergence uniforme*, que nous allons développer dans les paragraphes suivants. L'idée est que demander que pour tout x la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ ne suffit en général pas à assurer de bonnes propriétés de la fonction f. Par contre si on peut rendre, pour n assez grand *indépendant de x*, la quantité $|f_n(x) - f(x)|$ arbitrairement petite, la situation est meilleure. Dans l'exemple on ne peut pas majorer $|f_n(x) - f(x)|$, même sur $]-1,1[$, par une quantité qui tend vers 0 indépendamment de x :

en effet, pour $x \in]0,1[$, la borne supérieure[1] de $|f_n(x) - f(x)| = x^n$ est 1, qui ne tend pas vers 0.

2. Les deux types de convergence

La première notion de convergence d'une suite de fonctions est (comme son nom l'indique !) la plus simple et la plus intuitive :

Définition 2.1 Soit I une partie de $\mathbf{R}$ (en général on supposera que I est un intervalle). Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I, à valeurs réelles ou complexes. On dit que (f_n) *converge simplement sur* I vers la fonction f si pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. On dit aussi dans ce cas que la fonction f est la *limite simple* de la suite (f_n) sur I.

Autrement dit, la convergence simple de (f_n) signifie : si on fixe x, la suite $(f_n(x))$ converge.

Exemple 2.2 a) Comme on l'a vu, la suite de fonctions définie par $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$.

b) La suite de fonctions $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} + x$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction $f(x) = x$. En effet, via la majoration $|\frac{\sin(nx)}{n} \leq 1/n|$, on voit que pour tout x la suite $\frac{\sin(nx)}{n}$ tend vers zéro.

c) La suite de fonctions $f_n(x) = x/n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction nulle.

d) La suite de fonctions $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction $x \mapsto e^x$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f_n(x) = e^{n \ln(1+\frac{x}{n})}.$$

Le développement limité de la fonction $y \mapsto \ln(1+y)$ au voisinage de zéro donne

$$\ln(1+y) = y + y.\varepsilon(y)$$

avec $\lim_{y \to 0} \varepsilon(y) = 0$. Ainsi

$$n \ln(1 + \frac{x}{n}) = n(\frac{x}{n} + \frac{x}{n}\varepsilon(\frac{x}{n})) = x(1 + \varepsilon(\frac{x}{n}))$$

[1] Rappelons que la *borne supérieure* $\sup A$ d'une partie non vide majorée A de $\mathbf{R}$ est le plus petit des majorants de A; cette borne supérieure n'est pas forcément dans l'ensemble A, par exemple la borne supérieure de $]0,1[$ est 1. Si A n'est pas majorée, on peut poser $\sup A = +\infty$.

qui tend vers x quand n tend vers $+\infty$ (puisqu'alors $\frac{x}{n}$ tend vers zéro. Finalement $f_n(x)$ tend bien vers e^x quand n tend vers $+\infty$.

La notion suivante est plus compliquée, mais c'est celle qui en pratique permet d'obtenir de bonnes propriétés de la fonction limite (voir le prochain paragraphe) :

Définition 2.3 Soit I une partie de $\mathbf{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I, à valeurs réelles ou complexes. On dit On dit que (f_n) *converge uniformément sur I* vers la fonction f s'il existe une suite réelle (a_n) vérifiant les deux propriétés : (a_n) tend vers 0 et $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

Bien observer que (a_n) *doit être indépendant de x*. En d'autres termes, dire que (f_n) converge uniformément vers f signifie que la suite numérique $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ doit tendre vers 0 (ce critère sert souvent à montrer qu'une suite de fonctions *ne converge pas uniformément* vers f).

Exemple 2.4 a) La suite $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} + x$ (définie pour $n > 0$) converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers la fonction $f(x) = x$. On a en effet $|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{n}$, et la suite $a_n := \frac{1}{n}$ tend vers zéro.

b) Considérons la suite $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Elle converge simplement vers la fonction nulle. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}$ car $\sup_{x \in \mathbf{R}} f_n(x) = +\infty$. Par contre, sur tout intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, la convergence est uniforme car pour $x \in [a, b]$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{\max(|a|,|b|)}{n}$. On voit qu'il est très important de préciser sur quel sous-ensemble de $\mathbf{R}$ on regarde la suite de fonctions pour discuter de sa convergence uniforme.

c) Comme on l'a déjà vu plus haut, la suite $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1, 1[$ vers la fonction nulle, mais pas uniformément. En effet $\sup_{x \in]-1,1[} |f_n(x)| = 1$. La convergence est par contre uniforme sur tout intervalle fermé $[-r, r]$ de $]-1, 1[$ avec $0 < r < 1$: en effet, pour tout $x \in [-r, r]$, on a $|f_n(x)| \leq r^n/n$, et la suite r^n/n tend vers zéro (de plus elle est bien indépendante du x choisi dans $[-r, r]$).

