Corrigé de l'examen du 3 mai 2016

Exercice 1 : Intégrales généralisées.

a) Comme une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est la fonction $t \mapsto -e^{-t}$, on a

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = -0 + 1 = 1.$$

b) On a avec une intégration par parties :

$$F(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = [t^n(-e^{-t})]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n t^{n-1} e^{-t}\, dt.$$

Or $t^n(-e^{-t})$ vaut 0 pour $t = 0$ et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Finalement on trouve $F(n+1) = nF(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Avec a) et b), on obtient $F(2) = F(1) = 1$, $F(3) = 2F(2) = 2$, et par récurrence sur n, on a $F(n) = (n-1)!$.

d) Le seul problème éventuel est en $+\infty$. Fixons $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $t^n e^{-t} \geq 0$, on peut utiliser le critère de comparaison. Quand t tend vers $+\infty$, $t^{n+2}e^{-t}$ tend vers 0, donc en particulier $t^n e^{-t} = O(\frac{1}{t^2})$. Or on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge, donc par comparaison aussi $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$, donc aussi $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ puisqu'en 0 il n'y a pas de difficulté.

Exercice 2 : Séries de Fourier.

a) ...

b) Oui, f est continue. C'est évident sur $]-\pi, \pi[$ et à gauche en π, et comme elle est 2π-périodique, il s'agit juste de vérifier que la limite à droite quand t tend vers $-\pi$ de $f(t)$, c'est à dire de $\cos(\alpha t)$, est bien égale à $f(-\pi) = f(\pi) = \cos(\alpha\pi)$. Or cette limite à droite est $\cos(-\alpha\pi)$ qui vaut bien $\cos(\alpha\pi)$.

c) f est paire sur $]-\pi, \pi]$ (donc partout par 2π-périodicité) car la fonction cos est paire. Elle n'est pas impaire, sinon comme elle est paire elle serait nulle partout, ce qui n'est pas le cas.

d) Comme f est paire, tous les b_n sont nuls. On a aussi

$$2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t)\, dt = [\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}]_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha},$$

la dernière égalité provenant de ce que sin est une fonction impaire. Finalement $a_0 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$.

e) En utilisant la formule pour $\cos a \cos b$, on a :

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t)\,dt =$$

$$\frac{1}{2}([\frac{\sin((\alpha+n)t)}{\alpha+n}]_{-\pi}^{\pi} + [\frac{\sin((\alpha-n)t)}{\alpha-n}]_{-\pi}^{\pi}).$$

En utilisant encore que sin est impaire, on obtient

$$[\frac{\sin((\alpha+n)t)}{\alpha+n}]_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n}$$

et de même

$$[\frac{\sin((\alpha-n)t)}{\alpha-n}]_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}.$$

D'où la formule voulue.

f) La formule rappelée donne que

$$\sin((\alpha+n)\pi) = \sin(\alpha\pi + n\pi) = \sin(\alpha\pi - n\pi) = (-1)^n \sin(\alpha\pi).$$

D'après e), on a alors

$$\pi a_n = (-1)^n \sin(\alpha\pi)(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}) = \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

On en déduit bien

$$a_n = \frac{2(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

g) Il suffit d'appliquer le théorème de convergence de Dirichlet. La fonction f est continue et dérivable à droite et à gauche en tout point. On a donc pour tout $t \in]-\pi, \pi]$:

$$f(t) = \cos(\alpha t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt),$$

ce qui donne la formule voulue avec d) et g).

h) On applique g) avec $t = \pi$ et on divise les deux membres par $\sin(\alpha\pi)$.

Exercice 3 : Transformée de Fourier.

a) La fonction f s'écrit $f = \sqrt{2\pi}G$, où G est la gaussienne. Par linéarité de la transformée de Fourier, on a

$$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}\widehat{G}(k) = \sqrt{2\pi}G(k) = f(k).$$

Ainsi f est sa propre transformée de Fourier.

b) On a $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ et

$$f''(x) = -(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}) = -f(x) + x^2 f(x).$$

Ainsi $g(x) = f(x) + f''(x)$.

c) La tranformée de Fourier de f' est donnée par

$$\hat{f}'(k) = ik\hat{f}(k).$$

En recommençant, on a

$$\hat{f}''(k) = ik\hat{f}'(k) = -k^2\hat{f}(k).$$

En appliquant b) puis a), cela donne

$$\hat{g}(k) = \hat{f}(k) - k^2\hat{f}(k) = (1-k^2)f(k) = (1-k^2)e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

Exercice 4 : Séries entières.

a) Pour $z = 1$, la série diverge mais pour $|z| < 1$, elle converge absolument par comparaison avec une série géométrique car $|\frac{z^{2n+1}}{2n+1}| \leq |z^{2n+1}| = |z||z^2|^n$. Le rayon de convergence est donc 1.

b) On sait qu'on peut toujours dériver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$, où R est le rayon de convergence. Ici cela donne

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

en utilisant la formule de la somme d'une série géométrique. On obtient $f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$, donc on peut prendre $A = 1/2$.

c) Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$, ce qui avec b) donne

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2}.$$

d) En $z = -1$ la série est $\sum -\frac{1}{2n+1}$, qui est de même nature que $\sum \frac{1}{2n+1}$, laquelle diverge car c'est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à $\frac{1}{2n}$; or on sait que la série $\sum \frac{1}{2n}$ diverge. Ainsi la série entière considérée diverge pour $z = 1$.