Sel. math., New ser. 3 (1997) 205 – 243
1022–1824/97/020205–39$1.50 + 0.20/0

Selecta Mathematica, New Series

Extension du phénomène de brisure spontanée de symétrie de Bost-Connes au cas des corps globaux quelconques

David Harari et Eric Leichtnam

Introduction

Dans [2], Bost et Connes ont associé au corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels un système dynamique remarquable $(C_{\mathbf{Q}}, \sigma_t)$ où σ_t est un groupe à un paramètre $(t \in \mathbf{R})$ d'automorphismes d'une certaine C^*-algèbre de Hecke $C_{\mathbf{Q}}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q})$ de l'extension cyclotomique maximale de $\mathbf{Q}$ est un *groupe de symétrie* de ce système dynamique: il agit naturellement sur $C_{\mathbf{Q}}$ en commutant avec σ_t pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Comme pour tout système dynamique de ce type, les états d'équilibre possibles à la température $\frac{1}{\beta}(> 0)$ forment un ensemble convexe compact et sont caractérisés par la condition dite KMS_β. Bost et Connes ont montré qu'en $\beta = 1$ se produisait le phénomène suivant dit de brisure spontanée de symétrie: pour chaque $\beta \in]0, 1]$, le système $(C_{\mathbf{Q}}, \sigma_t)$ possède un *unique* état KMS_β. Par contre, pour chaque $\beta > 1$, l'ensemble des états KMS_β extremaux de $(C_{\mathbf{Q}}, \sigma_t)$ est paramétré bijectivement par $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q})$. En outre le système dynamique $(C_{\mathbf{Q}}, \sigma_t)$ est relié à la répartition des nombres premiers et admet la fonction zéta de Riemann $\beta \mapsto \zeta(\beta)$ comme fonction de partition. Les travaux de Julia ([11]) et de Spector ([21]) suggéraient déjà qu'un tel phénomène de mécanique statistique quantique devait se produire en théorie des nombres, reflétant ainsi des propriétés de la fonction zéta.

L'objet de cet article est de généraliser ce résultat en remplaçant $\mathbf{Q}$ par un corps global *arbitraire* K. En utilisant un anneau de Dedekind principal $\mathcal{O}$ admettant K pour corps des fractions, nous construisons divers systèmes dynamiques notés (C_K, σ_t), (C_K^H, σ_t). A l'aide de la théorie du corps de classes nous interprètons les groupes de symétrie correspondants comme des groupes de Galois associés à K. La fonction de partition $\beta \mapsto \zeta_{\mathcal{O}}(\beta)$ de (C_K, σ_t) est obtenue en enlevant un nombre fini de termes locaux au produit eulérien de la fonction zéta de K. Dans le cas où K est un corps de nombres, le système dynamique (C_K, σ_t) est relié à la répartition des normes des idéaux premiers de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$.

Notations

Dans toute la suite, on fixe un corps global K (c'est-à-dire un corps de nombres ou une extension finie séparable de $\mathbf{F}_q(T)$, où $\mathbf{F}_q$ est le corps fini à q éléments). On peut trouver un anneau de Dedekind R admettant K pour corps des fractions et le groupe des classes d'idéaux $\mathcal{I}$ de R est fini ([5], paragraphe 17 page 71). Considérons alors un ensemble fini F d'idéaux premiers de R dont les classes modulo le sous-groupe des idéaux (fractionnaires) principaux engendrent $\mathcal{I}$. Soit $J \in F$, comme il existe un entier positif k tel que J^k soit un idéal principal, on vérifie que J rencontre $R \setminus \cup_{P \in F^c} P$ où F^c désigne le complémentaire de F dans l'ensemble des idéaux premiers de R. Le localisé $\mathcal{O}$ de l'anneau R suivant la partie multiplicative $R \setminus \cup_{P \in F^c} P$ définit alors un anneau *principal* admettant K comme corps des fractions et dont l'ensemble des idéaux premiers est $\{ P\mathcal{O} / \; P \in F^c\}$. Dans la suite nous fixons un tel anneau principal $\mathcal{O}$ (ce choix n'est pas canonique).

A tout idéal premier de $\mathcal{O}$ correspond une place non archimédienne v de K, on note K_v le complété de K pour la place v et $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v. On notera $\Omega_{\mathcal{O}}$ l'ensemble des places de K associées aux idéaux premiers de $\mathcal{O}$ et Ω_K l'ensemble de toutes les places de K. Notons qu'il existe au moins une place de K qui n'est pas dans $\Omega_{\mathcal{O}}$: c'est clair si K est un corps de nombres puisqu'il a des places archimédiennes. Si K est de caractéristique non nulle, c'est le corps des fonctions d'une courbe projective lisse sur $\mathbf{F}_q$ et les seuls éléments de K entiers en toutes ses places sont les fonctions régulières en tout point géométrique de la courbe, c'est-à-dire les constantes; or $\mathcal{O}$ contient strictement $\mathbf{F}_q$.

Le théorème d'approximation forte ([5], paragraphe 15, page 67) permet alors *d'en déduire* l'isomorphisme $K/\mathcal{O} \simeq \bigoplus_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} K_v/\mathcal{O}_v$ qui nous sera très utile.

Notons $\mathcal{A}$ l'anneau des $\mathcal{O}$-adèles de K, c'est-à-dire le produit topologique restreint (vis à vis des $\mathcal{O}_v$) des K_v pour $v \in \Omega_{\mathcal{O}}$. Soit $\mathcal{R} = \prod_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_v$ l'anneau compact maximal de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}^*$ le groupe multiplicatif des $\mathcal{O}$-idèles de K et $W = \prod_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_v^*$ le sous-groupe de $\mathcal{A}^*$ des $\mathcal{O}$-idèles unitaires. Le groupe $\mathcal{A}^*$ étant muni de la topologie produit restreint (vis à vis des $\mathcal{O}_v^*$), il induit sur W la topologie produit usuelle, qui en fait un groupe compact. Comme $K/\mathcal{O} = \bigoplus_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} K_v/\mathcal{O}_v$, l'application $x \to ux$ est un automorphisme du groupe additif $K/\mathcal{O}$ pour tout u de W.

On fixe un système $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m, \dots\}$ d'éléments irréductibles de $\mathcal{O}$; on note $K_+^* \subset K^*$ l'ensemble des $\prod_i P_i^{\alpha_i}$ où (α_i) est une famille presque nulle d'éléments de $\mathbf{Z}$, puis $\mathcal{O}_+^* \subset \mathcal{O}$ l'ensemble des $\prod_i P_i^{\alpha_i}$ où (α_i) est une famille presque nulle d'éléments de $\mathbf{N}$. Comme $\mathcal{O}$ est principal, on a l'isomorphisme fondamental $\mathcal{A}^* \simeq K_+^* \times W$. Tout élément de $\mathcal{O}$ s'écrit de manière unique comme le produit d'un élément inversible $u \in \mathcal{O}^*$ et d'un élément de $\mathcal{O}_+^*$. De plus le théorème de Bézout est vérifié dans $\mathcal{O}$: si le plus grand commun diviseur (r, s) de deux éléments r et s de $\mathcal{O}$ est 1 (i.e. aucun élément de $\mathcal{P}$ n'est diviseur commun de r et s), alors l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par r et s est $\mathcal{O}$. Quand $P \in \mathcal{P}$, on notera parfois $\mathcal{O}_P$ pour $\mathcal{O}_v$, où

v est la place de K associée à P.

On dispose de la fonction zéta $\zeta_{\mathcal{O}}$ de l'anneau de Dedekind $\mathcal{O}$ définie pour tout $\beta > 1$ par $\zeta_{\mathcal{O}}(\beta) = \sum_{\mathcal{I}} N(\mathcal{I})^{-\beta}$ (où $\mathcal{I}$ parcourt l'ensemble des idéaux de $\mathcal{O}$ et $N(\mathcal{I})$ désigne la norme de $\mathcal{I}$). On a aussi $\zeta_{\mathcal{O}}(\beta) = \sum_{r\in\mathcal{O}_+^*} N(r)^{-\beta}$, où $N(r) = \mathrm{Card}(\mathcal{O}/r\mathcal{O})$ est la norme de l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par r.

Notons que dans le cas $\mathcal{O} = \mathbf{F}_q[T]$ et $K = \mathbf{F}_q(T)$, on peut prendre pour $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires. Dans ce cas $\mathcal{O}_+^*$ est l'ensemble des polynômes unitaires et $\zeta_{\mathcal{O}}$ est la fonction zéta de la droite affine sur $\mathbf{F}_q$ (cf. [8], pages 449-450). Dans le cas $\mathcal{O} = \mathbf{Z}$ et $K = \mathbf{Q}$, on peut prendre pour $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On a alors $K_+^* = \mathbf{Q}_+^*$ et $\mathcal{O}_+^* = \mathbf{N}^*$, la fonction $\zeta_{\mathcal{O}}$ étant la fonction zéta de Riemann usuelle. Si K est un corps de nombres quelconque dont on note l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$, alors on vérifie aisément qu'on obtient la fonction $\zeta_{\mathcal{O}}$ de notre anneau principal $\mathcal{O}$ en retirant un nombre fini de termes locaux au produit eulérien de $\zeta_{\mathcal{O}_K}$:

$$\zeta_{\mathcal{O}_K}(\beta) = \prod_{\wp \text{premier } de\, \mathcal{O}_K} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\wp)^\beta}}, \quad \zeta_{\mathcal{O}}(\beta) = \prod_{P\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(P)^\beta}}.$$

En outre, on notera Cl_K le groupe des classes d'idéaux de K et Cl_K^+ le groupe des classes d'idéaux étendu de K ([9], page 203). On désigne également par U_K le groupe multiplicatif des unités de K et U_K^+ le sous-groupe des unités *totalement positives* (c'est-à-dire dont l'image par tout plongement réel de K est > 0).

Pour tout corps k, on désigne par $\bar{k}$ une clôture algébrique de k.

On considère maintenant les deux sous-groupes matriciels P_K^+ et $P_{\mathcal{O}}^+$:

$$P_K^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, b \in K, a \in K_+^* \right\}$$

$$P_{\mathcal{O}}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c \in \mathcal{O} \right\}.$$

On vérifie que $P_{\mathcal{O}}^+$ est un sous-groupe presque normal de P_K^+, c'est-à-dire que chaque orbite de $P_{\mathcal{O}}^+$ agissant à gauche sur $P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$ est finie. On note alors $\mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+)$ l'*algèbre de Hecke* (de convolution) des fonctions à support fini sur l'ensemble des doubles classes de $P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$. Pour $f, f' \in \mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+)$, le produit dans cette algèbre est donné par:

$$\forall \gamma \in P_K^+, \quad f * f'(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+} f(\gamma\gamma_1^{-1}) f'(\gamma_1) \tag{1}$$

où f et f' sont considérées comme des fonctions $P_{\mathcal{O}}^+$-bi-invariantes sur P_K^+ à support fini sur $P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$. En posant $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$ pour tout γ de $P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$, on munit $\mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+)$ d'une structure d'algèbre involutive.