Pour les questions théoriques, il est également utile de comprendre comment traduire les deux notions de convergence avec des quantificateurs. La propriété que (f_n) converge uniformément vers f sur I s'exprime de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

La subtilité est que l'entier n_0 ne doit ici pas dépendre de x.

La traduction de la convergence simple sur I serait :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists\, n_0(x) \in \mathbf{N},\ \forall n \geq n_0(x),\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

où on a écrit $n_0(x)$ au lieu de n_0 pour mettre l'accent sur le fait que pour la convergence simple, l'entier n_0 peut dépendre de x. Comme souvent, on voit que l'ordre dans lequel on met les quantificateurs revêt une importance primordiale.

3. Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

On s'intéresse dans ce paragraphe à la question suivante : si une suite de fonctions (f_n) converge vers une fonction f, est-ce que des propriétés telles que la continuité ou la dérivabilité se transmettent des f_n à la limite f ? On va voir que la plupart du temps, la convergence simple ne suffit pas, et on a besoin de propriétés de convergence uniforme. On notera quand même que si f est limite simple d'une suite de fonctions (f_n) avec chaque f_n positive (resp. croissante, resp. convexe), alors f reste positive (resp. croissante, resp. convexe) à condition bien entendu de prendre les propriétés “positive” et “croissante” au sens large.

3.1. Continuité

Nous avons déjà observé avec la suite $f_n(x) = x^n$ (définie sur $]0,1]$) qu'en général, une limite simple de fonctions continues n'est pas continue. La situation est meilleure si on suppose la convergence uniforme :

Theorème 3.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose que toutes les fonctions f_n sont continues et que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I. Alors la fonction f est continue.*

Démonstration : Soit $x_0 \in I$, on veut montrer que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{1}$$

pour tout $x \in I$. Ceci s'applique en particulier pour $n = n_0$. Écrivons maintenant, pour $x \in I$:

$$f(x) - f(x_0) = (f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)) + (f_{n_0}(x_0) - f(x_0)). \tag{2}$$

La continuité de la fonction f_{n_0} en x_0 permet de trouver $\eta > 0$ tel que pour tout x dans I vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$, on ait

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \varepsilon. \tag{3}$$

On a alors, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'égalité (2) :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|.$$

L'inégalité (1) appliquée à $n = n_0$ permet de majorer les deux premiers termes par ε; l'inégalité (3) permet de majorer le troisième terme par ε. Finalement

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon$$

pour tout x de I vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$, ce qui montre la continuité de f en x_0. Comme x_0 est quelconque dans I, on a bien montré la continuité de f sur I.

□

Remarque 3.2 Réciproquement, on ne peut pas déduire du fait que la limite simple est continue que la convergence est uniforme : par exemple la limite simple de la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ sur $]-1, 1[$ est la fonction nulle, qui est bien continue. Or, on a vu que la convergence n'était pas uniforme sur $]-1, 1[$.

Remarque 3.3 Si on veut montrer la continuité de la limite simple f d'une suite de fonctions (f_n) (définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$) en un point x_0 de I, il suffit de montrer la convergence uniforme sur un intervalle fermé du type $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ avec $\eta > 0$ (puisqu'on aura alors la continuité de la fonction f sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, donc en particulier en x_0). Ainsi, pour établir la continuité de f sur I, il suffit d'avoir convergence uniforme sur tous les intervalles $[a, b]$ inclus dans I avec $a < b$. Cette remarque est utile en pratique, car elle permet de se ramener à des intervalles bornés pour étudier la continuité de f, même si I n'est pas borné.

3.2. Intégrale d'une suite de fonctions

Il s'agit ici d'"intervertir l'intégrale et la limite" d'une suite de fonctions. Le théorème suivant dit que c'est possible, à condition de respecter deux conditions importantes : il doit s'agir d'intégrales sur un segment $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ (et non d'intégrales généralisées), et il faut une condition de convergence uniforme (la convergence simple ne suffit pas en général; voir les compléments un peu plus bas).

