Feuille TD 2 - Exercices Algèbre - Groupes II

Exercice 1. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice fini m. On note G/H l'ensemble des classes de G modulo H (ceci n'est pas un groupe en général). Pour $g \in G$, on note $h_g : G/H \to G/H$ l'application $aH \mapsto gaH$.

1. Montrer que h_g est une bijection, et que l'application h qui envoie g sur h_g est un homomorphisme de G dans $\mathfrak{S}(G/H)$.
2. Montrer que $[G : \mathrm{Ker}(h)]$ divise $m!$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(h)$ est contenu dans H.
4. Montrer que $[H : \mathrm{Ker}(h)]$ divise $(m-1)!$.
5. Application 1 : montrer que si H est d'indice 2 dans G, alors H est distingué dans G.
6. Application 2 : montrer que si G est un p-groupe, et si H est d'indice p dans G, alors H est distingué dans G.
7. Application 3 : Supposons que G est fini et que $m = [G : H]$ est le plus petit diviseur premier de l'ordre de G. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 2. Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué K de G, contenu dans H, tel que $[G : K]$ divise $n!$. (On pourra considérer l'action de G sur G/H).
2. On suppose que G est fini. Montrer que G n'est pas la réunion des conjugués gHg^{-1} de H.
3. Montrer que **2.** reste vrai si G est infini.
4. Est-ce que **2.** reste vrai si on ne suppose plus que $[G : H]$ est fini ?
5. Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X tel que $\#X \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $g \in G$ ne fixant aucun point de X.
6. Soit $k \geqslant 5$ un entier et soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ d'indice compris entre 2 et $k-1$. Montrer que $H = \mathfrak{A}_k$. On admettra le fait que les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_k$ sont $\{1\}$, $\mathfrak{A}_k$ et $\mathfrak{S}_k$.

Exercice 3.

1. Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est cyclique. Rappeler pourquoi G est abélien. Le résultat tient-il toujours si l'on suppose seulement que $G/Z(G)$ est abélien ?
2. Montrer qu'un p-groupe d'ordre p^n possède des sous-groupes d'ordre p^i pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$
3. Soient p un nombre premier et P un p-Sylow de G. Montrer que $P \cdot Z(G)$ est un sous-groupe de G, et que $(P \cdot Z(G))/Z(G)$ est un p-Sylow de $G/Z(G)$.
4. Montrer que ceci induit une bijection entre les p-Sylow de G et les p-Sylow de $G/Z(G)$.

Exercice 4. Soient p un nombre premier et G un p-groupe fini. Soit $(A, +)$ un groupe abélien avec $A \neq \{0\}$. On suppose donnée une action de G sur A par automorphismes, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, la bijection $x \mapsto g \cdot x$ de A dans A est un automorphisme du groupe abélien A. On suppose de plus que A est *de torsion p-primaire*, *i.e.* pour tout $x \in A$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p^m x = 0$.

1. Montrer que si A est fini, son cardinal est une puissance de p (on pourra utiliser la classification des groupes abéliens finis, ou encore le théorème de Sylow).
2. On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ dans A tel que pour tout $g \in G$, on ait $g \cdot x = x$.
3. On ne suppose plus A fini. Soit $a \neq 0$ dans A. Montrer que le sous-groupe B de A engendré par $\{g \cdot a, g \in G\}$ est fini.
4. En déduire que le résultat de **2.** vaut encore sans l'hypothèse A fini.

Exercice 5. Montrer que tout groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 6 — Isomorphismes exceptionnels. Soit n un entier et $K = \mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ le corps fini à p éléments avec p un nombre premier. Soit E le K-ev K^n. On note $\mathbf{P}(E)$ l'ensemble des droite vectorielles de K^n (*espace projectif de dimension* $n-1$).

1. Montrer qu'il existe un morphisme injectif Φ de $\mathrm{PGL}_n(K)$ dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}(\mathbf{P}(E))$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(E)$ est de cardinal $p+1$; on identifie Φ à un morphisme $\mathrm{PGL}_2(K) \to \mathfrak{S}_{p+1}$.
3. On prend $p = 2$. Montrer que Φ induit des isomorphismes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_2)$ sur $\mathfrak{S}_3$.
4. On prend $p = 3$. Montrer que Φ induit un isomorphisme de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3)$ sur $\mathfrak{S}_4$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_3)$ sur $\mathfrak{A}_4$. Les groupes $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_3)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ sont-ils isomorphes ?
5. On prend $p = 5$. Montrer que Φ induit un isomorphisme de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5)$ sur $\mathfrak{S}_5$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$ sur $\mathfrak{A}_5$ (on rappelle que tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$ pour $n \geqslant 5$, conséquence non triviale de la simplicité des groupes alternés).

