Feuille TD 4 – Exercices Algèbre – Modules II

Exercice 1.

1. Montrer que les groupes
$$\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/90\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/25\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}/100\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$$
sont isomorphes.
2. Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour un certain nombre premier p.
3. Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Plus généralement de cardinal n avec $n\geqslant 1$ un entier naturel ?
4. Quels sont les entiers n tels que le groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ? Décomposer le groupe $G=(\mathbf{Z}/187\mathbf{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

Exercice 2.
Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est *cyclique* s'il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon $\mathcal{C}(P)$, où P est un polynôme.

1. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique.
2. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, les seuls endomorphismes qui commutent avec u sont les polynômes en u.
3. On dit que u est *irréductible* si les seuls sous-espaces de E stables par u sont E et $\{0\}$. Montrer que u est irréductible si, et seulement s'il est cyclique et son polynôme caractéristique est irréductible..

On dit que u est *semi-simple* si tout sous-espace vectoriel F stable par u admet un supplémentaire stable par u.

4. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, son polynôme minimal est sans facteur carré. En déduire que si u est diagonalisable, alors u est semi-simple. Que dire dans le cas d'un corps algébriquement clos ?
Indication : On pourra munir (E,u) d'une structure de $k[X]/(\pi_u)$-module où π_u est le polynôme minimal de u.
5. Montrer que si K est de caractéristique nulle, alors u est semi-simple si, et seulement si, il existe une extension L de K sur laquelle u est diagonalisable.

Exercice 3. Soient M et N deux A-modules.

1. Soit $f:M\otimes_A N\to P$ un morphisme. Si $f(m\otimes n)=0$ implique $m\otimes n=0$ pour tous $m\in M$ et $n\in N$, l'application f est-elle injective ?
Indication : On pourra considérer $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ définie par $z\otimes w\mapsto zw$.
2. Trouver un exemple tel que $M\otimes_A M=M$? $M\otimes_A M=\{0\}$?
3. Si M est sans torsion, $M\otimes_A M$ est-il sans torsion ?

Exercice 4.

1. Donner les invariants de similitude et les réduites de Frobenius[1] correspondantes des endomorphismes $u\in\mathcal{L}(k^4)$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_u=X^4$ dans les cas suivants : $k=\mathbf{F}_2$, $k=\mathbf{Q}$ et $k=\mathbf{C}$.
2. Même question avec $\chi_u=X(X-1)(X-2)(X-3)$ et $u\in\mathcal{L}(k^6)$ et $\chi_u=(X^2+1)(X^2+X+1)^2$.
3. Calculer les invariants de similitude des matrices
$$\begin{pmatrix} X^2-1 & X(X-1) & (X-1)(X-5)\\ (X-1)(X^2+3X+2) & X^2-3X+2 & (X-1)^3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{Q}[X]) \quad\text{et}\quad \begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbf{Q}).$$

Exercice 5.

1. Soit k un corps. Montrer que le morphisme naturel de k-algèbres de $k(X)\otimes k(Y)$ vers $k(X,Y)$ est injectif mais non surjectif.
2. Soit L une extension de K. Montrer que $K(T)\otimes_K L$ est isomorphe au sous-anneau de $L(T)$ constitué des $\frac{P}{Q}$ avec $P\in L[T]$ et Q non nul dans $K[T]$. Ce sous-anneau est-il un corps ?
3. Cette question fait appel à l'exercice 2 de la feuille de TD III. Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique de $S^{-1}A-$modules
$$S^{-1}(M_1\otimes_A\cdots\otimes_A M_N)\cong S^{-1}M_1\otimes_{S^{-1}A}\cdots\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}M_n.$$

Exercice 6.

1. Autrement dit, la matrice du Théorème 3.18 des notes de cours.

1. Soit A un anneau intègre de corps de fractions k et V un k-espace vectoriel. Montrer que $k \otimes_A V \cong V$.
2. Calculer les produits tensoriels suivants : $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ en tant que $\mathbf{Z}$-module puis

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}, \quad \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{3}), \quad (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[i].$$

Exercice 7. Soient M, M', N, N' des A-modules libres de type fini et $\varphi : M \to M'$ et $\psi : N \to N'$ deux applications A-linéaires. On se propose d'étudier quelques propriétés de l'application linéaire $\varphi \otimes \psi : M \otimes_A M' \to N \otimes_A N'$.

1. Décrire la matrice de $\varphi \otimes \psi$ dans des bases adaptées. La comparer avec celle de $\psi \otimes \varphi$.
2. Montrer qu'on a un isomorphisme

$$\mathsf{Hom}_A(M, M') \otimes_A \mathsf{Hom}_A(N, N') \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(M \otimes_A N, M' \otimes_A N').$$

   Que se passe-t-il si l'on supprime les hypothèse de liberté et de type fini ?
3. Soient maintenant M'', N'' deux A-modules et $\varphi' : M' \to M''$ et $\psi' : N' \to N''$ deux morphismes. Établir que

$$(\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi) = (\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi)$$

   dans $\mathsf{Hom}_A(M \otimes_A N, M'' \otimes_A N'')$.
4. Montrer que si φ et ψ sont des isomorphismes, alors $\varphi \otimes \psi$ aussi. On précisera sa réciproque.
5. Montrer que si φ et ψ sont surjectives, alors $\varphi \otimes \psi$ aussi. Le résultat vaut-il pour l'injectivité ?
   Indication : Considérer $\alpha : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ donnée par $x \mapsto px$.
6. Si φ et ψ sont surjective, établir que $\mathsf{Ker}(\varphi \otimes \psi)$ est le sous-module de $M \otimes_A N$ engendré par les $m \otimes n$ avec $m \in \mathsf{Ker}(\varphi)$ et $n \in \mathsf{Ker}(\psi)$.

Exercice 8. On considère $\mathbf{R}$ en tant que $\mathbf{Z}$-module.

1. Soit $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathsf{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}, \mathbf{Q})$ telle que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(y) = 1$.
2. Soient $x \in \mathbf{R}^{\times}$ et $y \in \mathbf{R}$. Montrer que l'on a

$$x \otimes \overline{y} = 0 \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \mathbf{Q}.$$

3. Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille $\mathbf{Q}$-libre de réels et V le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$ engendré par cette famille. Montrer que si $1 \notin V$, alors $(1 \otimes \overline{x_i})_{i \in I}$ est une famille $\mathbf{R}$-libre[2] de $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

2. On considérera la structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel sur $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ donnée par

$$t \cdot (x \otimes \overline{y}) = (tx) \otimes \overline{y}.$$