Université Paris Sud **Année 2009-2010**

M2 **Géométrie Algébrique**

TD n° VI

Exercice A

Étant donné un anneau A, on rappelle qu'un A-module P est *projectif* si pour tout morphisme surjectif de A-modules $M \to Q$ le morphisme (de groupes abéliens)

$$\mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, Q)$$

qui s'en déduit (par fonctorialité) est encore surjectif ; si et seulement si de toute suite exacte de A-modules

$$0 \to N \longrightarrow M \longrightarrow Q \to 0$$

on déduit (par fonctorialité) une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, Q) \to 0\ ;$$

si et seulement si toute suite exacte de A-modules

$$0 \to N \longrightarrow M \longrightarrow P \to 0$$

est scindée ; si et seulement si P est facteur direct d'un A-module libre.

1 .a) Montrer qu'un A-module projectif P est plat c'est-à-dire que le foncteur $M \mapsto P \otimes_A M$ est exact.
b) En déduire que si A est un anneau intègre, tout A-module projectif est sans torsion.

c) En déduire que si A est un anneau principal intègre, un A-module est projectif si et seulement s'il est libre.

2) Soit A un anneau local noethérien et P un A-module de type fini.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
a) P est plat.

b) P est libre.

c) P est projectif.

3) Soit A un anneau noethérien et P un A-module de type fini.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
a) P est plat.

b) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $P_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module libre de type fini.

c) Il existe une famille finie $\mathbf{F} \subset A$, telle que $\mathbf{f}$ engendre l'unité et pour tout $f \in \mathbf{F}$, $f^{-1}P$ est un $f^{-1}A$-module libre de type fini.

d) P est un A-module projectif.

4) Soit A un anneau noethérien et $X := \mathrm{Spec}(A)$ le schéma affine associé.
a) Montrer que si deux faisceaux localement libres E, F vérifient $E \otimes F \cong \mathcal{O}_X$, alors E et F sont de rang 1 et F s'identifie au dual

$$E^* := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(E, \mathcal{O}_X)$$

de E.

b) Inversement, vérifier qu'on a un isomorphisme naturel

$$E \otimes E^* \;\cong\; \mathrm{End}(E)$$

et que dans le cas où E est de rang 1, on a de plus

$$\mathrm{End}(E) \;=\; \mathcal{O}\;.$$

Exercice B

Soit

$$S \;:=\; \bigoplus_{i\geq 0} S_i$$

un anneau gradué. Soient M et M' deux S-modules gradués tel que $M_i = M'_i$ pour i assez grand.

Identifier les faisceaux quasi-coherents $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$ sur $\mathrm{Proj}(S)$.

Exercice C

Montrer que tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur un schéma affine X est engendré par ses sections globales (*i.e.*la flèche de localisation $\Gamma(X,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O} \;\rightarrow\; \mathcal{F}$ est surjective, autrement dit pour tout point $x \in X$ $\mathcal{F}_x$ est engendré comme $\mathcal{O}_x$-modules par les tiges de sections globales).

Exercice D

Soit S un schéma. On dira qu'un faisceau $\mathcal{A}$ sur S est une $\mathcal{O}_S$-*algèbres quasi-choérente* si $\mathcal{A}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérent en tant que faisceau de $\mathcal{O}_S$-module.

1) Étant donée une $\mathcal{O}_S$-algèbre $\mathcal{A}$, montrer qu'il existe un unique S-schéma $f \;:\; X \;\rightarrow\; S$ tel que :

i) Pour tout ouvert $U \subset S$,

$$f^{-1}(U) \;\cong\; \mathrm{Spec}(\mathcal{A}(U))\;;$$

ii) la correspondance précédente est « fonctorielle » en U c'est-à-dire que pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U \subset S$ l'inclusion naturelle $f^{-1}(V) \;\hookrightarrow\; f^{-1}(V)$ est donnée par le morphisme de restriction $\mathcal{A}(U) \;\rightarrow\; \mathcal{A}(V)$.

Le schéma S et la $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$ étant comme ci-dessus le S-schéma

$$f \;:\; X \;\rightarrow\; S$$

est usuellement noté $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$.

2 .a) Étant donné une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}$ montrer que le morphisme

$$f \;:\; X \;:=\; \mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \;\rightarrow\; S$$

est affine et qu'on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{A} \;\cong\; f_*\mathcal{O}_X\;.$$

b) Réciproquement, montrer que si $f \;:\; X \;\rightarrow\; X$ est une morphisme affine, $f_*\mathcal{O}_X$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente et on a un isomorphisme naturel

$$X \;\cong\; \mathrm{Spec}(f_*\mathcal{O}_X)\;.$$

Exercice E

Soit $X \;:=\; \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine.

1) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Montrer qu'il existe une famille (éventuellement infinie) $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de sous-faisceaux de $\mathcal{F}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

i) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, le faisceau $\mathcal{F}_\lambda$ est cohérent.

ii) Pour toute famille finie $J \subset \Lambda$, il existe $\beta \in \Lambda$ tel que $\mathcal{F}_\lambda$ soit un sous-faisceau de $\mathcal{F}_\beta$ pour tout $\lambda \in J$.

iii) Pour tout ouvert affine principal $V = D(f)$ de X, on a

$$\mathcal{F}(V) \;=\; \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda(V)\ .$$

2) Soient U un ouvert non vide de X et $j : U \to X$ l'immersion ouverte associée. On considère un faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur U et un recouvrement fini $(U_i)_{i\in I}$ de U par un nombre fini d'ouverts affines principaux de X.

a) Montrer qu'il existe un sous-faisceau cohérent $\mathcal{R}$ de $j_*\mathcal{G}$ tel que

$$\mathcal{R}(U_i) \;=\; (f_*\mathcal{G})(U_i)$$

pour tout $i \in I$.

b) En déduire que la restriction de $\mathcal{R}$ à U est un $\mathcal{O}_U$-module isomorphe à $\mathcal{G}$.

Exercice F

Soit X un schéma projectif et géométriquement intègre sur un corps k. Soit K le corps des fonctions de X.

1) Soit D un diviseur de Cartier sur X. On suppose qu'il existe deux diviseurs de Cartier effectifs D_1, D_2 sur X tels que $D \simeq D_1$ et $-D \simeq D_2$.

a) Montrer qu'on peut écrire $D = (U_i, f_i)$ où U_i est un recouvrement ouvert de X et $f_i \in K^*$, avec la condition : il existe $u, v \in K^*$ tels que chaque f_i vérifie : $f_i.u \in \mathcal{O}_X(U_i)$ et $f_i^{-1}v \in \mathcal{O}_X(U_i)$.

b) Montrer que uv est un élément constant $\lambda \in k^*$.

c) En déduire que $D \simeq 0$.

2) Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Montrer que si $H^0(X, \mathcal{L})$ et $H^0(X, \mathcal{L}^{-1})$ sont tous deux non nuls, alors $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$.

3) Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et

$$\overline{X} \;:=\; X \times_k \overline{k}\ .$$

On note $\pi : \overline{X} \to X$ la projection. L'image inverse $\mathcal{L} \to \pi^*\mathcal{L}$ définit une application

$$\theta \;:\; \mathrm{Pic}(X) \;\to\; \mathrm{Pic}(\overline{X})\ .$$

Montrer que θ est injective.

Exercice G

Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ est *plat* en un point x de X (le morphisme f étant sous-entendu) si sa fibre $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{S,f(x)}$-module plat. Ainsi, dire que le morphisme f est plat en x signifie que $\mathcal{O}_X$ est plat en x.

1) Soient A un anneau et

$$0 \;\to\; M' \;\longrightarrow\; M \longrightarrow M'' \;\to\; 0$$

une suite exacte de A-modules. On suppose M'' plat. Montrer que M' est plat si et seulement si M est plat.

2) On suppose dans toute la suite que A est un anneau local noethérien et que $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur

$$X \;:=\; \mathbb{P}^n_A \;=\; \mathrm{Proj}(A[T_0, ..., T_n]),$$

avec $\mathcal{F}$ plat (pour le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(A)$.)
a) Soit $\mathcal{U}$ le recouvrement ouvert de X donné par les ouverts standard $D_+(T_0)$,...,$D_+(T_n)$. Montrer que pour tout $i \geq 0$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, le terme $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m))$ du complexe de Čech de

$$\mathcal{F}(m) \;=\; \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m)$$

est un A-module plat.

b) Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $m \geq m_0$, la suite

$$0 \;\to\; H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \;\to\; C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \;\to\; C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \;\to\; \dots \;\to\; C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \to\; 0$$

soit exacte.

c) En déduire que $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ est un A-module libre de type fini pour $m \geq m_0$.

Exercice H

Soit X un espace topologique. On considère un fermé Z de X et un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur X. On note $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ le sous-groupe de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ constitué des sections globales s *à support dans* Z, c'est-à-dire telles que la fibre s_x soit nulle pour tout $x \notin Z$.
1) Montrer que si V est un ouvert de X contenant Z, alors la restriction

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \;\to\; \Gamma_Z(V, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

2) On suppose maintenant que X est un schéma affine et Z un fermé de X tel que l'ouvert $U = X - Z$ soit affine. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X, on considère une résolution injective

$$0 \;\to\; \mathcal{F} \;\to\; I^0 \;\to\; I^1 \;\to\; I^2 \;\to\; \dots$$

de $\mathcal{F}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules.
a) Montrer que les suites

$$\Gamma(X, I^0) \;\to\; \Gamma(X, I^1) \;\to\; \Gamma(X, I^2) \;\to\; \dots$$

et

$$\Gamma(U, I^0) \;\to\; \Gamma(U, I^1) \;\to\; \Gamma(U, I^2) \;\to\; \dots$$

sont exactes.

b) Montrer que pour tout $j \geq 0$, la restriction $\Gamma(X, I^j) \;\to\; \Gamma(U, I^j)$ est surjective.

c) On note $H^i_Z(X, \mathcal{F})$ ($i \geq 0$) les foncteurs dérivés du foncteur $\Gamma_Z(X, .)$ (dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules). Montrer que si $i \geq 2$, alors on a

$$H^i_Z(X, \mathcal{F}) \;=\; 0\,.$$

3) Soit X un schéma affine et Z un fermé de X tel qu'il existe un ouvert affine $V \supset Z$ avec $V - Z$ affine. Montrer que $H^i_Z(X, \mathcal{F}) \;=\; 0$.