

FEUILLE TD 3 – EXERCICES ALGÈBRE – MODULES I

EXERCICE 1.

Soit A un anneau commutatif non nul.

1. Soit $f : A^r \rightarrow A^r$ une application linéaire, de matrice P dans la base canonique. Montrer que f est surjective si, et seulement si, $\det(P)$ est inversible dans A , et que ceci est équivalent à f bijective.
2. Montrer que f est injective si, et seulement si, $\det P$ est non nul et n'est pas diviseur de zéro dans A .
Indication : Si $\det(P) = a$ est diviseur de zéro, on fixera b non nul dans A tel que $ab = 0$, et on considèrera un mineur m de taille maximale s dans P tel que $mb \neq 0$; puis on construira un vecteur colonne non nul annulé par P à partir de mineurs de taille s de P .
3. En déduire que si $s > r$, une application linéaire de A^s dans A^r n'est pas injective.
4. Montrer que si un A -module M est engendré par une famille de r éléments, alors toute famille comportant au moins $r + 1$ éléments dans M est liée.
5. Soit I un idéal non principal de A . Montrer que I n'est pas un A -module libre. Montrer plus généralement qu'un idéal I d'un anneau A est un sous-module libre de A , si et seulement si, I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A .

EXERCICE 2.

Soit A un anneau commutatif. Soit B une A -algèbre. Un élément $b \in B$ est dit *entier sur A* s'il existe $P \in A[X]$ unitaire tel que $P(b) = 0$.

1. Montrer que si $b \in B$ est entier sur A , alors le A -module $A[b]$ est de type fini.

Soit maintenant $b \in B$, on suppose qu'il existe un $A[b]$ -module D qui est fidèle (i.e. tel que pour tout $\alpha \in A[b]$ non nul, il existe $x \in D$ tel que $\alpha \cdot x \neq 0$) et de type fini en tant que A -module. On choisit une famille génératrice (d_1, \dots, d_n) du A -module D et on écrit pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$b \cdot d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j$$

avec $a_{ij} \in A$.

2. Soit $d \in A[b]$ le déterminant de la matrice $(\delta_{ij}b - a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Montrer que $d \cdot d_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
3. En déduire que $d = 0$, puis que b est entier sur A .
4. Montrer la réciproque de 1. : si $b \in B$ est tel que le A -module $A[b]$ est de type fini, alors b est entier sur A . Montrer que cette condition est aussi équivalente à l'existence d'une sous-algèbre de B contenant b et de type fini en tant que A -module.
5. Montrer que si $b_1, \dots, b_n \in B$ sont entiers sur A , alors le A -module $A[b_1, \dots, b_n]$ est de type fini.
6. On suppose que B est un A -module de type fini. Montrer alors que tout élément de B est entier sur A (on dit alors que B est entier sur A).
7. Montrer que si C est une A -algèbre et B est entier sur A , alors $B \otimes_A C$ est entier sur C . La $A[X]$ -algèbre $B[X]$ est-elle alors entière sur $A[X]$?

EXERCICE 3.

Soient A un anneau commutatif et B une A -algèbre. On note A_1 l'ensemble des éléments de B qui sont entiers sur A . Cet exercice fait appel aux résultats de l'exercice précédent.

1. Montrer que A_1 est un sous-anneau de B qui contient l'image de A dans B . On dit que A_1 est la *fermeture intégrale* de A dans B .
2. Soit C une B -algèbre. Montrer que si c est entier sur B et B est entier sur A , alors c est entier sur A .
3. Avec les notations de 1., montrer que la fermeture intégrale de A_1 dans B est A_1 .
4. On suppose A intègre, de corps des fractions K . On dit que A est *intégralement clos* si la fermeture intégrale de A dans K est A . Montrer que si A est factoriel, alors A est intégralement clos, mais que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas intégralement clos.

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K . Soit L une extension de K (i.e. un corps qui contient K). Soit $x \in L$ un élément entier sur A , on note $P \in K[X]$ le polynôme minimal de x sur K , c'est-à-dire le polynôme unitaire non nul de degré minimal de $K[X]$ qui annule x .

5. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $Q(x) = 0$ et P divise Q dans $K[X]$.
6. Soient a_1, \dots, a_r les racines de P (dans un corps de décomposition M de P sur K). Montrer que les a_i sont entiers sur A pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.
7. En déduire que si A est intégralement clos, alors $P \in A[X]$.
8. On prend $A = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$. Montrer que si $y \in L$ est entier sur \mathbb{Z} , il est racine d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 1 ou 2.