Notons $Bl^2(P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $l^2(P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+)$ formé des familles de carré sommables de nombres complexes indexées par $P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+$. Nous considérons la représentation (involutive) régulière gauche λ : $\mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+) \to Bl^2(P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+)$ où, pour chaque $f \in \mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+)$, $\lambda(f)$ est donné par:

$$\forall \xi \in l^2(P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+), \quad \forall \gamma \in P_K^+, \quad \lambda(f)\xi(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+} f(\gamma\gamma_1^{-1})\xi(\gamma_1).$$

La fermeture en norme de l'image de λ définit la C^*-algèbre de Hecke suivante:

$$C_K = C_r^*(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+) = \overline{\lambda(\mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+))}.$$

Pour définir le groupe à un paramètre $(\sigma_t)_{t\in\mathbf{R}}$ d'automorphismes de la C^*-algèbre C_K, nous devons introduire deux autres notations. Puisque chaque $P_{\mathcal{O}}^+$-orbite de l'action sur $P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$ est finie, nous pouvons poser, pour chaque $\gamma \in P_K^+$:

$L(\gamma)$=cardinal de l'image de $P_{\mathcal{O}}^+\gamma P_{\mathcal{O}}^+$ dans $P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$
$R(\gamma)$=cardinal de l'image de $P_{\mathcal{O}}^+\gamma P_{\mathcal{O}}^+$ dans $P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+$

Les fonctions L et R sont $P_{\mathcal{O}}^+$-biinvariantes sur P_K^+. Chaque $\gamma \in P_K^+$ est de la forme:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a/a' \end{pmatrix}, \text{avec } b \in K, (a,a') \in \mathcal{O}_+^* \times \mathcal{O}_+^* \text{ et } \operatorname{pgcd}(a,a') = 1$$

et on a $L(\gamma) = \operatorname{Card}(\mathcal{O}/a'\mathcal{O})$ et $R(\gamma) = \operatorname{Card}(\mathcal{O}/a\mathcal{O})$. Nous pouvons alors définir $(\sigma_t)_{t\in\mathbf{R}}$ comme l'unique groupe à un paramètre d'automorphismes de C_K tel que:

$$\forall f \in \mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+), \quad \forall \gamma \in P_K^+, \quad \sigma_t(f)(\gamma) = (L(\gamma)/R(\gamma))^{-it} f(\gamma). \tag{2}$$

Le groupe $(\sigma_t)_{t\in\mathbf{R}}$ évalue dans quelle mesure $P_{\mathcal{O}}^+$ n'est pas un sous-groupe normal de P_K^+ (en général $L(\gamma)$ et $R(\gamma)$ sont distincts).

Rappelons (voir [4] ou [7]) que pour tout $\beta > 0$, un état φ sur C_K vérifie la condition KMS_β relativement au flot (σ_t) si pour tous $x, y \in C_K$, il existe une fonction $z \mapsto F_{x,y}(z)$ continue *bornée* sur la bande fermée $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \beta$ du plan complexe, holomorphe sur la bande ouverte, telle que:

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y)) \text{ et } F_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x).$$

Un tel état représente un état d'équilibre du système dynamique (C_K, σ_t) à la température $1/\beta$.

Nous pouvons maintenant énoncer le premier résultat de cet article, qui généralise le résultat principal de [2] au cas d'un corps global K quelconque:

Théorème 0.1.

1. *Le groupe compact* $W = \prod_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_v^*$ *agit sur* C_K *(via un morphisme* $u \mapsto \theta_u$ *de* W *dans* $\mathrm{Aut}(C_K)$*) de sorte que, pour tout* $(u,t) \in W \times \mathbf{R}$, $\theta_u \circ \sigma_t = \sigma_t \circ \theta_u$.
2. *Pour* $0 < \beta \leq 1$*, le système dynamique* (C_K, σ_t) *admet un et un seul état* KMS_β*. Cet état est* W*-invariant et factoriel de type III.*
3. *Pour* $\beta > 1$*, le groupe* W *paramétrise bijectivement l'ensemble des états* KMS_β extremaux *(donc factoriels) de* (C_K, σ_t)*. Ces états sont tous de type* I_∞*.*

Commentaire

Dans 2, la température $1/\beta \geq 1$ est suffisamment grande pour provoquer un désordre tel que (C_K, σ_t) n'admette qu'un seul état d'équilibre φ. Pour chaque $u \in W$, $\varphi \circ \theta_u$ vérifie aussi la condition KMS_β, donc $\varphi \circ \theta_u = \varphi$. L'état φ est extremal, donc factoriel (voir [4]). Le type III traduit la non convergence du produit eulérien de $\zeta_{\mathcal{O}}(\beta)$.

Dans 3, la température $1/\beta < 1$ est suffisamment faible pour permettre à (C_K, σ_t) d'admettre une infinité d'états d'équilibre possibles $\varphi_u, u \in W$. Aucun de ces φ_u n'est W-invariant, le choix d'un tel φ_u "brise" donc la symétrie. Ainsi il se produit en $1/\beta = 1$ un phénomène de transition de phase avec brisure spontanée de symétrie. Ceci vient du fait que l'immersion diagonale $K \to \mathcal{A}$ introduit une interaction dans (C_K, σ_t).

Dans le paragraphe 6, nous décrirons (via la théorie de Lubin-Tate, [14]) chaque composante locale $\mathcal{O}_v^*$ comme un groupe de Galois "concret". Puis nous interprèterons $W = \prod_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_v^*$ comme un groupe de Galois "abstrait". Dans le cas $\mathcal{O} = \mathbf{Z}$, le groupe W s'identifie à $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q})$, où $\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}$ est le corps obtenu en rajoutant à $\mathbf{Q}$ toutes les racines de l'unité (c'est aussi l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}$ d'après le théorème de Kronecker-Weber, [5] page 174).

Par contre dans le cas d'un corps de nombres K autre que $\mathbf{Q}$, on dispose seulement d'un morphisme de groupes $\hat{s} : W \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ à valeurs dans le groupe de Galois $\mathcal{G}$ de l'extension abélienne maximale de K. Ce morphisme $\hat{s}$ n'est en général pas injectif (ni même surjectif). On ne peut donc pas interprèter W comme un groupe de Galois "concret". Toutefois, la preuve du théorème 0.1 permet de construire (entre autres choses) un système dynamique intéressant $(C_K^{\ker \hat{s}}, \sigma_t)$ sur lequel le groupe "concret" $W/\ker \hat{s} \simeq \hat{s}(W)$ agit. Plus précisément, on a le théorème suivant, dont les points 1 et 2 s'appliquent à n'importe quel corps global:

Théorème 0.2. *Soit* H *un sous-groupe* compact *de* W*. Alors, le groupe* W/H *agit sur la* C^**-algèbre* $C_K^H = C_r^*(P_K^+, P_{\mathcal{O}}^+)^H$ *des points fixes de* H *et commute avec* $(\sigma_t)_{t \in \mathbf{R}}$*. De plus:*

1. *Pour tout* $\beta \in]0,1]$*, il existe un et un seul état* KMS_β *de* (C_K^H, σ_t)*. Un tel état est factoriel de type III et* W/H*-invariant.*

2. *Pour tout $\beta > 1$, le groupe W/H paramétrise bijectivement l'ensemble des états KMS_β extremaux de (C_K^H, σ_t).*
3. *Supposons que K soit un corps de nombres de groupe de Galois abélien $\mathcal{G}$ admettant r_1 places réelles. Pour $H = \ker \hat{s}$, le groupe $W/\ker \hat{s}$ s'identifie au sous-groupe $\hat{s}(W)$ de $\mathcal{G}$. Si de plus l'anneau des entiers de K est principal (égal à $\mathcal{O}$), alors $\mathcal{G}/\hat{s}(W)$ est un 2-groupe fini d'ordre $2^{r_1}[U_K : U_K^+]^{-1}$, isomorphe à Cl_K^+.*

Remarque. Si K est un corps totalement imaginaire ($r_1 = 0$) dont l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ est principal (par exemple $K = \mathbf{Q}(i)$), la flèche $\hat{s}$ est surjective. Si de plus K est quadratique sur $\mathbf{Q}$, on verra que le noyau de $\hat{s}$ est exactement l'ensemble des éléments inversibles U_K de $\mathcal{O}_K$. Notons que la flèche $\hat{s}$ est surjective pour certains corps de nombres admettant des places réelles: par exemple $K = \mathbf{Q}$ ou $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (cf. paragraphe 8).

Dans le cas d'un corps de fonctions K, la situation est différente: $\ker \hat{s}$ est *toujours* trivial de sorte que le groupe W s'identifie à un sous-groupe J du groupe de Galois abélien modifié $\mathcal{G}$ de K (pour la définition de $\mathcal{G}$, cf. [24] ou [16] page 135). Plus précisément J est l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}$ agissant trivialement sur l'extension abélienne maximale (notée $\mathcal{L}$) de K non ramifiée aux places de $\Omega_{\mathcal{O}}$. Comme $\mathcal{L}$ contient toutes les extensions finies du corps des constantes $\mathbf{F}_q$, chaque puissance entière du Frobenius appartient à $\mathcal{G}/J = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/K)$ qui est donc infini (noter la différence avec le point 3 du théorème 0.2).

Dans le paragraphe 6, nous interprèterons J comme groupe de symétrie de (C_K, σ_t) et nous reformulerons en conséquence le théorème 0.1

Si par exemple $K = \mathbf{F}_q(T)$ est le corps des fonctions de la droite projective sur $\mathbf{F}_q$, on peut prendre $\mathcal{O} = \mathbf{F}_q[T]$. Une extension abélienne finie L de K correspond à une courbe X sur $\mathbf{F}_q$ qui est un revêtement de la droite affine $\mathbf{A}^1$ et dont le corps des fonctions est L. La condition que L soit non ramifiée au-dessus de $\mathbf{F}_q[T]$ signifie qu'au-dessus de chaque $\overline{\mathbf{F}_q}$-point de $\mathbf{A}^1$, il y a exactement d $\overline{\mathbf{F}_q}$-points distincts de X, où d est le degré de l'extension L/K. De tels revêtements abéliens peuvent s'obtenir par la théorie d'Artin-Schreier (cf. [16]).

Plus généralement, si X est une courbe algébrique projective et lisse de genre g sur $\mathbf{F}_q$, on peut prendre pour K le corps des fonctions de X. L'anneau principal $\mathcal{O}$ s'interprète comme l'anneau des fonctions régulières sur $X \setminus F$, où F est un ensemble fini convenable de points de X. Si le groupe $J(\mathbf{F}_q)$ des $\mathbf{F}_q$-points de la jacobienne de X est non trivial, alors F ne pourra pas être réduit à un point. En effet, le groupe (fini) des classes d'idéaux de K est isomorphe à $\mathrm{Pic}^0 X$ (le groupe des diviseurs de degré zéro sur X, à équivalence rationnelle près) qui lui-même s'identifie à $J(\mathbf{F}_q)$. Quand X est une courbe elliptique (donc égale à sa jacobienne) n'ayant pas d'autre point sur $\mathbf{F}_q$ que le point à l'infini, on peut prendre pour $\mathcal{O}$ l'anneau des fonctions régulières sur la courbe $X' = X \setminus \{\infty\}$. Un exemple concret d'une telle courbe affine X' est celle d'équation $y^2 + y = x^2 + x + 1$ sur $\mathbf{F}_2$.

