

M2 "Géométrie algébrique"-corrigé du partiel du 5/12/07

Exercice 1

1. C'est faux. Prendre par exemple $k = \mathbf{R}$, $X = Y = \text{Spec } \mathbf{C}$. Alors $X \times_k Y = \text{Spec}(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ qui n'est pas intègre (l'énoncé analogue avec "géométriquement intègre" est vrai).

2. C'est vrai. En effet si K est le corps des fractions de X , on a des flèches compatibles $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U) \rightarrow K$ et K est le corps des fractions de $\mathcal{O}_X(X)$ et $\mathcal{O}_X(U)$; ainsi la flèche $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow K$ est injective, donc également la restriction $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$.

3. C'est faux. Soit par exemple $A = \mathbf{Z}$ et $B = \mathbf{Z}[1/p]$ avec p premier. Alors l'immersion ouverte $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ a la propriété voulue (elle est ensemblistement injective), mais ce n'est pas un morphisme fini car B n'est pas un A -module de type fini. (Le résultat est vrai si f est de plus supposé *propre*, c'est une conséquence de ce qu'on appelle le "Main Theorem" de Zariski).

4. C'est faux. Prendre par exemple $n = 1$ et $I = (T_0 - T_1)$. Alors $X := \text{Proj}(k[T_0, \dots, T_n]/I)$ consiste en un seul point car l'équation $T_0 = T_1$ correspond à un seul point de l'espace projectif; de façon plus formelle, l'ouvert affine $D_+(T_0)$ (qui est réduit à un point) de X est égal à X tout entier car si un idéal premier homogène de $k[T_0, \dots, T_n]$ contient I et T_0 , il contient T_0 et T_1 donc tous les éléments homogènes de degré > 0 (en fait les seuls schémas qui sont à la fois affines et projectifs sur k sont les schémas finis sur k).

Exercice 2

1. a) On a bien sûr $\sqrt{J} \supset J$. Si x est dans \sqrt{J} , alors pour tout idéal maximal \mathcal{M} qui contient I , une certaine puissance x^m de x (avec $m > 0$) est dans \mathcal{M} donc $x \in \mathcal{M}$, vu que \mathcal{M} (qui est maximal) est premier.

b) On sait que le fermé $\overline{Z_0}$ s'écrit $\overline{Z_0} = V(J')$, où J' est un idéal de A tel que $\sqrt{J'} = J'$. Or Z_0 est l'ensemble des idéaux maximaux de A qui sont dans $V(I)$, i.e. qui contiennent I . Comme $V(J')$ contient Z_0 , tout idéal maximal contenant I contient J' , soit $J' \subset J$. Alors $V(J) \subset V(J')$ mais comme $\overline{Z_0} = V(J')$ est le plus petit fermé contenant Z_0 , on a $V(J) = V(J')$ vu que $V(J)$ est un fermé qui contient Z_0 (tout idéal maximal qui contient I contient J par définition de J). Finalement $\overline{Z_0} = V(J)$.

c) D'après b), dire que $\overline{Z_0} = Z$ c'est dire que $V(J) = V(I)$ ou encore que $I = J$ d'après a). Le résultat en découle immédiatement.

2. Les fermés Z de $\text{Spec } A$ sont les $Z = V(I)$ avec $\sqrt{I} = I$. D'après 1.c), le schéma X est de Jacobson si et seulement si tout idéal égal à son radical est intersection d'une famille d'idéaux maximaux. Or un idéal est égal à son radical si et seulement s'il est intersection d'idéaux premiers, ce qui implique le résultat voulu.

3. Si Z est un fermé de X , on peut le munir d'une structure de sous-schéma fermé de X , qui en fait alors un schéma de type fini sur k (les immersions fermées sont de type fini). On sait alors que l'ensemble Z_0 des points fermés de Z est dense dans Z , d'où le résultat avec 2.

Exercice 3

1. Si f est un isomorphisme, on construit de façon évidente une bijection réciproque à f_T en prenant $(f^{-1})_T$.

2. Prenons d'abord $T = Y$ muni du morphisme $\text{id}_Y : T \rightarrow Y$. Comme f_Y est surjectif, il existe un morphisme $g : T = Y \rightarrow X$ tel que $f \circ g = \text{id}_Y$. Pour montrer que $g \circ f = \text{id}_X$, on prend maintenant $T = X$ et on note que $f \circ (g \circ f) = f \circ \text{id}_X$. Comme f_X est injectif, on a bien $g \circ f = \text{id}_X$ ("Lemme de Yoneda"; bien sûr ça n'a rien à voir avec les schémas, c'est un énoncé sur les catégories...).

3. D'après 2., il suffit de montrer que pour tout schéma T , l'application f_T est bijective, et en fait il suffit de le faire pour tout schéma qui vérifie la propriété que l'intersection de deux ouverts affines est affine (puisqu'on n'a utilisé que les cas $T = X$ et $T = Y$ dans 2.). Recouvrons donc T par des ouverts affines T_i . Si g_1 et g_2 sont deux morphismes de T dans X tels que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, alors $f \circ g_1$ et $f \circ g_2$ coïncident en particulier sur chaque T_i , donc g_1 et g_2 coïncident sur T_i puisque f_{T_i} est injective. Ainsi $g_1 = g_2$ et f_T est injective.

Si maintenant on se donne un morphisme $h : T \rightarrow Y$, la restriction h_i de h à T_i peut s'écrire $h_i = f \circ g_i$, où $g_i : T_i \rightarrow X$ est un morphisme (par surjectivité de chaque f_{T_i}). Maintenant comme chaque $f_{(T_i \cap T_j)}$ est injective

vu que les $T_i \cap T_j$ sont affines¹, on obtient que g_i et g_j coïncident sur $(T_i \cap T_j)$, donc les g_i se recollent en un morphisme $g : T \rightarrow X$ qui vérifie alors $h = f \circ g$. Ainsi f_T est surjective.

4. a) Il s'agit simplement de la propriété universelle d'un recollement.

b) Le schéma $Y = \text{Spec } A$ est quasi-compact, ce qui n'est pas le cas de X (qui est recouvert par la famille infinie d'ouverts non vides deux à deux disjoints $\text{Spec } A_i$). Donc u ne peut pas être un isomorphisme.

c) Se donner un morphisme de Y dans T revient à se donner un homomorphisme d'anneaux $\varphi : B \rightarrow \prod_i A_i$, ou encore une famille d'homomorphismes d'anneaux $\varphi_i : B \rightarrow A_i$, ce qui revient exactement à se donner des morphismes $\text{Spec } A_i \rightarrow T$, ou encore un morphisme de X dans T d'après a).

On voit donc qu'un schéma X est en quelque sorte déterminé par le foncteur $\text{Hom}(T, \cdot)$ sur la catégorie des schémas affines, mais pas par le foncteur $\text{Hom}(\cdot, T)$ sur cette même catégorie. Ici X est le coproduit des $\text{Spec } A_i$ dans la catégorie des schémas, tandis que le coproduit dans la catégorie des schémas affines est Y .

¹Comme me l'a signalé Antoine Ducros, on peut se passer de cette hypothèse au prix de quelques efforts supplémentaires, i.e. en recouvrant chaque $(T_i \cap T_j)$ par des ouverts affines...