Exercices Algèbre - Modules II

EXERCICE 1.

1. Montrer que les groupes
$$\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/90\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/25\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}/100\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$$
sont isomorphes.
2. Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour un certain nombre premier p.
3. Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Plus généralement de cardinal n avec $n \geqslant 1$ un entier naturel ?
4. Quels sont les entiers n tels que le groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ? Décomposer le groupe $G = (\mathbf{Z}/187\mathbf{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

EXERCICE 2.
Soit K un corps. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est *cyclique* s'il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon $\mathcal{C}(P)$, où P est un polynôme.

1. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique.
2. Montrer que u est cyclique si, et seulement si, les seuls endomorphismes qui commutent avec u sont les polynômes en u.
3. On dit que u est *irréductible* si les seuls sous-espaces de E stables par u sont E et $\{0\}$. Montrer que u est irréductible si, et seulement s'il est cyclique et son polynôme caractéristique est irréductible..

On dit que u est *semi-simple* si tout sous-espace vectoriel F stable par u admet un supplémentaire stable par u.

4. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, son polynôme minimal est sans facteur carré. En déduire que si u est diagonalisable, alors u est semi-simple. Que dire dans le cas d'un corps algébriquement clos ?
Indication : On pourra munir (E, u) d'une structure de $k[X]/(\pi_u)$-module où π_u est le polynôme minimal de u.
5. Montrer que si K est de caractéristique nulle, alors u est semi-simple si, et seulement si, il existe une extension L de K sur laquelle u est diagonalisable.

EXERCICE 3. Soient M et N deux A-modules.

1. Soit $f : M \otimes_A N \longrightarrow P$ un morphisme. Si $f(m \otimes n) = 0$ implique $m \otimes n = 0$ pour tous $m \in M$ et $n \in N$, l'application f est-elle injective ?
Indication : On pourra considérer $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par $z \otimes w \mapsto zw$.
2. Trouver un exemple tel que $M \otimes_A M = M$? $M \otimes_A M = \{0\}$?
3. Si M est sans torsion, $M \otimes_A M$ est-il sans torsion ?

EXERCICE 4.

1. Donner les invariants de similitude et les réduites de Frobenius[1] correspondantes des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(k^4)$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_u = X^4$ dans les cas suivants : $k = \mathbf{F}_2$, $k = \mathbf{Q}$ et $k = \mathbf{C}$.
2. Même question avec $\chi_u = X(X-1)(X-2)(X-3)$ et $u \in \mathcal{L}(k^6)$ et $\chi_u = (X^2+1)(X^2+X+1)^2$.
3. Démontrer que toute matrice à coefficients dans k algébriquement clos est conjuguée à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc est de la forme $J_n(\lambda)$.
Indication : Considérer la multiplication par la classe de X dans $k[X]/((X-\lambda)^n)$ dans la base $1, X-\lambda, (X-\lambda)^2, \ldots, (X-\lambda)^n$.
4. Que se passe-t-il dans le cas $k = \mathbf{R}$?
5. Reprendre les questions **1.** et **2.** avec les réduites de Jordan et $k = \mathbf{C}$.
6. Donner les réduites de Jordan des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^4)$ dont les invariants de similitudes sont :

1. Autrement dit, la matrice du Théorème 3.18 des notes de cours.

(i) $P_1 = X(X-1)$ et $P_2 = X(X-1)$;
(ii) $P_1 = X-1$ et $P_2 = X^2(X-1)$;
(iii) $P_1 = X$ et $P_2 = X(X-1)^2$;
(iv) $P_1 = X^2(X-1)^2$.

7. Donner les invariants de similitude des matrices (avec k de caractéristique nulle)

$$U = \mathrm{diag}(J_3(1), J_2(1), J_2(0), 0), \quad V = \mathrm{diag}(J_2(1), 1, J_2(2), J_2(2), J_3(2)) \quad \text{et} \quad W = \mathrm{diag}(1,1,1,2,2)$$

avec

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^T.$$

8. Calculer les invariants de similitude des matrices

$$\begin{pmatrix} X^2-1 & X(X-1) & (X-1)(X-5) \\ (X-1)(X^2+3X+2) & X^2-3X+2 & (X-1)^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{Q}[X]) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Q}).$$

Exercice 5.

1. Soit k un corps. Montrer que le morphisme naturel de k-algèbres de $k(X) \otimes k(Y)$ vers $k(X,Y)$ est injectif mais non surjectif.

2. Soit L une extension de K. Montrer que $K(T) \otimes_K L$ est isomorphe au sous-anneau de $L(T)$ constitué des $\frac{P}{Q}$ avec $P \in L[T]$ et Q non nul dans $K[T]$. Ce sous-anneau est-il un corps ?

3. Cette question fait appel à l'exercice 2 de la feuille de TD III. Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique de $S^{-1}A-$modules

$$S^{-1}(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_N) \cong S^{-1}M_1 \otimes_{S^{-1}A} \cdots \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}M_n.$$

Exercice 6.