La structure de la preuve du théorème 0.1 est essentiellement celle de [2]. La différence notable avec [2] est qu'on ne peut plus utiliser les racines de l'unité pour construire les états KMS_β pour $\beta > 1$. A la place des racines de l'unité, nous utiliserons pour chaque place $v \in \Omega_{\mathcal{O}}$ un caractère $\chi_v : K_v/\mathcal{O}_v \to \mathbf{U}$ (dit admissible) non trivial sur $\pi_v^{-1}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$, où π_v est une uniformisante de $\mathcal{O}_v$. Le caractère de $K/\mathcal{O} = \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}}$ défini par $\chi = \prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} \chi_v$ jouera un rôle crucial. La preuve du troisième point du théorème 0.1 est organisée comme suit: dans le paragraphe 5, nous construisons pour chaque $u \in W$ une représentation $\widetilde{\pi_u} : C_K \to Bl^2(\mathcal{O}_+^*)$. Cette construction utilise la présentation de $\mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+)$ donnée dans le paragraphe 3 et le caractère χ mentionné plus haut. Pour chaque $\beta > 1$ et $u \in W$, on obtient un état KMS_β pour (C_K, σ_t), que l'on note $\varphi_{\beta,u}$, de la forme:

$$\forall x \in C_K \quad \varphi_{\beta,u}(x) = \frac{1}{\zeta_{\mathcal{O}}(\beta)}\mathrm{tr}(\widetilde{\pi_u}(x)e^{-\beta H}).$$

l'opérateur H étant donné dans le paragraphe 1. L'analyse de la représentation GNS de $\varphi_{\beta,u}$ montre que $\varphi_{\beta,u}$ est un état *factoriel* de type I_∞, donc $\varphi_{\beta,u}$ est un état KMS_β *extremal*. Le fait que $\varphi_{\beta,u}$ "soit de type I_∞" permet alors de déduire l'injectivité de $(u \mapsto \varphi_{\beta,u})$ de l'injectivité de l'application de W dans $\widehat{K/\mathcal{O}} : u \mapsto (\gamma \mapsto \chi(u\gamma))$. Pour montrer que n'importe quel état KMS_β ($\beta > 1$) extremal ψ est de la forme $\varphi_{\beta,u}$, on procède comme dans [2]. On considère l'action de W sur $C_K : u \mapsto \theta_u \in \mathrm{Aut}(C_K)$ définie dans le paragraphe 4. On note du la mesure de Haar normalisée du groupe compact W; on dispose alors des deux états KMS_β suivants:

$$\int_W \psi \circ \theta_u du \text{ et } \int_W \varphi_{\beta,u} du.$$

Ces deux états sont invariants par W et sont donc entièrement déterminés par leur restriction à l'algèbre C_K^W des points fixes. Or (C_K^W, σ_t) s'identifie au système dynamique $(C^*(\mathcal{O}_+^*), \sigma_t)$ considéré dans le paragraphe 1 qui possède un et un seul état KMS_β, noté φ_β. On a donc:

$$\int_W \psi \circ \theta_u du = \int_W \varphi_{\beta,u} du = \varphi_\beta \circ \Big(\int_W \theta_u\Big)$$

or un résultat *général* assure qu'un état KMS_β se décompose de manière *unique* comme superposition d'états KMS_β *extremaux*. On en déduit qu'il existe $u \in W$ tel que $\psi = \varphi_{\beta,u}$ ce qui prouve le point 3 du théorème 0.1.

L'idée de la preuve de l'unicité de l'état KMS_β (noté ψ) de (C_K, σ_t) est la suivante. Pour chaque caractère *continu* χ_m du groupe abélien compact W, on pose:

$$C_{K,\chi_m} = \big\{x \in C_K; \forall u \in W,\ \theta_u(x) = \chi_m(u)x\big\}.$$

La restriction de ψ à $C_{K,1} \simeq C^*(\mathcal{O}_+^*)$ est déterminée de manière unique d'après la proposition 1.2. Si $\chi_m \neq 1$, la restriction de ψ à C_{K,χ_m} est identiquement nulle.

Le point crucial est que la non-convergence pour $0 < \beta \leq 1$ du produit eulérien de $\zeta_{\mathcal{O}}(\beta)$ entraîne qu'un certain automorphisme d'une algèbre réduite $C^*(\mathcal{O}_+^*)_{E_1}$ est *extérieur* (cf. la thèse de Connes, [6]).

L'article est composé des neuf paragraphes suivants:

Remerciements

Nous remercions J.-B. Bost qui s'est interessé à notre travail et nous a indiqué que dans le cas des corps de fonctions, le type des facteurs était $III_{q^{-\beta}}, 0 < \beta \leq 1$. Ce dernier résultat (non publié) a été établi par Bost et Connes à la suite de leur article [2].

1. Le C^*-système dynamique $(C^*(\mathcal{O}_+^*), \sigma_t)$

Rappelons qu'on a fixé un système $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots\}$ d'éléments irréductibles de l'anneau principal $\mathcal{O}$. Nous suivons de près le paragraphe 2 de [2] "en remplaçant" $\mathbf{N}^*$ par $\mathcal{O}_+^* = \{\prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P},\ \alpha_P \in \mathbf{N},\ (\alpha_P) \text{ presque nulle}\}$.

Notons $(\varepsilon_r)_{r \in \mathcal{O}_+^*}$ la base orthonormée hilbertienne canonique de $l^2(\mathcal{O}_+^*)$. On note H l'opérateur non borné sur $l^2(\mathcal{O}_+^*)$ défini par $H\varepsilon_r = \log N(r)\varepsilon_r$, où $N(r) = \mathrm{Card}(\mathcal{O}/r\mathcal{O})$ désigne la norme de l'idéal engendré par $r \in \mathcal{O}_+^*$. On définit l'évolution temporelle par:

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in Bl^2(\mathcal{O}_+^*), \quad \sigma_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}. \tag{3}$$

Si $r \in \mathcal{O}_+^*$, on note μ_r l'isométrie définie par $\mu_r(\varepsilon_s) = \varepsilon_{sr}$ pour tout s de $\mathcal{O}_+^*$. On a $\mu_r^* \mu_r = \mathrm{Id}$ mais $\mu_r \mu_r^* \neq \mathrm{Id}$. Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, l'élément μ_P engendre une C^*-algèbre nucléaire τ_P isomorphe à la C^*-algèbre de Toeplitz. Soit $(F_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de parties de $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P} = \bigcup_j F_j$. Alors la C^*-algèbre limite inductive des $\bigotimes_{P\in F_j} \tau_P$ est définie sans ambiguïté et sera notée $\bigotimes_{P\in\mathcal{P}} \tau_P$.

Comme dans [2] page 418, la principalité de $\mathcal{O}$ permet de prouver la proposition suivante:

Proposition 1.1. *Soit $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ la C^*-algèbre de $Bl^2(\mathcal{O}_+^*)$ engendrée par les μ_r, $r \in \mathcal{O}_+^*$.*

1. *La C^*-algèbre $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ coïncide avec $\bigotimes_{P\in\mathcal{P}} \tau_P$.*
2. *L'égalité $\sigma_t(x) = e^{itH}xe^{-itH}$, pour tout (x,t) de $C^*(\mathcal{O}_+^*) \times \mathbf{R}$, définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ tel que:*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sigma_t = \bigotimes_{P\in\mathcal{P}} \sigma_{t,P}, \quad \sigma_{t,P}(\mu_P) = N(P)^{it}\mu_P.$$

Le système dynamique $(\bigotimes_{P\in\mathcal{P}} \tau_P, \sigma_t)$ est évidemment sans interaction et ne présentera donc pas de phénomène de brisure spontanée de symétrie. Plus précisément, on a la proposition suivante, qui se démontre également comme dans [2]:

Proposition 1.2.

1. *Pour tout $\beta > 0$, il existe un unique état KMS_β sur $(C^*(\mathcal{O}_+^*), \sigma_t)$. C'est le produit tensoriel infini:*

$$\varphi_\beta = \bigotimes_{P\in\mathcal{P}} \varphi_{\beta,P}$$

   où $\varphi_{\beta,P}$ est l'unique état KMS_β de $(\tau_P, \sigma_{t,P})$. La représentation GNS π_β de $(C^*(\mathcal{O}_+^*), \varphi_\beta)$ est injective et φ_β se prolonge en un état normal fidèle du bicommutant $\pi_\beta''(C^*(\mathcal{O}_+^*))$. La liste des valeurs propres de chaque $\varphi_{\beta,P}$ $(P \in \mathcal{P})$ est:

$$\left\{(1 - N(P)^{-\beta})N(P)^{-n\beta}, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

2. *Pour tout $\beta > 1$, l'état φ_β est de type I_∞ et pour tout $x \in C^*(\mathcal{O}_+^*)$, on a: $\varphi_\beta(x) = \frac{1}{\zeta_{\mathcal{O}}(\beta)}\mathrm{tr}(xe^{-\beta H})$.*
3. *Soit $\beta \in]0,1]$. Alors φ_β est de type III_1 si K est un corps de nombres. Si K est une extension finie séparable de $\mathbf{F}_q[T]$, alors φ_β est de type $III_{q^{-\beta}}$.*

Note. La preuve de l'assertion 3 relative aux corps de fonctions est due à Bost et Connes (non publiée). Elle utilise le critère d'Araki-Woods (cf. [1] ou [7], pages 465 et 469) et l'hypothèse de Riemann pour les courbes algébriques lisses sur $\mathbf{F}_q$ (prouvée par A. Weil).

2. Produits d'arbres et algèbres de Hecke

Nous suivons de près le paragraphe 3 de [2]. Nous allons relier $(C^*(\mathcal{O}_+^*), \sigma_t)$ à l'anneau $\mathcal{A}$ des $\mathcal{O}$-adèles; nous interprèterons également $\mathcal{H}(P_K^+; P_\mathcal{O}^+)$ en regardant le commutant de l'action de P_K^+ sur $l^2(P_K^+/P_\mathcal{O}^+)$. Pour plus de détails sur les arbres, on pourra consulter [20].

On définit le groupe de matrices:

$$P_\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{A}^* \right\}$$

et de même:

$$P_\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \in \mathcal{R}, b \in \mathcal{R}^* \right\}.$$

(Rappelons que $\mathcal{R}$ est l'anneau compact maximal de $\mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{A}^*$ est le groupe des $\mathcal{O}$-idèles et $\mathcal{R}^* = W$ est le groupe des $\mathcal{O}$-idèles unitaires). Le groupe $P_\mathcal{A} = \mathcal{A} \rtimes \mathcal{A}^*$ est moyennable. Il n'est pas unimodulaire, on note $\delta : P_\mathcal{A} \to \mathbf{R}_+^*$ son module de sorte que pour toute mesure de Haar à gauche du de $P_\mathcal{A}$, on ait $d(uv) = \delta(v)du$. On définit un groupe σ_t à un paramètre d'automorphismes de la C^*-algèbre $C^*(P_\mathcal{A})$ en posant pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\forall f \in L^1(P_\mathcal{A}), \quad \forall g \in P_\mathcal{A}, \quad [\sigma_t(f)](g) = \delta(g)^{-it} f(g).$$

Ainsi (σ_{-t}) définit le flot modulaire du poids de Plancherel $f \mapsto f(\mathrm{Id})$.