Exercice 7 — Groupes résolubles.

1. Montrer que tout sous-groupe et tout groupe quotient d'un groupe résoluble est résoluble.
2. Montrer plus généralement que toute extension d'un groupe résoluble par un groupe résoluble est résoluble.
3. Donner un exemple d'un groupe résoluble qui n'est pas nilpotent.
4. Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe d'ordre pq est résoluble.
5. Même question pour les groupes d'ordre pqr, si $p > q > r$ sont trois nombres premiers (on pourra évaluer le nombre d'éléments d'ordre p et le nombre d'éléments d'ordre q).
6. Même question pour les groupes d'ordre p^2q (on pourra être amener à comparer $1 + p$ et q).

Exercice 8 — Groupes simples d'ordre 60. Soit G un groupe simple d'ordre 60. On veut montrer que G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

1. Montrer que G admet six 5-Sylow.
2. En déduire qu'il existe un sous-groupe G' de $\mathfrak{A}_6$, d'indice 6, qui est isomorphe à G.
3. En faisant agir G' sur le quotient $\mathfrak{A}_6/G'$, plonger G' dans $\mathfrak{S}_5$.
4. Conclure.

Exercice 9. Soient H et N des groupes et soient φ et $\psi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ des morphismes. On veut trouver des conditions pour que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ soient isomorphes.

1. S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \varphi \circ \alpha$, montrer que l'on a le résultat attendu.
2. S'il existe un automorphisme u de N tel que
$$\forall h \in H, \quad \varphi(h) = u \circ \psi(h) \circ u^{-1},$$
montrer que la conclusion vaut encore.
3. Si H est cyclique et si $\varphi(H) = \psi(H)$, montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

Exercice 10. Soit p un nombre premier impair.

1. Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$.
2. Soient φ et ψ des morphismes non triviaux de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$. En notant pour tout entier k, φ_k le morphisme défini par $\varphi_k(x) = \varphi(kx)$, montrer qu'il existe un entier k et une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ tels que $\psi = P\varphi_k P^{-1}$.
3. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
4. Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
5. Soit G un groupe d'ordre p^3 non cyclique, contenant un élément x d'ordre p^2. Montrer que $\langle x \rangle$ est distingué dans G et que G est produit semi-direct de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ par $\langle x \rangle \cong \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.
6. Décrire les classes d'isomorphisme de groupes de cardinal p^3 (on pourra raisonner par exemple suivant l'ordre maximal d'un élément du groupe).

Exercice 11 — Groupes nilpotents.
On dit qu'un sous-groupe H de G est maximal si $H \neq G$ et qu'aucun sous-groupe propre de G n'est compris strictement entre H et G.

1. Montrer qu'un groupe nilpotent est résoluble. Que dire de la réciproque ?
2. Montrer que le centre d'un groupe nilpotent est non trivial.
3. Montrer que si G est nilpotent et que H est un sous-groupe de G, alors H est nilpotent.
4. Montrer que si $H \lhd G$ et que G est nilpotent, alors G/H est nilpotent.
5. On suppose H et G/H nilpotents. Le groupe G est-il nilpotent ?
6. Soient p, q, r trois nombres premiers. Montrer que tout groupe d'ordre pqr est résoluble. Un tel groupe est-il nilpotent ?
7. On suppose G fini. Montrer que G est nilpotent si, et seulement si, tout sous-groupe maximal de G est distingué et si, et seulement si, G est produit direct de ses p-Sylow pour tout nombre premier p divisant $\#G$.

Exercice 12. Soit $n \geqslant 1$.

1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ tel que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est intérieur.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) = \left\{\tau \in \mathfrak{S}_n \ : \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\right\}$ de σ.
3. En déduire que si $n \neq 6$, on a $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$.
4. Soit $n \geqslant 5$ tel que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués.
5. En utilisant les 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$, montrer qu'il existe un sous-groupe H d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ opérant transitivement sur $\{1, \ldots, 6\}$.
6. Construire géométriquement un sous-groupe H' de $\mathfrak{S}_6$ vérifiant les mêmes propriétés que H.
7. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \neq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$.