Université Paris Sud — Année 2009-2010

M2 — Géométrie Algébrique

TD n° III

Exercice A

Pour une catégorie C, **on notera abusivement** $X \in \mathbf{C}$ **pour** X ***objet de*** C. ***Foncteur*** **signifiera (sauf mention du contraire)** ***foncteur contravariant.***

On notera Ann **la catégorie des anneaux commutatifs unitaires et** Sch **la catégorie des schémas.**

1 .a) Étant donné un schéma X, montrer qu'on définit bien un foncteur contravariant sur $\mathbf{Ann}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles $\mathbf{Ens}$, encore noté

$$\begin{array}{rrcl} X: & \mathbf{Ann} & \to & \mathbf{Ens} \\ & A & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}(A), X)\ . \end{array}$$

b) Pour tout $B \in \mathbf{Ann}$ que vaut $X(B)$ si $X := \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine ?

On dit qu'un foncteur $F : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}$ **est** ***local*** **(pour la topologie de Zariski,) si pour tout** $A \in \mathrm{Ann}$, **tout** n**-uplet** $(f_1, \ldots, f_n)$ **engendrant l'unité c'est-à-dire en fait tel que**

$$\{\mathrm{Spec}(f_i^{-1}A)_{1 \leq i \leq n}\}$$

soit un recouvrement ouvert de Zariski pour $\mathrm{Spec}(A)$, **la suite**

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A), F) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(f_i^{-1}A), F) \longrightarrow \prod_{(i,j)\in[1,n]\times[1,n]} \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}((f_i f_j)^{-1}A), F)$$

est exacte.

2 .a) Montrer que, pour tout $A \in \mathbf{Ann}$, le foncteur $\mathrm{Spec}(A) : \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$ défini comme en 1.a est local.
b) En déduire que si X est un schéma, le foncteur $X : \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$ est local.

Pour un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ens}$, **on dira qu'un foncteur** $G : \mathbf{C} \to \mathrm{Ens}$ **est un** ***sous-foncteur de*** F, **si pour tout** $X \in \mathbf{C}$, $G(X)$ **est fonctoriellement un sous-ensemble de** $F(X)$.

Pour tout $A \in \mathrm{Ann}$, **on dit qu'un foncteur contravariant** $U : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}$ **est un** ***sous-foncteur ouvert*** **de** $\mathrm{Spec}(A) : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}$ **s'il existe un idéal** $\mathfrak{I} \subset A$ **tel que pour tout** $B \in \mathrm{Ann}$, $U(B)$ **est le sous-ensemble de** $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A, B)$ **formé des morphismes d'anneaux** $\phi : A \to B$ **tels que l'image de l'application induite** $\mathrm{Spec}(\phi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ **est contenue dans l'ouvert** $U_{\mathfrak{I}} := \mathrm{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{I})$. **En général, pour un foncteur** $F : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}$ **on dira qu'un foncteur** $U \to F$ **est un** ***sous-foncteur ouvert de*** F **si pour tout** $A \in \mathrm{Ann}$ **et toute flèche** $\mathrm{Spec}(A) \to F$, $U \times_F \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$ **est un sous-foncteur ouvert de** $\mathrm{Spec}(A)$ **au sens précédent.**

3 .a) Vérifier que la terminologie ci-dessus est cohérente à savoir qu'un sous-foncteur ouvert est bien un sous-foncteur.

b) Montrer que si X est un schéma, il existe un ensemble $\mathcal{U}$ de sous-foncteurs ouverts du foncteur $X : \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$ défini comme en 1.a, tel que :
i) Pour tout $U \in \mathcal{U}$, $U = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine.

ii) L'espace topologique sous-jacent à X est recouvert pas la réunion des espaces topologiques sous-jacents à aux $U \in \mathcal{U}$.

4) Soit maintenant donné un foncteur $X : \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$ qui est local et possède un recouvrement $\mathcal{U}$ par des sous-foncteurs ouverts comme en 3.b.
a) Montrer que pour tout couple (U, V) d'éléments de $\mathcal{U}$, $U \times_X V$ est un sous-foncteur ouvert de U et V respectivement et définit donc des ouverts homéomorphes de l'espace topologique sous-jacent à U et V qu'on notera $U \cap V$.

b) Montrer qu'on définit bien un espace topologique $|X|$ en prenant la réunion des $U \in \mathcal{U}$ et en identifiant pour tout couple (U, V) d'éléments de $\mathcal{U}$ un point de U à un point de V s'il est dans $U \cap V$.

c) Construire un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{|X|}$ de sorte que $(|X|, \mathcal{O}_{|X|})$ soit un schéma et que le foncteur associé comme en 1.a soit le foncteur X dont on est parti.

5 .a) Montrer que les deux constructions définies dans cet exercice, à savoir d'une part passer d'un schéma à un foncteur local sur $\mathbf{Ann}$ vérifiant les propriétés de la question 3.b et d'autre part passer d'un tel foncteur à un schéma, sont inverses l'une de l'autre.
b) Montrer enfin que la donnée d'un morphisme de schémas équivaut à la donnée d'un morphisme de foncteurs (transformation naturelle) entre les foncteurs associés.

Exercice B

l

Soit k un corps parfait, $\overline{k}$ une clôture algébrique, X un k-schéma intègre de corps des fonctions K.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) Le schéma X est géométriquement intègre.

ii) L'anneau $K \times_k \overline{k}$ est intègre (*i.e.*un corps.)

iii) Le corps k est algébriquement fermé dans K.

iv) Pour toute extension finie $k \subset l$, $X \times_k l$ est intègre.

Exercice C

Soit k un corps et X un k-schéma.

Montrer que X est géométriquement intègre, (resp. irréductible,) (resp. réduit) si et seulement si pour toute extension $k \subset l$, $X \times_k l$ est intègre, (resp. irréductible,) (resp. réduit.)

Exercice D

Soient S un schéma localement noethérien, X et Y des S-schémas avec Y de type fini.

1) Pour tout point $x \in X$, montrer que tout morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to Y$ s'étend en un morphisme d'un voisinage ouvert de x dans Y.

2) Pour un corps k, en déduire que deux k-variétés qui ont le même corps de fonctions contiennent des ouverts isomorphes.

Exercice E

Étant donnés un corps k et un entier $n \geq 1$, on note

$$\mathbb{P}^n_k \;:=\; \mathrm{Proj}(k[X_0, X_1, \ldots, X_n]) \; .$$

Construire des schémas affines U_i isomorphes à $\mathbb{A}^n_k$ et des données de recollement de sorte que $\mathbb{P}^n_k$ soit isomorphe au schéma obtenu par recollement des U_i.

Exercice F

Soit X un schéma noethérien connexe dont tous les anneaux locaux sont intègres. Montrer que X est intègre. Peut-on se passer de l'hypothèse noethérien ?