Les deux propositions suivantes sont en fait les propositions 10 et 11 de [2].

Proposition 2.1. *Notons $e \in C^*(P_\mathcal{A})$ la fonction caractéristique du sous-groupe compact ouvert $P_\mathcal{R} \subset P_\mathcal{A}$.*

1. *On a: $e = e^* = e^2$ (produit de convolution des fonctions). La C^*-algèbre réduite $C^*(P_\mathcal{A})_e = eC^*(P_\mathcal{A})e$ est canoniquement isomorphe à la C^*-algèbre $C^*(\mathcal{O}_+^*)$.*
2. *Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\sigma_t(e) = e$ et la restriction de σ_t à $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ coïncide avec l'évolution temporelle (3) définie au début du paragraphe 1*

Proposition 2.2. *L'espace homogène $\Delta_v = P_{K_v}/P_{\mathcal{O}_v}$ $(v \in \Omega_\mathcal{O})$ sur le groupe $P_{K_v} \subset \mathrm{GL}(2, K_v)$ est isomorphe à l'ensemble des sommets de l'arbre de $SL(2, K_v)$. Le groupe P_{K_v} agit sur Δ_v par isométries et préserve un point à l'infini.*

On a maintenant la:

Proposition 2.3.

1. *L'espace homogène $P_{\mathcal{A}}/P_{\mathcal{R}} = \Delta$ muni du point base $P_{\mathcal{R}}$ est canoniquement isomorphe au produit restreint (vis à vis des $\{P_{\mathcal{O}_v}/P_{\mathcal{O}_v}\} \subset \Delta_v,\ v \in \Omega_{\mathcal{O}}$) des arbres Δ_v.*
2. *Le sous-groupe P_K^+ de $P_{\mathcal{A}}$ agit transitivement sur Δ et le sous-groupe d'isotropie de $P_{\mathcal{R}}$ est $P_{\mathcal{O}}^+$.*

*Preuve***.** Le 1 est trivial. Nous donnons la preuve de 2 (calquée sur celle de [2]) en raison de son importance.

Nous allons prouver que $P_{\mathcal{A}} = P_K^+ P_{\mathcal{R}}$. Posons:

$$\forall (a,b) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \quad j(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad p\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = a.$$

On dispose alors de la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{j} P_{\mathcal{A}} \xrightarrow{p} \mathcal{A}^* \to 1.$$

Rappelons que K est dense dans $\mathcal{A}$ (théorème d'approximation forte) et que K_+^* est un sous-groupe *discret* de $\mathcal{A}^*$. L'adhérence de $P_K^+ = K \rtimes K_+^*$ dans $P_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \rtimes \mathcal{A}^*$ est donc $\overline{P_K^+} = \mathcal{A} \rtimes K_+^*$. De plus, comme $\mathcal{O}$ est principal, on a $\mathcal{A}^* = K_+^* W$.

Considérons maintenant $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ 0 & h \end{smallmatrix}\right) \in P_{\mathcal{A}}$, il existe donc $(r,u) \in K_+^* \times W$ tel que $h = ru \in \mathcal{A}^*$. On a alors:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & su^{-1} \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in \overline{P_K^+} P_{\mathcal{R}}.$$

En considérant une suite de points de P_K^+ convergeant vers $\left(\begin{smallmatrix} 1 & su^{-1} \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$, on vérifie ($P_{\mathcal{R}}$ étant ouvert dans $P_{\mathcal{A}}$) qu'en fait $g \in P_K^+ P_{\mathcal{R}}$. Donc $P_{\mathcal{A}} = P_K^+ P_{\mathcal{R}}$ et P_K^+ agit bien transitivement sur Δ. Enfin le sous-groupe d'isotropie de $P_{\mathcal{R}}$ est $P_K^+ \cap P_{\mathcal{R}} = P_{\mathcal{O}}^+$, ce qui prouve la proposition. □

Le résultat suivant se prouve exactement comme la proposition 15 de [2]; on note $(\varepsilon_x)_{x \in P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+}$ la base orthonormée canonique de $l^2(P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+)$.

Proposition 2.4.

1. *Soit f une fonction $P_{\mathcal{O}}^+$-biinvariante sur P_K^+, à support fini dans $P_{\mathcal{O}}^+ \backslash P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$. Alors, il existe un unique élément $r(f)$ du commutant de P_K^+ dans $l^2(P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+)$ tel que:*

$$\forall g \in P_K^+ \quad f(g) = < r(f)\varepsilon_e, g^{-1}e > .$$

2. *L'application r s'étend en un isomorphisme de $C_r^*(P_K^+, P_{\mathcal{O}}^+)$ avec la C^*-algèbre C_K engendrée par les $r(f)$ dans $l^2(\Delta)$.*

3. Présentation de la C^*-algèbre $C_K = C_r^*(P_K^+, P_{\mathcal{O}}^+)$

Nous suivons de près le paragraphe 4 de [2]. Pour $r \in \mathcal{O}_+^*$, on pose $\mu_r = N(r)^{-1/2} e_{X_r}$ où $N(r)$ est la norme de l'idéal $r\mathcal{O}$ et e_{X_r} est la fonction caractéristique du sous-ensemble $P_{\mathcal{O}}^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} P_{\mathcal{O}}^+$ de P_K^+. Pour $\gamma \in K/\mathcal{O}$, on note $e(\gamma) = e_{X^\gamma}$ la fonction caractéristique de la double classe $P_{\mathcal{O}}^+ \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_{\mathcal{O}}^+$. Comme $\mathcal{O}$ est **principal**, on démontre exactement comme la proposition 18 de [2] la proposition suivante:

Proposition 3.1. *Les éléments μ_r, $e(\gamma)$ ($r \in \mathcal{O}_+^*$, $\gamma \in K/\mathcal{O}$) engendrent l'algèbre involutive $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+)$. De plus les relations suivantes forment une présentation de $\mathcal{H}$:*

(a) $\mu_r^* \mu_r = \mathrm{Id}, \quad \forall r \in \mathcal{O}_+^*$
(b) $\mu_r \mu_s = \mu_s \mu_r, \quad \forall r, s \in \mathcal{O}_+^*$
(c) $\mu_r \mu_s^* = \mu_s^* \mu_r$ *si* $\mathrm{pgcd}(r,s) = 1$
(d) $e(\gamma)^* = e(-\gamma),\ e(\gamma_1 + \gamma_2) = e(\gamma_1) e(\gamma_2) \quad \forall \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in K/\mathcal{O}$
(e) $e(\gamma)\mu_r = \mu_r e(r\gamma) \quad \forall r \in \mathcal{O}_+^*, \quad \forall \gamma \in K/\mathcal{O}$
(f) $\mu_r e(\gamma) \mu_r^* = \frac{1}{N(r)} \sum_{r\delta = \gamma} e(\delta) \quad \forall r \in \mathcal{O}_+^*, \quad \forall \gamma \in K/\mathcal{O}$

Notes.

1. Les produits $\mu_r \mu_s$, $e(\gamma)\mu_r$, ..., désignent bien sûr le produit de convolution (1) défini dans l'introduction.
2 Laca et Raeburn ont observé ([12]) dans le cas de $\mathbf{Z}$ que les relations c) et e) sont une conséquence des quatre autres.

Les arguments de moyennabilité utilisés dans la preuve de la proposition 19 de [2] permettent de prouver facilement la proposition suivante:

Proposition 3.2. *Soit π une représentation involutive de $\mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+)$ dans un espace de Hilbert. Alors π peut être prolongée, de manière unique, en une représentation (continue) de $C_r^*(P_K^+, P_{\mathcal{O}}^+)$.*

4. Action $u \mapsto \theta_u$ de W sur C_K

Rappelons que dans l'introduction nous avons défini un groupe à un paramètre $(\sigma_t)_{t \in \mathbf{R}}$ d'automorphismes de C_K tel que si e_X est la fonction caractéristique de la double classe $X \in P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+ / P_{\mathcal{O}}^+$, alors $\sigma_t(e_X) = (L(X)/R(X))^{-it} e_X$.

Ainsi, avec les notations du paragraphe 3, on a :

$$\forall r \in \mathcal{O}_+^*, \quad \sigma_t(\mu_r) = N(r)^{it} \mu_r, \quad \forall \gamma \in K/\mathcal{O}, \quad \sigma_t(e(\gamma)) = e(\gamma).$$

Rappelons que $e(\gamma_1) \circ e(\gamma_2) = e(\gamma_1 + \gamma_2)$ pour tous γ_1, γ_2 de $K/\mathcal{O}$. En utilisant alors le fait que $K/\mathcal{O}$ se plonge dans $P_{\mathcal{O}}^+ \setminus P_K^+ / P_{\mathcal{O}}^+$ par l'application $\gamma \mapsto e(\gamma)$, on vérifie que cette même application s'étend en un morphisme injectif d'algèbres involutives de l'algèbre de groupe $\mathbf{C}[K/\mathcal{O}]$ (puis de $C^*(K/\mathcal{O})$) vers C_K. Ainsi la C^*-algèbre engendrée par les $e(\gamma), \gamma \in K/\mathcal{O}$ est naturellement isomorphe à $C^*(K/\mathcal{O})$ et est fixée point par point par chaque σ_t. Dans le paragraphe 5, nous identifierons $C^*(K/\mathcal{O})$ avec l'algèbre $C(\mathcal{R})$ des fonctions continues sur $\mathcal{R} = \prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_v$.

Rappelons que $K/\mathcal{O} \simeq \mathcal{A}/\mathcal{R}$. On fait alors agir $\mathcal{R}$ sur $K/\mathcal{O}$ en posant, pour tout $a = (a_v)_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} \in \mathcal{R}$:

$$\forall\gamma = \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} \gamma_v \in K/\mathcal{O} = \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} K_v/\mathcal{O}_v, \quad a.\gamma = \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} a_v\gamma_v \in K/\mathcal{O}. \tag{4}$$

Maintenant nous allons utiliser la proposition 2.3 et la description de C_K fournie par la proposition 3.1 pour définir une action de W sur C_K. Nous avons vu dans la preuve de la proposition 2.3 que $\overline{P_K^+} = \mathcal{A} \rtimes K_+^*$, de sorte que $\overline{P_K^+}$ est un sous-groupe *normal* de $P_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \rtimes \mathcal{A}^*$. Comme $W \times K_+^* \simeq \mathcal{A}^*$, on en déduit que:

$$W \simeq \mathcal{A}^*/K_+^* \simeq P_{\mathcal{A}}/\overline{P_K^+}. \tag{5}$$

Notons $P_K^{+'}$ le commutant de P_K^+ dans $l^2(\Delta) = l^2(P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+)$. Si (dans l'identification (5)) $u \in W$ est de la forme $u = u'\overline{P_K^+}$ où $u' \in P_{\mathcal{A}}$, alors on pose:

$$\forall x \in P_K^{+'}, \quad \theta_u(x) = u'^{-1}xu'$$

où u'^{-1} et u' agissent sur $l^2(\Delta) = l^2(P_{\mathcal{A}}/P_{\mathcal{R}})$. L'élément $\theta_u(x)$ ne dépend pas du choix du représentant u' de u; en effet la normalité de $\overline{P_K^+}$ dans $P_{\mathcal{A}}$ montre que, pour tout élément g de P_K^+, on a:

$$u'^{-1}xu'(g\varepsilon_e) = u'^{-1}x(u'gu'^{-1})(u'\varepsilon_e) = u'^{-1}(u'gu'^{-1})x(u'\varepsilon_e) = gu'^{-1}xu'(\varepsilon_e).$$

Donc $\theta_u(x) \in P_K^{+'}$ et θ_u agit sur $P_K^{+'}$. D'après la proposition 3.1, on a $C_K \subset P_K^{+'}$.