Theorème 3.4 *Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f. Alors la suite numérique $\int_a^b f_n(t)\, dt$ converge vers $\int_a^b f(t)\, dt$.*

On observera que la fonction f est continue (donc son intégrale a bien un sens) d'après le théorème 3.1. En abrégé, la conclusion du théorème s'écrit

$$\lim_{n\to+\infty}(\int_a^b f_n(t)\, dt) = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\, dt.$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[a, b]$ dit qu'il existe un entier n_0 (*indépendant de t*) tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

pour tout $t \in [a, b]$. On en déduit, pour $n \geq n_0$:

$$|\int_a^b f_n(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \leq \int_a^b \varepsilon\, dt = \varepsilon(b-a),$$

ce qui, $(b-a)$ étant une constante, donne la convergence de la suite $\int_a^b f_n(t)\, dt$ vers $\int_a^b f(t)\, dt$.

□

Remarque 3.5 La même preuve montre que la convergence de la suite de fonctions $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$ vers la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ est uniforme sur $[a, b]$.

3.3. Dérivée d'une suite de fonctions

Le théorème sur l'intégrale d'une suite de fonctions va nous permettre maintenant d'obtenir un théorème sur la dérivée de la limite d'une suite de fonctions. On fera attention qu'il faut ici une hypothèse de convergence uniforme sur la suite des *dérivées* de f_n, et non sur la suite (f_n) elle-même.

Theorème 3.6 *Soit (f_n) une suite de fonctions C^1 d'un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'on a les deux conditions suivantes : a) La suite des dérivées (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur I; b) il existe $x_0 \in I$ tel que la suite numérique $f_n(x_0)$ converge vers une limite l.*

Alors la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f, qui est C^1 et vérifie $f' = g$.

Démonstration : Pour tout $x \in I$, On a l'égalité

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt.$$

On applique alors le théorème 3.4 à la suite de fonctions (f'_n) sur $[x_0, x]$, ce qui est licite puisque (f'_n) converge uniformément sur $[x_0, x]$. On obtient alors que pour x fixé, la suite $(f_n(x))$ converge avec

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt,$$

ce qui dit bien que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$. On voit alors que f est C^1 avec $f' = g$.

□

Remarque 3.7 La remarque 3.5 montre que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I. On observe aussi qu'on a seulement utilisé la convergence uniforme de (f'_n) sur des segments fermés inclus dans I, et donc que le théorème s'applique dès qu'on connaît la convergence uniforme de (f'_n) sur tous les segments $[a, b] \subset I$, ce qui est moins contraignant en général que supposer la convergence uniforme sur I (cf. exemple 2.4, c) et remarque 3.3).

Exemple 3.8 a) On fera bien attention à vérifier l'hypothèse sur la suite des dérivées pour appliquer le théorème précédent. Par exemple la suite de fonctions C^1 définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge uniformément vers la fonction nulle : en effet $|f_n(x)| \leq 1/n$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pourtant la suite des dérivées $f'_n(x) = x^{n-1}$ converge vers 1 pour $x = 1$, qui n'est pas la dérivée en 1 de la fonction nulle.

b) Il se peut même qu'une suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais que sa suite des dérivées ne converge pas simplement en certains points : par exemple si $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, la suite converge encore uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, mais la suite des dérivées $f'_n(x) = \sqrt{n}x^{n-1}$ ne converge pas en 1.

Remarque 3.9 (purement culturelle...). Il existe une version beaucoup plus générale du théorème 3.4 qui s'applique aussi à l'intégrale généralisée d'une suite de fonctions continues (f_n) définies sur $]a, b[$ (ici on pourrait même avoir $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Ce théorème ne demande que la convergence simple de (f_n) vers f sur $]a, b[$, à condition d'avoir l'hypothèse supplémentaire : il existe une fonction g (indépendante de n) définie sur $]a, b[$, vérifiant $|f_n(t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in]a, b[$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ converge. Ce théorème, dit de *convergence dominée*, est infiniment plus difficile à démontrer que le théorème 3.4 et n'est pas au programme de L2.

4. Séries de fonctions

On considère dans ce paragraphe des séries $\sum f_n(x)$, où chaque f_n est une fonction d'une partie I de $\mathbf{R}$ (le plus souvent un intervalle) vers $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On va voir que toutes les notions que nous avons vues pour les suites de fonctions s'étendent aux séries de fonctions.

Définition 4.1 Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On considère la *suite des sommes partielles* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, qui est donc une suite de fonctions définies sur I. On dit que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ *converge simplement* sur I (resp. uniformément sur I) si la suite de fonctions $S_n(x)$ converge simplement (resp, uniformément) sur I.

Par exemple, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1, 1]$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.