9. Montrer que $\mathbf{Z}(i\sqrt{5})$ est la fermeture intégrale de \mathbf{Z} dans $\mathbf{Q}(i\sqrt{5})$. En particulier, $\mathbf{Z}(i\sqrt{5})$ est intégralement clos (mais pas factoriel).

EXERCICE 4.

Soit A un anneau commutatif. Soit I un ensemble ordonné filtrant (c'est-à-dire que si (i, j) sont dans I , il existe $k \in I$ tel que $k \geq i$ et $k \geq j$). Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -modules. On suppose donné pour tout $j \geq i$ un morphisme de A -modules $f_{ij} : M_i \rightarrow M_j$ avec $f_{ii} = \text{Id}$ et $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ pour tous i, j, k de I vérifiant $i \leq j \leq k$.

On considère l'ensemble E des couples (i, x_i) avec $i \in I$ et $x_i \in M_i$ (E est l'union disjointe des M_i).

1. On définit une relation \sim sur E par $(i, x_i) \sim (j, x_j)$ s'il existe $k \in I$ vérifiant : $k \geq i, k \geq j$, et $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

On appelle *limite inductive* des M_i l'ensemble quotient M de E par cette relation et φ_i l'application de M_i dans M qui envoie x_i sur la classe de (i, x_i) .

2. Montrer qu'il existe une unique structure de A -module sur M telle que les applications φ_i soient des morphismes de A -modules. On note

$$M = \varinjlim_{i \in I} M_i.$$

3. Montrer que le A -module $\bigoplus_{i \in I} M_i$ est isomorphe à une limite inductive des $\bigoplus_{i \in J} M_i$, où J est une partie finie de I .

4. Montrer que si N est un A -module, alors pour toute famille de morphismes $u_i : M_i \rightarrow N$ vérifiant $u_j \circ f_{ij} = u_i$ si $i \geq j$, il existe un unique morphisme $u : M := \varinjlim_{i \in I} M_i \rightarrow N$ tel que $u_i = u \circ \varphi_i$.

5. Montrer que

$$N \otimes_A \varinjlim_{i \in I} M_i \simeq \varinjlim_{i \in I} (N \otimes_A M_i).$$

EXERCICE 5.

Soient A un anneau principal et B un A -module sans torsion (i.e. l'égalité $\alpha x = 0$ avec $\alpha \in A$ et $x \in B$ implique $\alpha = 0$ ou $x = 0$). Soient $u : M \rightarrow N$ un morphisme injectif de A -modules et $u_B : M \otimes_A B \rightarrow N \otimes_A B$ le morphisme induit. Cet exercice utilise l'exercice 14.

1. Montrer que si B est un A -module de type fini, alors u_B est injectif.

2. On ne suppose plus que B est de type fini. Montrer que B est isomorphe à la limite inductive d'une famille de A -modules de type fini.

3. En déduire que le résultat de 1. vaut encore sans l'hypothèse que B est de type fini.

4. Montrer par contre que si B est de type fini mais n'est plus supposé sans torsion, le résultat de 1. tombe en défaut.

EXERCICE 6 — EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES. Soit A un anneau commutatif non nul. On suppose que A n'est pas un corps. Donner des exemples :

1. de A -modules non libres et montrer que si tout A -module est libre alors A est un corps;

2. d'une famille libre à n éléments dans A^n qui n'est pas une base;

3. d'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base;

4. de sous-modules n'ayant pas de supplémentaire;

5. de module libre ayant un sous-module qui n'est pas libre.

6. Soit A un anneau intègre et K son corps de fractions. On suppose que $K \neq A$ (i.e. A n'est pas un corps). Montrer que K n'est pas libre comme A -module.

EXERCICE 7 — MODULES PROJECTIFS. Soit P un A -module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) pour tout morphisme surjectif de A -module $g : E \rightarrow F$ et pour tout $f \in \text{Hom}_A(P, F)$, il existe $h \in \text{Hom}_A(P, E)$ tel que $f = g \circ h$;

b) pour tout morphisme surjectif $\pi : M \rightarrow P$, il existe un morphisme $s : P \rightarrow M$ tel que $\pi \circ s = \text{Id}_P$ (un tel morphisme s est appelé une section de π);

c) Il existe un A -module M tel que $M \oplus P$ est libre.