La proposition suivante contient le point 1 du théorème 0.1:

Proposition 4.1.

1. *L'action θ de W sur $P_K^{+'}$ laisse la sous C^*-algèbre faiblement dense C_K globalement invariante et est ponctuellement normiquement continue sur C_K.*
2. *L'action de W sur C_K commute avec l'action $(\sigma_t)_{t\in\mathbf{R}}$.*
3. *La sous-algèbre des points fixes C_K^W est la C^*-algèbre $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ engendrée par les $\mu_r \in C_K$. De plus, la restriction à C_K^W du flot σ_t coïncide avec le flot introduit dans la proposition* 1.1.

*Preuve***.** On utilise le lemme suivant:

Lemme 4.2.

1. *Pour tous $u \in W$ et $r \in \mathcal{O}_+^*$, on a $\theta_u(\mu_r) = \mu_r$ et $\theta_u(\mu_r^*) = \mu_r^*$.*
2. *Pour tous $u \in W$ et $\gamma \in K/\mathcal{O}$, on a $\theta_u(e(\gamma)) = e(u.\gamma)$ où l'action de u sur γ est donnée par la formule (4).*

*Preuve du lemme***.** Le premier point se démontre exactement comme dans [2], page 438. Prouvons le deuxième. Soit $u \in W$, on peut définir $\theta_u(x)$ (pour $x \in P_K^{+'}$) en prenant $u' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$. Comme ε_e est un vecteur séparateur pour $P_K^{+'}$, il suffit de vérifier que pour tout $\gamma \in K/\mathcal{O}$, on a:

$$\theta_u(e(\gamma))\varepsilon_e = u'^{-1}e(\gamma)u'\varepsilon_e = e(u.\gamma)\varepsilon_e$$

mais ceci est une conséquence de l'égalité:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où le lemme 4.2.

Comme $\mathcal{H}(P_K^+; P_\mathcal{O}^+)$ est engendré par les μ_r et les $e(\gamma)$ (proposition 3.1) et est dense dans C_K, le lemme 4.2 entraîne le 1. de la proposition 4.1. Le 2. est une conséquence directe du lemme 4.2 et du début de ce paragraphe. Prouvons le 3. Il est clair que $C^*(\mathcal{O}_+^*) \subset C_K^W$. D'après la proposition 3.1, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}(P_K^+, P_\mathcal{O}^+)$ est engendré par la famille $\{\mu_r e(\gamma)\mu_s^*;\ r, s \in \mathcal{O}_+^*,\ \gamma \in K/\mathcal{O}\}$. Soit du la mesure de Haar normalisée du groupe compact W. Considérons la projection E de C_K sur C_K^W:

$$\forall x \in C_K, \quad \int_W \theta_u(x)du = E(x) \in C_K^W.$$

D'après le lemme 4.2, on a $E(\mu_r e(\gamma)\mu_s^*) = \mu_r E(e(\gamma))\mu_s^*$.

Comme $E(\mathcal{H}(P_K^+, P_\mathcal{O}^+))$ est dense dans C_K^W, il suffit de prouver que pour tout $\gamma \in K/\mathcal{O}$, on a $E(e(\gamma)) \in C^*(\mathcal{O}_+^*)$.

L'isomorphisme $K/\mathcal{O} \simeq \bigoplus_{v \in \Omega_\mathcal{O}} K_v/\mathcal{O}_v$ montre qu'il suffit de vérifier que pour tous $P \in \mathcal{P}$, $u_P \in \mathcal{O}_P^*$ et $j \in \mathbf{N}$, le projeté $E(e(u_P P^{-j}))$ appartient à $C^*(\mathcal{O}_+^*)$. Fixons donc $P \in \mathcal{P}$ et soit v la place associée. On observe que pour tout j de $\mathbf{N}^*$, le groupe $\mathcal{O}_v^*$ opère transitivement sur le complémentaire de $(\frac{P^{-j+1}\mathcal{O}}{\mathcal{O}})$ dans $(\frac{P^{-j}\mathcal{O}}{\mathcal{O}})$, noté $(\frac{P^{-j}\mathcal{O}}{\mathcal{O}}) \setminus (\frac{P^{-j+1}\mathcal{O}}{\mathcal{O}})$. Donc:

$$\forall \gamma \in \left(\frac{P^{-j}\mathcal{O}}{\mathcal{O}}\right) \setminus \left(\frac{P^{-j+1}\mathcal{O}}{\mathcal{O}}\right), \quad E(e(\gamma)) = E(e(P^{-j})).$$

Maintenant, en appliquant la relation (f) (avec $\gamma = 0$) de la proposition 3.1, on obtient:

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad (N(P))^k \mu_{P^k}\mu_{P^k}^* = \mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\delta \in (\frac{P^{-j}\mathcal{O}}{\mathcal{O}}) \setminus (\frac{P^{-j+1}\mathcal{O}}{\mathcal{O}})} e(\delta).$$

En appliquant E à cette identité, on obtient:

$$N(P)^k \mu_{P^k} \mu_{P^k}^* = \mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{k} (N(P)^j - N(P)^{j-1}) E(e(P^{-j})).$$

Par récurrence, on vérifie alors aisément que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a $E(e(P^{-k})) \in C^*(\mathcal{O}_+^*)$, ce qui prouve la proposition 4.1. □

5. Représentations de C_K et états KMS_β de (C_K, σ_t) pour $\beta > 1$

5.1. Caractères locaux

Soit $\mathbf{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 et $\mathbf{U}_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Rappelons qu'un *caractère* d'un groupe abélien localement compact est un morphisme continu de ce groupe dans $\mathbf{U}$. Les résultats de ce sous-paragraphe 5.1 sont valables sans l'hypothèse de principalité de $\mathcal{O}$. Dans la suite, nous fixons pour chaque place $v \in \Omega_{\mathcal{O}}$ une uniformisante π_v de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ de K_v. Le groupe $K_v/\mathcal{O}_v$ sera toujours muni de la topologie discrète.

Lemme 5.1.1. *Soit v une place non archimédienne de K. Alors, il existe un caractère $\chi_v : K_v/\mathcal{O}_v \to \mathbf{U}$ dont la restriction à $\pi_v^{-1}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$ est non triviale. Le groupe des caractères de $K_v/\mathcal{O}_v$ est isomorphe à $\mathcal{O}_v$.*

*Preuve***.** On distingue deux cas:

- Premier cas: le corps K est une extension finie de $\mathbf{Q}$. Alors K_v est une extension finie de $\mathbf{Q_p}$, où p est le nombre premier de $\mathbf{Z}$ tel que v divise p. Notons S la trace de $K_v/\mathbf{Q_p}$ et δ sa différente. Pour x dans K_v, on a l'équivalence (cf. [23], 2.2):

$$x \in \delta^{-1} \Leftrightarrow S(x.\mathcal{O}_v) \subset \mathbf{Z}_p.$$

  On peut écrire $\delta^{-1} = d^{-1}\mathcal{O}_v$ avec $d \in \mathcal{O}_v$ ce qui permet de définir un morphisme additif $\varphi_v : K_v/\mathcal{O}_v \to \mathbf{Q_p}/\mathbf{Z}_p$ par la formule $\varphi_v(x) = S(x/d)$. Comme $\pi_v^{-1}d^{-1} \notin \delta^{-1}$, on a bien $\varphi_v(\pi_v^{-1}d^{-1}) \neq 0 \mod.\mathbf{Z}_p$, soit $\varphi_v(\pi_v^{-1}\mathcal{O}_v) \neq \{0\}$. Identifiant $\mathbf{Q_p}/\mathbf{Z}_p$ avec un sous-groupe de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, il suffit alors de poser $\chi_v(x) = \exp(2i\pi\varphi_v(x))$ pour obtenir un caractère de $K_v/\mathcal{O}_v$ dont la restriction à $\pi_v^{-1}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$ est non triviale.

  On obtient enfin un isomorphisme de $\mathcal{O}_v$ sur le groupe des caractères $\widehat{K_v/\mathcal{O}_v}$ de $K_v/\mathcal{O}_v$ en envoyant $\eta \in \mathcal{O}_v$ sur le caractère $y \mapsto \exp(2i\pi S(\eta y/d))$ (cf. [23], 2.2).
- Deuxième cas: Le corps K est une extension finie de $\mathbf{F}_q(T)$. Soit k le corps résiduel de $\mathcal{O}_v$, c'est une extension finie de $\mathbf{F}_q$, donc aussi de $\mathbf{F}_p$,

où p est la caractéristique de K. Alors K_v est isomorphe à $k((T))$ ([18], théorème 2 page 43) et $\mathcal{O}_v$ s'identifie à $k[[T]]$. Notons S la trace de $k/\mathbf{F}_p$, on obtient un caractère φ de $k((T))/k[[T]]$ en envoyant la classe de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n$ sur $\exp(2i\pi S(a_{-1})/p)$. On a en particulier $\varphi(1/T) = \exp(2i\pi/p) \neq 1$, donc la restriction de φ à $T^{-1}k[[T]]/k[[T]]$ est non triviale. Ainsi, il existe un caractère χ_v de $K_v/\mathcal{O}_v$ dont la restriction à $\pi_v^{-1}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$ est non triviale.

Là encore, on obtient un isomorphisme de $k[[T]]$ sur le groupe des caractères de $k((T))/k[[T]]$ en envoyant $\eta \in k[[T]]$ sur le caractère $y \mapsto \varphi(\eta y)$ (c'est un corollaire de la non dégénéréscence de la forme $\mathbf{F}_q$-bilinéaire $(x, x') \mapsto S(xx')$ définie sur le corps résiduel k, cf. [3], V.10.6, proposition 12).

□

Définition 5.1.2. On dira qu'un caractère χ_v de $K_v/\mathcal{O}_v$ est *admissible* quand sa restriction à $\pi_v^{-1}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$ est non triviale.

Définition 5.1.3. On dira qu'un caractère χ du groupe discret $K/\mathcal{O}$ est *admissible* s'il existe pour toute place $v \in \Omega_{\mathcal{O}}$ un caractère admissible $\chi_v : K_v/\mathcal{O}_v \to \mathbf{U}$ tel que, pour tout γ de $K/\mathcal{O}$:

$$\chi(\gamma) = \prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} \chi_v(\gamma_v)$$

où γ_v désigne l'image de γ dans $K_v/\mathcal{O}_v$. En outre, on identifiera fréquemment χ à un caractère de K trivial sur $\mathcal{O}$.