1. Soient A un anneau commutatif, M et M' deux A-modules et S une A-algèbre. Montrer qu'on a un morphisme naturel de S-modules $\mathrm{Hom}_A(M, M') \otimes_A S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(M \otimes_A S, M' \otimes_A S)$ et qu'il s'agit d'un isomorphisme dans le cas où M et M' sont libres de type fini.

2. Soient A un anneau commutatif et S_1, S_2 deux A-algèbres. On considère $\iota_1 : S_1 \longrightarrow S_1 \otimes_A S_2$ définie par $\iota_1(s_1) = s_1 \otimes 1$ et $\iota_1 : S_1 \longrightarrow S_1 \otimes_A S_2$ définie par $\iota_2(s_2) = 1 \otimes s_2$. Montrer que ${\iota_1}_{|_A} = {\iota_2}_{|_A}$ et que $\iota_1(s_1)$ commute avec $\iota_2(s_2)$ pour tous $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$. Enfin, établir que ι_i est injective si S_i est libre en tant que A-module pour $i \in \{1,2\}$ ou si A est un corps. Que dire du cas général ?

3. Avec les notations de la question précédente, , montrer que pour tout A-algèbre C et tout morphismes de A-algèbres $\varphi_i : S_i \to C$ pour $i \in \{1,2\}$ tels que $\varphi_1(s_1)$ commute avec $\varphi_2(s_2)$ pour tous $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\chi : S_1 \otimes_A S_2 \longrightarrow C$ tel que $\chi \circ \iota_i = \varphi_i$ pour $i \in \{1,2\}$ et envoyant $s_1 \otimes s_2$ sur $\varphi_1(s_1)\varphi_2(s_2)$.

4. En déduire de deux façons différentes que si $n \in \mathbf{N}^\times$, pour tout anneau commutatif A et toute A-algèbre R, on a un isomorphisme de A-algèbres $\mathcal{M}_n(A) \otimes_A R \cong \mathcal{M}_n(R)$.

Exercice 7.

1. Soit A un anneau intègre de corps de fractions k et V un k-espace vectoriel. Montrer que $k \otimes_A V \cong V$.

2. Calculer les produits tensoriels suivants : $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ en tant que $\mathbf{Z}$-module puis

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}, \quad \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{3}), \quad (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[i].$$

Exercice 8. Soient M, M', N, N' des A-modules libres de type fini et $\varphi : M \longrightarrow M'$ et $\psi : N \longrightarrow N'$ deux applications A-linéaires. On se propose d'étudier quelques propriétés de l'application linéaire $\varphi \otimes \psi : M \otimes_A M' \longrightarrow N \otimes_A N'$.

1. Décrire la matrice de $\varphi \otimes \psi$ dans des bases adaptées. La comparer avec celle de $\psi \otimes \varphi$.
2. On suppose que $\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(M')$ et que $\operatorname{rang}(N) = \operatorname{rang}(N')$. Calculer les valeurs propres de $\varphi\otimes\psi$ et de $\varphi\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes\psi$. Calculer $\det(\varphi \otimes \psi)$.
3. Montrer qu'on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_A(M, M') \otimes_A \mathrm{Hom}_A(N, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, M' \otimes_A N').$$

Que se passe-t-il si l'on supprime les hypothèse de liberté et de type fini ?

4. Soient maintenant M'', N'' deux A-modules et $\varphi' : M' \to M''$ et $\psi' : N' \to N''$ deux morphismes. Établir que

$$(\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi) = (\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi)$$

dans $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, M'' \otimes_A N'')$.

5. Montrer que si φ et ψ sont des isomorphismes, alors $\varphi \otimes \psi$ aussi. On précisera sa réciproque.
6. Montrer que si φ et ψ sont surjectives, alors $\varphi \otimes \psi$ aussi. Le résultat vaut-il pour l'injectivité ?
Indication : Considérer $\alpha : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ donnée par $x \mapsto px$.
7. Si φ est injective et que $\varphi(M)$ est un facteur direct de N, alors montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^\times$, $\varphi^{\otimes k} : M^{\otimes k} \to N^{\otimes k}$ est injective, d'image un facteur direct de $N^{\otimes k}$.
8. Si φ et ψ sont surjective, établir que $\mathrm{Ker}(\varphi \otimes \psi)$ est le sous-module de $M \otimes_A N$ engendré par les $m \otimes n$ avec $m \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $n \in \mathrm{Ker}(\psi)$.

Exercice 9. On considère $\mathbf{R}$ en tant que $\mathbf{Z}$-module.

1. Soit $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}, \mathbf{Q})$ telle que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(y) = 1$.
2. Soient $x \in \mathbf{R}^\times$ et $y \in \mathbf{R}$. Montrer que l'on a

$$x \otimes \overline{y} = 0 \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \mathbf{Q}.$$

3. Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille $\mathbf{Q}$-libre de réels et V le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$ engendré par cette famille. Montrer que si $1 \notin V$, alors $(1 \otimes \overline{x_i})_{i\in I}$ est une famille $\mathbf{R}$-libre[2] de $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

2. On considérera la structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel sur $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ donnée par

$$t \cdot (x \otimes \overline{y}) = (tx) \otimes \overline{y}.$$