Un A -module P vérifiant ces propriétés est appelé *module projectif*. Montrer qu'un A -module libre est projectif et donner un exemple de \mathbf{Z} -module qui n'est pas projectif.

EXERCICE 8. Soit A un anneau, M un A -module de type fini et $\phi : M \rightarrow A^n$ un morphisme surjectif de A -modules.

1. Montrer que ϕ admet un inverse à droite ψ (i.e. il existe $\psi : A^n \rightarrow M$ tel que $\phi \circ \psi = \text{id}_{A^n}$).

2. Montrer que $M \simeq \text{Ker}\phi \oplus \text{Im}\psi$.

3. Montrer que $\text{Ker}\phi$ est de type fini.

EXERCICE 9. Soit

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A -modules. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe $r \in \text{Hom}_A(M, M')$ tel que $r \circ i = \text{Id}_{M'}$;
- (ii) Il existe $s \in \text{Hom}_A(M'', M)$ tel que $\pi \circ s = \text{Id}_{M''}$;
- (iii) Il existe $s \in \text{Hom}_A(M'', M)$ tel que $M = i(M') \oplus s(M'')$;
- (iv) La suite suivante est exacte pour tout A -module N

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}_A(M, M'') \longrightarrow 0 ;$$

- (v) La suite suivante est exacte pour tout A -module N

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_A(M', N) \longrightarrow 0 .$$

Une suite vérifiant ces propriétés s'appelle une *suite scindée*.

EXERCICE 10 — CHASSE AU DIAGRAMME.

- 1. Soit A un anneau, et soit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

un diagramme de morphismes de A -modules tel que les deux lignes sont exactes et $g' \circ v = w \circ g$.

Montrer qu'il existe un unique morphisme $u : L \rightarrow L'$ tel que $f' \circ u = v \circ f$. Si v est injective, montrer que u l'est aussi.

- 2. Soit A un anneau, et soit

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \\ L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramme de morphismes de A -modules tel que les deux lignes sont exactes et $f' \circ u = v \circ f$.

Montrer qu'il existe un unique morphisme $w : N \rightarrow N'$ tel que $g' \circ v = w \circ g$. Si v est surjective, montrer que w l'est aussi.

EXERCICE 11 — LEMME DES 5. Soit A un anneau, et soit

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_2 & & \downarrow u_3 & & \downarrow u_4 & & \downarrow u_5 \\ M'_1 & \xrightarrow{f'_1} & M'_2 & \xrightarrow{f'_2} & M'_3 & \xrightarrow{f'_3} & M'_4 & \xrightarrow{f'_4} & M'_5 \end{array}$$

un diagramme de morphisme de A -modules tel que les deux lignes sont exactes et chaque carré est commutatif. Montrer les énoncés suivants.

- 1. Si u_2 et u_4 sont surjectives et si u_5 est injective, alors u_3 est surjective.
- 2. Si u_2 et u_4 sont injectives et si u_1 est surjective, alors u_3 est injective.
- 3. Si u_1 est surjective, u_5 est injective et u_2 et u_4 sont des isomorphismes, alors u_3 est un isomorphisme.

EXERCICE 12 — LEMME DU SERPENT. Soit A un anneau, et soit

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

un diagramme de morphismes de A -modules tel que les deux lignes sont exactes et $v \circ f = f' \circ u$ et $w \circ g = g' \circ v$.

- 1. Montrer que la restriction de f à $\text{Ker}(u)$ a son image contenue dans $\text{Ker}(v)$. Énoncer un résultat analogue pour g .
- 2. Montrer que l'application $\overline{f'} : L'/\text{Im}(u) \rightarrow M'/\text{Im}(v)$ définie¹ par $\overline{x} \mapsto \overline{f'(x)}$ est bien définie et énoncer un résultat similaire pour g' .
- 3. Définir un morphisme $\delta : \text{Ker}(w) \rightarrow L'/\text{Im}(u)$.
- 4. Montrer que la suite

$$\text{Ker}(u) \xrightarrow{f|_{\text{Ker}(u)}} \text{Ker}(v) \xrightarrow{g|_{\text{Ker}(v)}} \text{Ker}(w) \xrightarrow{\delta} L'/\text{Im}(u) \xrightarrow{\overline{f'}} M'/\text{Im}(v) \xrightarrow{\overline{g'}} N'/\text{Im}(w)$$

est exacte.

1. On parle de *conoyaux*.