Lemme 5.1.4. *Soit χ un caractère admissible de $K/\mathcal{O}$. L'application $u \mapsto (\gamma \mapsto \chi(u\gamma))$ de W dans $\widehat{K/\mathcal{O}}$ est injective.*

*Preuve***.** Supposons $u \neq u'$, alors il existe une place v de $\Omega_{\mathcal{O}}$ telle que $u_v \neq u'_v$. On peut trouver x_v dans K_v tel que $\chi_v(x_v(u'_v - u_v)) \neq 1$ (car χ_v est non trivial). Soit alors x dans $K/\mathcal{O}$ dont l'image dans $K_v/\mathcal{O}_v$ est x_v et l'image dans $K_w/\mathcal{O}_w$ est nulle pour $w \in \Omega_{\mathcal{O}}$ autre que v. On a $\chi((u-u')x) = \chi_v(x_v(u'_v - u_v)) \neq 1$ d'où le résultat. □

Fixons un caractère admissible χ de $K/\mathcal{O}$ (un tel caractère existe d'après le lemme 5.1.1 et la définition 5.1.3). A chaque $a \in \mathcal{R} = \prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_v$, on associe le caractère $\chi^a \in \widehat{K/\mathcal{O}}$ défini par $\chi^a(\gamma) = \chi(a.\gamma)$ pour tout γ de $K/\mathcal{O}$, $a.\gamma$ étant défini par la formule (4) dans le paragraphe 4 En procédant comme dans le paragraphe 2.2 de [23], on vérifie que $a \mapsto \chi^a$ définit un isomorphisme $\mathcal{R} \simeq \widehat{K/\mathcal{O}}$. La proposition suivante fournit une identification explicite entre $C(\mathcal{R})$ et la C^*-algèbre $C^*(K/\mathcal{O})$ $(\subset C_K)$ introduite dans le paragraphe 4

Proposition 5.1.5.

1. *On définit un isomorphisme de C^*-algèbres $\psi : C^*(K/\mathcal{O}) \to C(\mathcal{R})$ en posant:*

$$\forall h = \sum_{\gamma \in K/\mathcal{O}} \alpha_\gamma e(\gamma) \in \mathbf{C}[K/\mathcal{O}],\ \forall a \in \mathcal{R},\ \psi(h)(a) = \sum_{\gamma \in K/\mathcal{O}} \alpha_\gamma \chi(a\gamma)$$

où la famille (α_γ) de nombres complexes est presque nulle. En particulier on a $\psi(h^*)(a) = \overline{\psi(h)(a)}$ pour tout $a \in \mathcal{R}$ et $\psi(h * h^*) = \psi(h)\overline{\psi(h)}$.

2. *L'action θ de W sur C_K induit une action encore notée θ sur $C(\mathcal{R})$ telle que:*

$$\forall (u, f) \in W \times C(\mathcal{R}),\ \forall a \in \mathcal{R},\ \theta_u(f)(a) = f(ua).$$

Preuve. La théorie de la transformée de Fourier ([24]) montre que pour tous h, ξ appartenant à l'algèbre $\mathbf{C}[K/\mathcal{O}]$ (muni du produit de convolution $*$), on a:

$$||h * \xi||_{L^2(K/\mathcal{O})} = ||\psi(h)\psi(\xi)||_{L^2(\mathcal{R})}$$

de sorte que $||h||_{C^*(K/\mathcal{O})} = ||\psi(h)||_{C(\mathcal{R})}$. On obtient alors aisément le point 1. Le point 2 découle du point 1 et du lemme 4.2.

Note. Une isométrie partielle V de $C^*(K/\mathcal{O})$ est donc une fonction continue $f \in C(\mathcal{R})$ telle que $f\bar{f}$ soit la fonction caractéristique d'une partie compacte convenable de $\mathcal{R}$. Ce fait sera utilisé dans le paragraphe 7

5.2 Construction de représentations de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$

Rappelons que pour r dans $\mathcal{O}_+^*$, on dispose de $\mu_r = N(r)^{-1/2} e_{X_r}$, où $N(r)$ désigne la norme de l'idéal engendré par r et X_r est la double classe de l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \in P_K$.

On note $(\varepsilon_r)_{r \in \mathcal{O}_+^*}$ la base canonique orthonormée de $l^2(\mathcal{O}_+^*)$. Pour γ appartenant à $K/\mathcal{O}$, rappelons que $e(\gamma)$ désigne la double classe $P_\mathcal{O}^+ \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_\mathcal{O}^+$ (cf. début du paragraphe 3).

Proposition 5.2.1. *Soit χ un caractère admissible de $K/\mathcal{O}$. Alors, on obtient une représentation involutive $\widetilde{\pi}_1$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P_K^+, P_\mathcal{O}^+)$ (à valeurs dans $Bl^2(\mathcal{O}_+^*)$) en posant:*

- $\widetilde{\pi}_1(\mu_r)\varepsilon_s = \varepsilon_{rs}\ \forall r, s \in \mathcal{O}_+^*$
- $\widetilde{\pi}_1(e(\gamma))\varepsilon_r = \chi(r\gamma)\varepsilon_r\ \forall r \in \mathcal{O}_+^*,\ \gamma \in K/\mathcal{O}$

Preuve. Posons $\mu'_r = \widetilde{\pi}_1(\mu_r)$ et $e'(\gamma) = \widetilde{\pi}_1(e(\gamma))$, il s'agit de vérifier les relations de a) à f) de la proposition 3.1 pour ces opérateurs. On a clairement a), avec

$\mu_r^{'*}\varepsilon_s = \varepsilon_{s/r}$ si r divise s et $\mu_r^{'*}\varepsilon_s = 0$ si r ne divise pas s. Les relations b) et c) sont claires, la relation d) résulte de ce que χ est un caractère à valeurs dans $\mathbf{U}$, la relation e) est claire. Vérifions donc f); nous devons calculer $\mu_r' e'(\gamma)\mu_r^{'*}(\varepsilon_s)$.

- Supposons d'abord que r ne divise pas s. On a déjà $\mu_r^{'*}\varepsilon_s = 0$, il faut vérifier que $\sum_{r\delta=\gamma} e'(\delta)\varepsilon_s = 0$; pour cela il suffit de prouver $\sum_{r\delta=0} e'(\delta)\varepsilon_s = 0$, soit $\sum_{r\delta=0}\chi(s\delta) = 0$. Il s'agit donc d'évaluer $\sum_{\delta\in r^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}}\chi(s\delta)$. On peut écrire $r = \prod_{i\in I} P_i^{\alpha_i}$ avec I fini et $\alpha_i \in \mathbf{N}$; d'après le lemme chinois, on a alors $\prod_{i\in I} P_i^{-\alpha_i}\mathcal{O}/\mathcal{O} \simeq r^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}$ (l'isomorphisme étant donné par $\delta = (\delta_i) \mapsto \sum \delta_i$). Ainsi, en utilisant la relation $\chi(s\delta) = \prod_{i\in I}\chi(s\delta_i)$, on obtient:

$$\sum_{\delta\in r^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}} \chi(s\delta) = \sum_{\delta=(\delta_i)\in\prod_i P_i^{-\alpha_i}\mathcal{O}/\mathcal{O}} \chi(s\delta) = \prod_{i\in I}\left(\sum_{\delta_i\in P_i^{-\alpha_i}\mathcal{O}/\mathcal{O}} \chi(s\delta_i)\right).$$

  Et comme r ne divise pas s, il existe i tel que $s = P_i^{\alpha_i-\beta_i}u_i$ avec β_i strictement positif et $u_i \in \mathcal{O}$ premier à P_i. Il nous suffit de montrer que pour un tel i:

$$\sum_{\delta_i\in P_i^{-\alpha_i}\mathcal{O}/\mathcal{O}} \chi(s\delta_i) = 0.$$

  Or, en écrivant $s\delta_i = u_i(P_i^{\alpha_i-\beta_i}\delta_i) = u_i\delta_i'$, on obtient:

$$\sum_{\delta_i\in P_i^{-\alpha_i}\mathcal{O}/\mathcal{O}} \chi(s\delta_i) = \sum_{\delta_i'\in P_i^{-\beta_i}\mathcal{O}/\mathcal{O}} \chi(u_i\delta_i') = \sum_{\delta_i'\in P_i^{-\beta_i}\mathcal{O}/\mathcal{O}} \chi(\delta_i')$$

  puisque la multiplication par u_i est bijective dans $P_i^{-\beta_i}\mathcal{O}/\mathcal{O}$. Mais si v désigne la place de K correspondant à P_i, on sait (à cause du théorème d'approximation forte) que l'injection $P_i^{-\beta_i}\mathcal{O}/\mathcal{O} \to \pi_v^{-\beta_i}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$ est un isomorphisme, où π_v est l'uniformisante de $\mathcal{O}_v$ fixée plus haut. D'où:

$$\sum_{\delta_i'\in P_i^{-\beta_i}\mathcal{O}/\mathcal{O}} \chi(\delta_i') = \sum_{\delta_v'\in\pi_v^{-\beta_i}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v} \chi_v(\delta_v').$$

  Or le caractère local χ_v est admissible donc, comme $\beta_i > 0$, la restriction de χ_v au groupe fini $\pi_v^{-\beta_i}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$ est non triviale ce qui implique la nullité de la dernière somme ([19], proposition 4 page 105). On a donc le résultat voulu quand r ne divise pas s.
- Quand r divise s, écrivons $s = rt$ avec $t \in \mathcal{O}_+^*$. Le cardinal de l'ensemble des δ de $K/\mathcal{O}$ tel que $r\delta = \gamma$ est le cardinal de $\mathcal{O}/r\mathcal{O}$, c'est-à-dire la norme de l'idéal (r). On a:

$$\sum_{r\delta=\gamma} e'(\delta)\varepsilon_s = \sum_{r\delta=\gamma}\chi(rt\delta)\varepsilon_s = \sum_{r\delta=\gamma}\chi(t\gamma)\varepsilon_s = N(r).\chi(t\gamma)\varepsilon_s$$

et d'autre part:

$$\mu_r' e'(\gamma)\mu_r'^*(\varepsilon_s) = \mu_r' e'(\gamma)(\varepsilon_t) = \chi(t\gamma)\varepsilon_s.$$

Ainsi la relation (f) est bien vérifiée ce qui achève la preuve de la proposition.

□

Proposition 5.2.2. *Soit χ un caractère admissible de $K/\mathcal{O}$. Pour $u \in W$, on obtient une représentation involutive $\widetilde{\pi}_u$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P_K^+, P_{\mathcal{O}}^+)$ en posant:*

- $\widetilde{\pi}_u(\mu_r)\varepsilon_s = \varepsilon_{rs}\ \forall r, s \in \mathcal{O}_+^*$
- $\widetilde{\pi}_u(e(\gamma))\varepsilon_r = \chi(ur\gamma)\varepsilon_r\ \forall r \in \mathcal{O}_+^*\ , \gamma \in K/\mathcal{O}$

On a alors $\widetilde{\pi}_u = \widetilde{\pi}_1 \circ \theta_u$.

