Corrigé du Partiel de mathématiques générales, M1

Exercice 1 : Groupes abéliens (8 points)

1. a) On a

$$\#A = (\#\ker m_p)(\#\mathrm{Im}\, m_p) \quad (\#A/\#\mathrm{Im}\, m_p) = \#A_p,$$

d'où on déduit que $A[p] = \ker m_p$ et A_p ont même cardinal (1 point).

b) Le seul point non évident est que la définition $\bar{n}.x = nx$ a bien un sens. Or, si $\bar{n} = \bar{m}$, alors il existe un entier s tel que $m = n + rp$, d'où $mx = nx + spx = mx$ vu que $px = 0$ (1 point).

c) On note que $A[p]$ et A_p sont des groupes abéliens vérifiant la propriété satisfaite par B en b). Comme ils sont finis, ce sont des $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espaces vectoriels de dimension finie r, ils sont donc isomorphes à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r$ (1 point).

d) Si les groupes en question sont non nuls, on a $r > 0$ avec les notations de c), donc p divise le cardinal de $A[p]$, et a fortiori le cardinal de A par le théorème de Lagrange. Si réciproquement p divise le cardinal de A, alors le théorème de Sylow donne que A contient un p-groupe non trivial. On chosit alors un élément non nul x de A, qui est d'ordre p^m avec $m \geq 1$. Alors $p^m x = 0$ et $p^{m-1}x$ est un élément non nul dans $A[p]$ (1.5 point).

2. a) Pour $A = \mathbf{Z}$, on obtient que $A[p] = 0$ est de cardinal 1 et $A_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est de cardinal p. Pour $A = \mathbf{C}^*$, le groupe $A[p]$ est celui μ_p des racines p-ièmes de l'unité, qui est de cardinal p, tandis que A_p est le groupe de cardinal 1 vu que $x \mapsto x^p$ est surjectif dans $\mathbf{C}^*$ (1 point).

b) On utilise a) : il suffit de prendre $A = \prod_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{C}^*$ pour obtenir $A[p] = \prod_{n \in \mathbf{N}^*} \mu_p$ et A_p trivial (1.5 point).

c) Le principe est le même, on prend au contraire $A = \prod_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{Z}$ pour obtenir $A[p] = 0$ et $A_p = \prod_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (1 point).

Exercice 2 : Groupes symétriques (6 points)

a) Le noyau N de f est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$, non trivial par hypothèse. On sait que c'est alors $\mathcal{S}_n$ ou $\mathcal{A}_n$, et f se factorise en un morphisme

$u : \mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n \simeq \{\pm 1\} \to G$. Or si on identifie $\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n$ à $\{\pm 1\}$, la surjection canonique $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n$ s'identifie à la signature, d'où le résultat (1.5 point).

b) Sinon, H est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ cyclique de cardinal 2 ou 3, donc le sous-groupe engendré par un 3-cycle, par une transposition, ou par une double transposition. Or, on a vu en cours qu'un tel sous-groupe ne peut pas être distingué dans $\mathcal{S}_4$ (1.5 point).

c) Il suffit de prendre le morphisme de passage au quotient $\mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}_4/V_4$, où V_4 est le sous-groupe constitué de l'identité et des doubles transpositions, l'image est de cardinal 6 (1.5 point).

d) Comme G est abélien, l'image d'un commutateur par f est triviale, donc $f(\mathcal{A}_4)$ aussi puisque $\mathcal{A}_4$ est le sous-groupe dérivé de $\mathcal{S}_4$. Comme $\ker f$ est de cardinal au moins 12, l'image de f est de cardinal au plus $24/12 = 2$, puisque $\mathcal{S}_4$ est de cardinal 24 (1.5 point).

Exercice 3 : Opération d'un groupe et centre (6 points+2 points pour le bonus)

1. a) Montrons d'abord que la définition de $\bar{g}.n$ a bien un sens. Si s, t sont deux éléments de G avec $\bar{s} = \bar{t}$, alors il existe $n_1 \in N$ tel que $t = sn_1$, d'où pour tout $n \in N$:
$$tnt^{-1} = s(n_1 n n_1^{-1})s^{-1} = sns^{-1}$$
car N est abélien.

On vérifie ensuite les axiomes d'une action de groupe : si $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ sont dans H, alors

$$(\bar{g}_1\bar{g}_2).n = (g_1g_2)n(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2ng_2^{-1})g_1^{-1} = \bar{g}_1.(\bar{g}_2.n).$$

De plus $\bar{1}.n = n$ est évident. Enfin, l'opération est par automorphismes vu que pour $g \in G$ fixé, l'application $n \mapsto gng^{-1}$ est bien un automorphisme de N car c'est la restriction à N d'un automorphisme de G et sa réciproque est $n \mapsto g^{-1}ng$ (1.5 point).

b) Dire que l'opération est triviale signifie que pour tout $n \in N$ et tout $g \in G$, on a $gn = ng$, autrement dit tout $n \in N$ est dans le centre de G, ce qui est équivalent à $N \subset Z$ (0.5 point).

c) Comme l'opération est par automorphismes, elle correspond à un morphisme $\Phi : H \to \mathtt{Aut}\,(N)$. Du coup, si les cardinaux de $\mathtt{Aut}\,N$ et H sont premiers entre eux, ce morphisme est trivial puisque le cardinal de son image doit diviser celui de H et de $\mathtt{Aut}\,(N)$. D'après b), cela veut dire que $N \subset Z$ (1.5 point).

d) Ici on sait que $\mathtt{Aut}\,(N)$ est abélien car N est cyclique. Du coup, l'image d'un commutateur de H par Φ est triviale. Comme H est parfait, il est engendré par les commutateurs, donc Φ est le morphisme trivial et $N \subset Z$ via b) (1.5 point).

2. a) Soit φ l'automorphisme intérieur $x \mapsto axa^{-1}$ de N avec $a \in N$. Soit $u \in \mathtt{Aut}\,(N)$. Alors $u \circ \varphi \circ u^{-1}$ est l'automorphisme

$$x \mapsto u(au^{-1}(x)a^{-1}) = u(a)xu(a^{-1}) = u(a)xu(a)^{-1},$$

qui est l'automorphisme intérieur associé à $u(a)$, donc reste dans $\mathrm{Int}\,(N)$. Ainsi $\mathrm{Int}\,(N) \lhd \mathtt{Aut}\,(N)$ (1 point).

b) On définit Φ en envoyant la classe dans $H = G/N$ de $s \in G$ sur la classe dans $\mathtt{Out}\,(N)$ de l'automorphisme $\varphi_s : n \mapsto sns^{-1}$. Il s'agit d'abord de vérifier que cette définition a bien un sens. Si $\bar{s} = \bar{t}$, alors on écrit $t = sn_1$ avec $n_1 \in N$, d'où

$$tnt^{-1} = s(n_1 n n_1^{-1})s^{-1},$$

ce qui signifie que φ_t est la composée de φ_s avec l'automorphisme intérieur associé à n_1 dans N. Ainsi φ_t et φ_s ont même image dans $\mathtt{Out}\,(N)$ et Φ est bien défini. Par définition il vérifie que pour tout $g \in G$, $\Phi(\bar{g})$ est la classe de $n \mapsto gng^{-1}$ dans $\mathtt{Out}\,(N)$. Le fait que Φ soit un morphisme résulte du même calcul qu'en 1 a) pour vérifier le premier axiome d'une action de groupes (2 points).