Quand nous avons étudié la notion de convergence uniforme d'une suite de fonctions, nous avons en général eu besoin de connaître la limite pour savoir s'il y avait bien convergence uniforme vers cette limite. Pour les séries de fonctions, il est rare qu'on puisse calculer explicitement la limite. Aussi, la notion suivante est-elle particulièrement importante :

Définition 4.2 Soit $\sum f_n(x)$ une série de fonctions. On dit que cette série *converge normalement* sur I s'il existe une suite de nombres réels (a_n) (qui ne doivent pas dépendre de x) vérifiant les deux propriétés : a) $|f_n(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in I$; b) La série numérique (qui est à termes positifs) $\sum a_n$ converge.

Une autre caractérisation de la convergence normale est que la série converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge (ce qui sert surtout à montrer dans certains cas que la série ne converge pas normalement). L'intérêt de la convergence normale réside dans le théorème suivant :

Theorème 4.3 *Soit $\sum f_n(x)$ une série de fonctions qui converge normalement sur I. Alors elle converge uniformément sur I.*

Nous ne donnerons pas la preuve détaillée, qui basée sur le même type de critère de Cauchy que pour les séries numériques (voir la preuve du théorème 3.1 : la convergence absolue d'une série numérique implique sa convergence), la seule différence étant qu'on doit vérifier ce critère de Cauchy de manière "uniforme" (le n_0 ne doit pas dépendre de x).

Exemple 4.4 a) La série $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a,a]$ avec $0 \leq a < 1$ car sur cet intervalle, on a $|x^n| \leq a^n$ et $\sum a^n$ converge. Par contre, elle ne converge pas normalement sur $]-1,1[$ car $\sup_{x\in]-1,1[} x^n = 1$ et la série $\sum 1$ ne converge pas.

b) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ car $|\frac{\sin(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

c) La série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur tout intervalle borné $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, car si $x \in [a,b]$ on a $|\frac{x^n}{n!}| \leq \frac{\max(|a|,|b|)^n}{n!}$ et la série $\sum \frac{\max(|a|,|b|)^n}{n!}$ converge. Par contre on n'a pas convergence normale sur $\mathbf{R}$ car $\sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{x^n}{n!} = +\infty$.

Les propriétés de la limite uniforme d'une suite de fonctions s'étendent immédiatement aux séries de fonctions, en considérant la suite des sommes partielles. On obtient donc le théorème suivant :

Theorème 4.5 *Soit $\sum f_n(x)$ une série de fonctions d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.*

a) Supposons que $\sum f_n(x)$ converge uniformément (par exemple normalement) sur I (ou encore sur tout intervalle fermé $[a,b]$ inclus dans I). Alors, si toutes les fonctions f_n sont continues, la fonction $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue.

b) Supposons que toutes les f_n soient continues sur $[a,b]$ et que la série $\sum f_n(x)$ converge uniformément (par exemple normalement) sur $[a,b]$. Alors, on a

$$\int_a^b (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t))\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt.$$

("on peut intervertir l'intégrale et la somme infinie si la série converge uniformément").

c) Supposons que toutes les fonctions f_n soient C^1 et que la série des dérivées $\sum f_n'(x)$ converge uniformément (par exemple normalement) sur I (ou encore sur tout intervalle fermé $[a,b]$ inclus dans I). Supposons de plus qu'il existe $x_0 \in I$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge simplement. Alors *la série $\sum f_n(x)$ converge simplement sur I. De plus, la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et dérivable, et on a*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

("on peut dériver terme à terme une série de fonctions qui converge simplement si la série des dérivées converge uniformément").

Exemple 4.6 a) La série $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbf{R}$. En appliquant le c), on obtient que la fonction exponentielle est C^1 sur $\mathbf{R}$, de dérivée elle-même car la série dérivée de l'exponentielle est $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, qui est la même que celle de exp à un décalage d'indice près. C'est ainsi que l'on démontre rigoureusement cette propriété (rencontrée dans les années antérieures) de l'exponentielle.

b) On peut aussi utliser le théorème dans l'autre sens, pour calculer une somme de série. Soit par exemple

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n.$$

C'est une série qui est convergente pour $x \in]-1,1[$. On observe que si on pose, pour $x \in]-1,1[$:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

alors on a $u(x) = \frac{1}{1-x}$ car on sait que

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

pour tout $x \neq 1$ et tout $N \geq 0$. Comme la série dérivée $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ de $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment $[a,b] \subset]-1,1[$, le théorème permet d'en déduire que la fonction u est dérivable avec

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

Ainsi $S(x) = xu'(x)$, ce qui donne finalement

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

pour tout $x \in]-1,1[$.