Preuve. Soit $v \in \Omega_{\mathcal{O}}$. Pour γ dans $K/\mathcal{O}$, on appelle encore γ_v l'image de γ dans $K_v/\mathcal{O}_v$ et u_v la projection de $u \in W$ sur $\mathcal{O}_v^*$. Le caractère $\chi^u : \gamma \mapsto \chi(u\gamma)$ de $K/\mathcal{O}$ envoie γ sur $\prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} \chi_v(u_v\gamma_v)$ et le caractère $\gamma_v \mapsto \chi_v(u_v\gamma_v)$ de $K_v/\mathcal{O}_v$ est admissible puisque χ_v l'est et $u_v \in \mathcal{O}_v^*$. Il suffit donc d'appliquer la proposition précédente pour obtenir que $\widetilde{\pi}_u$ est bien une représentation involutive. La formule $\widetilde{\pi}_u = \widetilde{\pi}_1 \circ \theta_u$ découle du lemme 4.2. □

Convention. Pour chaque $u \in W$, nous noterons encore $\widetilde{\pi}_u$ la représentation de $C_K = C_r^*(P_K^+, P_{\mathcal{O}}^+)$ qui prolonge $\widetilde{\pi}_u$ comme indiqué dans la proposition 3.2.

5.3. Paramétrisation des états KMS_β extrémaux pour $\beta > 1$

Rappelons (voir paragraphe 4) que le groupe W des $\mathcal{O}$-idèles unitaires est un groupe de symétrie du système dynamique (C_K, σ_t). Nous allons prouver ici le point 3 du théorème 0.1. Dans le paragraphe suivant, on réinterprétera l'action de W en termes de groupes de Galois en utilisant la théorie du corps de classes. Dans [2], Bost et Connes ont étudié le cas $K = \mathbf{Q}$ (avec $\mathcal{O} = \mathbf{Z}$); le groupe $W = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbf{Z}_p^*$ s'identifie alors au groupe de Galois de l'extension cyclotomique maximale de $\mathbf{Q}$ puisque $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mathbf{U}_{p^n})/\mathbf{Q})$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^*$.

L'analogue de $\mathbf{N}^*$ dans notre situation est $\mathcal{O}_+^*$. Rappelons que H désigne l'opérateur de $l^2(\mathcal{O}_+^*)$ défini par $H(\varepsilon_r) = (\log N(r))\varepsilon_r$ pour r dans $\mathcal{O}_+^*$, on a:

$$e^{itH} x e^{-itH} = \sigma_t(x) \quad \forall x \in C^*(\mathcal{O}_+^*), \quad \forall t \in \mathbf{R} \tag{6}$$

et aussi:

$$e^{itH}\widetilde{\pi}_u(x)e^{-itH} = \widetilde{\pi}_u(\sigma_t(x)) \quad \forall x \in C^*(\mathcal{O}_+^*), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall u \in W.$$

Notons que $H(\varepsilon_1) = 0$ et que $N(r) \geq 2$ pour $r \in \mathcal{O}_+^* \setminus \{1\}$. On fixe un caractère admissible χ de $K/\mathcal{O}$; on dispose alors des représentations $\widetilde{\pi}_u, u \in W$ définies dans la proposition 5.2.2.

Théorème 5.3.1. *Soient $u \in W$ et $\beta > 1$.*

1. *On définit un état KMS_β sur (C_K, σ_t) par l'égalité:*

$$\varphi_{\beta,u}(x) = \zeta_{\mathcal{O}}(\beta)^{-1}\mathrm{tr}(\widetilde{\pi}_u(x)e^{-\beta H}).$$

2. *L'état $\varphi_{\beta,u}$ est factoriel de type I_∞.*
3. *L'application $\Theta : u \mapsto \varphi_{\beta,u}$ est un homéomorphisme du groupe compact W sur l'espace $\mathcal{E}(K_\beta)$ des points extrémaux du simplexe de Choquet (convexe compact) des états KMS_β sur (C_K, σ_t).*

Remarque. Dans le langage de la mécanique statistique quantique, $\zeta_{\mathcal{O}}(\beta)$ est la fonction de partition du système dynamique (C_K, σ_t).

Preuve.

1. Rappelons que $\mathrm{tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{r\in\mathcal{O}_+^*} \exp(-\beta \log N(r)) = \zeta_{\mathcal{O}}(\beta)$. On a aussi, pour tout x de C_K:

$$\varphi_{\beta,u}(xx^*) = 1/\zeta_{\mathcal{O}}(\beta)\mathrm{tr}[\widetilde{\pi}_u(x^*)e^{-\beta H}\widetilde{\pi}_u(x)] \geq 0$$

donc $\varphi_{\beta,u}$ est bien un état. L'égalité (6) permet de voir qu'il vérifie la condition KMS_β.

2. Considérons la représentation $\pi_{\beta,u} : C_K \to B(l^2(\mathcal{O}_+^*) \otimes l^2(\mathcal{O}_+^*))$ définie par la formule:

$$\pi_{\beta,u}(x)(\xi \otimes \eta) = \widetilde{\pi}_u(x)(\xi) \otimes \eta.$$

Désignons par $\Omega_{\beta,u}$ le vecteur unitaire de $l^2(\mathcal{O}_+^*) \otimes l^2(\mathcal{O}_+^*)$ défini par l'égalité:

$$\Omega_{\beta,u} = 1/\sqrt{\zeta_{\mathcal{O}}(\beta)} \sum_{r\in\mathcal{O}_+^*} N(r)^{-\beta/2}\varepsilon_r \otimes \varepsilon_r.$$

Il est clair que pour chaque x de C_K, on a:

$$\varphi_{\beta,u}(x) =< \pi_{\beta,u}(x)\Omega_{\beta,u}, \Omega_{\beta,u} > .$$

Par ailleurs, on vérifie que pour chaque $P_0 \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbf{N}$, la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de $l^2(\mathcal{O}_+^*)$ engendré par les vecteurs $\varepsilon_{P_0^k \prod_{P\neq P_0} P^{n_P}}$ appartient à l'algèbre de Toeplitz τ_{P_0} (plongée dans $Bl^2(\mathcal{O}_+^*)$) engendrée par μ_{P_0}. On en déduit facilement que chaque vecteur $\varepsilon_{m_1} \otimes \varepsilon_{m_2}$ de la base de $l^2(\mathcal{O}_+^*) \otimes l^2(\mathcal{O}_+^*)$ appartient à l'adhérence de $\pi_{\beta,u}(\, C^*(\mathcal{O}_+^*)\,)(\Omega_{\beta,u})$.

Par conséquent, $\pi_{\beta,u}(C_K)(\Omega_{\beta,u})$ est un sous-espace vectoriel dense de $l^2(\mathcal{O}_+^*)\otimes l^2(\mathcal{O}_+^*)$ et $(\pi_{\beta,u}; \Omega_{\beta,u})$ définit *la* représentation GNS de $\varphi_{\beta,u}$. Maintenant, l'irréductibilité de $\widetilde{\pi}_u$ permet de voir que $[\pi_{\beta,u}(C_K)]' = \mathrm{Id}\otimes Bl^2(\mathcal{O}_+^*)$ de sorte que l'algèbre de von Neumann M engendrée par $\pi_{\beta,u}(C_K)$ est

$Bl^2(\mathcal{O}_+^*) \otimes Id$. Le commutant M' est alors égal à $Id \otimes Bl^2(\mathcal{O}_+^*)$ et le centre $M \cap M'$ est trivial. Ainsi, $\varphi_{\beta,u}$ est un état factoriel de type I_∞. Enfin l'expression de $\Omega_{\beta,u}$ montre que la liste des valeurs propres associées est bien: $\{\zeta_{\mathcal{O}}^{-1}(\beta)N(r)^{-\beta},\ r \in \mathcal{O}_+^*\}$.

3. Comme $\varphi_{\beta,u}$ est factoriel, c'est un état KMS_β extremal ([4], théorème 5.3.30). Montrons que l'application Θ est injective. L'état $\varphi_{\beta,u}$ détermine un unique état noté $\widetilde{\varphi}_{\beta,u}$ sur l'algèbre de Von Neumann $M = Bl^2(\mathcal{O}_+^*) \otimes \mathrm{Id}$ engendrée par $\pi_{\beta,u}(C_K)$:

$$\forall X \otimes \mathrm{Id} \in Bl^2(\mathcal{O}_+^*) \otimes \mathrm{Id};\ \widetilde{\varphi}_{\beta,u}[X \otimes \mathrm{Id}] =< X(\Omega_{\beta,u}), \Omega_{\beta,u} > .$$

Pour chaque $\hat{\beta} > 0$, on a $e^{-\hat{\beta}H} \in M$. Ainsi la connaissance de $\varphi_{\beta,u}$ *détermine*, pour chaque $\gamma \in K/\mathcal{O}$, la valeur de:

$$\lim_{\hat{\beta}\to+\infty} \widetilde{\varphi}_{\beta,u}[\widetilde{\pi}_u(e(\gamma))e^{-\hat{\beta}H} \otimes \mathrm{Id}]$$
$$= \zeta_{\mathcal{O}}(\beta)^{-1} < \widetilde{\pi}_u(e(\gamma))(\varepsilon_1), \varepsilon_1 >= \zeta_{\mathcal{O}}(\beta)^{-1}\chi(u\gamma).$$

Ainsi la donnée de $\widetilde{\varphi}_{\beta,u}$ détermine complètement le caractère $\gamma \mapsto \chi(u\gamma)$ de $K/\mathcal{O}$. Le lemme 5.1.4 entraîne alors l'injectivité de Θ.

Ainsi Θ est injective et continue de W dans $\mathcal{E}(K_\beta)$ (qui est compact pour la topologie faible); nous allons établir sa surjectivité ce qui prouvera le théorème. Soit donc ψ un état KMS_β de (C_K, σ_t). Les deux états KMS_β suivants:

$$\int_W \psi \circ \theta_u du, \quad \int_W \varphi_{\beta,u} du$$

sont invariants sous l'action de W. Ils sont donc complètement déterminés par leurs restrictions à la sous-algèbre $C_K^W = C^*(\mathcal{O}_+^*)$. Or d'après la proposition 1.2, le système sans interaction $(C^*(\mathcal{O}_+^*, \sigma_t))$ possède un unique état KMS_β noté φ_β. Par conséquent on a:

$$\int_W \psi \circ \theta_u du = \int_W \varphi_{\beta,u} du = \varphi_\beta \left(\int_W \theta_u du \right). \tag{7}$$

Comme ψ est extrémal, les deux premiers membres de l'égalité (7) donnent deux décompositions du même état comme barycentre de mesures sur le simplexe de Choquet $\mathcal{E}(K_\beta)$. L'unicité d'une telle décomposition entraîne alors que: $\psi \circ \theta_u \in \{\varphi_{\beta,v},\ v \in W\}$ pour presque tout u de W. Il existe donc $u, v \in W$ tels que $\psi = \varphi_{\beta,v} \circ \theta_u^{-1} \in \Theta(W)$. Ceci prouve la surjectivité de Θ.

□

6. Interprétation des états KMS_β extrémaux de (C_K, σ_t) dans la théorie du corps de classes

Nous avons vu dans le lemme 4.2 que l'action de W sur C_K est donnée par $\theta_u(e(\gamma)) = e(u.\gamma)$ pour tous $u \in W$ et $\gamma \in K/\mathcal{O}$. Nous allons interpréter ce groupe de symétrie W comme un groupe de Galois G abstrait. La description de l'action de G sur C_K sera moins simple que dans le cas $\mathcal{O} = \mathbf{Z}$ (traité dans [2]) car d'une part le groupe W ne s'identifie plus au groupe de Galois cyclotomique de K, et d'autre part $K/\mathcal{O}$ n'est pas isomorphe au groupe des racines de l'unité de $\overline{K}$. Nous allons utiliser la théorie de Lubin-Tate pour interpréter l'action de $\mathcal{O}_v^*$ sur $K_v/\mathcal{O}_v$ comme celle d'un groupe de Galois local G_{π_v}. Puis nous ferons agir $G = \prod_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} G_{\pi_v}$ sur C_K. Enfin, si K est un corps de fonctions, d'une part G s'identifiera à un sous-groupe J du groupe de Galois abélien modifié de K et d'autre part, la principalité de $\mathcal{O}$ permettra d'identifier $K/\mathcal{O}$ à un groupe formel global $\Lambda \subset \oplus_v K^{\mathrm{ab}}$. L'action de W sur C_K s'interprètera alors comme l'action galoisienne de J sur Λ.

6.1. Rappels sur la théorie de Lubin-Tate

Nous allons rappeler brièvement la construction de Lubin-Tate (pour plus de détails, cf. [5], pages 128–161, ou [14]). Soit F un corps local, c'est-à-dire un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini, par exemple $F = K_v$. On fixe une uniformisante π de F; on note A l'anneau des entiers de F et q le cardinal du corps résiduel k. Considérons $\Lambda_f^n \subset F_{\mathrm{sep}}$ l'ensemble des zéros de la n-ième itérée du polynôme $f(T) = T^q + \pi T$, posons $\Lambda_f = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \Lambda_f^n$ et $F_\pi = F[\Lambda_f]$. Alors, l'extension abélienne maximale F^{ab} de F est la composée des deux extensions linéairement disjointes F_π et F^{nr} (l'extension maximale non ramifiée de F). Notons que dans le cas $F = \mathbf{Q_p}$, le groupe formel $\Lambda_f \simeq \mathbf{Q_p}/\mathbf{Z}_p$ est simplement le groupe des racines complexes de l'unité dont l'ordre est une puissance de p ([5], page 149).

L'ensemble Λ_f est muni d'une structure de A-module via une loi additive de groupe formel et d'un homomorphisme $a \mapsto [a]_f$ de A dans $\mathrm{End}_A(\Lambda_f)$ qui définit la multiplication externe par la formule $a.\omega = [a]_f(\omega)$ pour tout (a, ω) de $A \times \Lambda_f$. Le A-module formel Λ_f est isomorphe à F/A (le sous-module Λ_f^n correspondant à $\pi^{-n}A/A$). Plus précisément, on a un isomorphisme $h : F/A \to \Lambda_f$ tel que si l'on note $\alpha_1(u) = h^{-1} \circ u \circ h$ pour chaque $u \in \mathrm{End}_A(\Lambda_f)$, alors le diagramme suivant est commutatif et toutes ses flèches sont des isomorphismes ([5], 3.6 pages 151–152).

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{[.]_f} & \mathrm{End}_A(\Lambda_f) \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow \\ A & \xrightarrow{\times .} & \mathrm{End}_A(F/A) \end{array}$$

Le groupe $G_\pi = \mathrm{Gal}(F_\pi/F)$ est isomorphe à $G^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F^{\mathrm{nr}})$ (ainsi on peut voir ce groupe aussi bien comme un sous-groupe de $G^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ que comme un quotient de celui-ci). Il agit sur $\Lambda_f \subset F^{\pi}$ d'où une flèche $\alpha_2 : G_\pi \to \mathrm{Aut}_A(\Lambda_f)$, qui est un isomorphisme ([5], 3.6 page 151, proposition 6b). Considérons la flèche $\phi : G_\pi \to \mathrm{Aut}_A(F/A)$ définie par $\phi = \alpha_1 \circ \alpha_2$. Comme F est un corps local, on a $\mathrm{Aut}_A(F/A) \simeq A^*$. Il existe donc un isomorphisme τ rendant le diagramme (D) suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} G_\pi & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G_\pi \\ {\scriptstyle\tau}\big\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\big\downarrow \\ A^* & \xrightarrow{\times .} & \mathrm{Aut}(F/A) \end{array}$$

et il est prouvé dans [14] que $\tau^{-1} : A^* \to G_\pi \subset G^{\mathrm{ab}}$ n'est autre que l'application de réciprocité d'Artin[1] ([5], VI).

Soit alors χ un caractère admissible de F/A (cf. définition 5.1.2) et g un élément de G_π. On définit un nouveau caractère admissible χ^g par la formule:

$$\chi^g(\gamma) = \chi(\,\phi(g)(\gamma)\,) = \chi(\,\tau(g).\gamma\,). \tag{8}$$

Pour chaque place v de $\Omega_{\mathcal{O}}$, nous appliquerons cette construction à $F = K_v$ et $A = \mathcal{O}_v$, en prenant pour uniformisante π_v de $\mathcal{O}_v$ l'élément irréductible de $\mathcal{P}$ correspondant. On considère alors le groupe de Galois "abstrait":

$$G = \prod_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} G_{\pi_v}. \tag{9}$$

6.2. Action de G sur la C^*-algèbre C_K

Rappelons que l'on a $K/\mathcal{O} = \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} K_v/\mathcal{O}_v$ et que pour chaque place v de $\Omega_{\mathcal{O}}$, on vient de construire un homomorphisme $\phi_v : G_{\pi_v} \to \mathrm{Aut}(K_v/\mathcal{O}_v)$. On fait alors agir $G = \prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} G_{\pi_v}$ sur $K/\mathcal{O}$ en posant pour tout $g = (g_v) \in G$:

$$\forall \gamma = \oplus\gamma_v \in \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} K_v/\mathcal{O}_v,\ g.\gamma = \oplus\phi_v(g_v)(\gamma_v) = \oplus\tau_v(g_v).\gamma_v. \tag{10}$$

En utilisant le lemme 4.2, on fait alors agir G ($\simeq W$) sur C_K en posant:

$$\forall g \in G,\ \theta_g(\mu_r) = \mu_r \text{ et } \theta_g(e(\gamma)) = e(g.\gamma)) \quad \forall (r,\gamma) \in \mathcal{O}_+^* \times K/\mathcal{O}.$$

On peut alors reformuler les résultats du paragraphe précédent de la manière suivante:

---

[1] En fait, c'est plutôt l'*opposé* si l'on prend la définition classique de l'application d'Artin mais la convention de signe que nous adoptons ici sera plus commode pour la suite.

Proposition 6.2.1. *Soit χ un caractère admissible fixé de $K/\mathcal{O}$. Pour tout $g \in G$, on définit une représentation involutive π_g de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ en posant:*

- $\pi_g(\mu_r)\varepsilon_s = \varepsilon_{rs}\ \forall r, s \in \mathcal{O}_+^*$
- $\pi_g(e(\gamma))\varepsilon_r = \chi(r(g.\gamma))\varepsilon_r\ \forall r \in \mathcal{O}_+^*,\ \gamma \in K/\mathcal{O}$

Proposition 6.2.2. *Soit $\widetilde{\pi}_g$ le prolongement canonique de π_g à la C^*-algèbre C_K (cf. proposition 3.2). Soit $\beta > 1$.*

1. *On définit un état KMS_β sur (C_K, σ_t) par l'égalité:*
$$\forall x \in C_K \quad \varphi_{\beta,g}(x) = \zeta_{\mathcal{O}}(\beta)^{-1}\mathrm{tr}(\widetilde{\pi}_g(x)e^{-\beta H}).$$
2. *L'état $\varphi_{\beta,g}$ est factoriel de type I_∞.*
3. *L'application $\Theta_g : g \mapsto \varphi_{\beta,g}$ est un homéomorphisme du groupe compact G sur l'espace $\mathcal{E}(K_\beta)$ des points extremaux du simplexe de Choquet des états KMS_β sur (C_K, σ_t).*

Rappelons que si K est un corps de fonctions sur $\mathbf{F}_q$, le groupe de Galois abélien modifié $\mathcal{G}$ de K est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ constitué des éléments dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}_q}/\mathbf{F}_q)$ est une puissance entière du Frobenius. Si K est un corps de nombres, on désignera également par $\mathcal{G}$ le groupe de Galois abélien de K.

On peut maintenant se demander si l'on peut relier le groupe G à $\mathcal{G}$, de manière à obtenir une paramétrisation "globale" des états KMS_β comme dans le cas $\mathcal{O} = \mathbf{Z}$. Dans le cas général, le groupe G_{π_v} s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{G}$: le sous-groupe d'inertie du groupe de décomposition en v. Pour $x = (x_v)_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}}$ dans G, on peut définir:
$$s(x) = \left(\prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} x_v\right) \in \mathcal{G} \tag{11}$$
(le produit dans $\mathcal{G}$ ayant bien un sens parce qu'une extension finie L/K a un groupe d'inertie trivial pour presque toute place v; cf. [5], 6.3. page 175). Ainsi, on dispose d'une flèche $s : G \to \mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{I}_K$ le groupe des idèles de K (bien noter qu'ici, on n'exclut *aucune* place de K) et $\mathcal{C}_K$ le groupe des classes d'idèles de K, c'est-à-dire le quotient de $\mathcal{I}_K$ par K^* (qui est plongé diagonalement dans $\mathcal{I}_K$). D'après le théorème principal de la théorie du corps de classes global, on dispose de l'application d'Artin globale $\psi : \mathcal{I}_K \to \mathcal{G}$, qui est triviale sur K^* et induit un morphisme de groupes (noté encore ψ) de $\mathcal{C}_K$ vers $\mathcal{G}$. La flèche $\psi : \mathcal{C}_K \to \mathcal{G}$ est toujours surjective et est un isomorphisme dans le cas où K est de caractéristique > 0 (cf. [5], VII.5; ne pas oublier que si K est un corps de fonctions, $\mathcal{G}$ désigne le groupe de Galois *modifié* de K).

La proposition suivante décrit l'image de s.

Proposition 6.2.3. *Soit j le plongement naturel $W \hookrightarrow \mathcal{C}_K$ (on envoie un $\mathcal{O}$-idèle sur un idèle en rajoutant 1 aux places de K qui ne sont pas dans $\Omega_{\mathcal{O}}$). Soit $\psi : \mathcal{C}_K \to \mathcal{G}$ l'application d'Artin globale. Alors:*

1. *Les applications d'Artin locales $\psi_v : \mathcal{O}_v^* \to G_{\pi_v}$ définissent un isomorphisme $W \to G$ noté (ψ_v).*
2. *Le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\ j\ } & \mathcal{C}_K \\ {\scriptstyle (\psi_v)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ G & \xrightarrow{\ \mathrm{s}\ } & \mathcal{G} \end{array}$$

3. *Soit $\hat{s} = s \circ (\psi_v)$. Le conoyau de $\hat{s} : W \to \mathcal{G}$ s'identifie au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/K)$ de l'extension abélienne maximale $\mathcal{L}$ de K non ramifiée aux places de $\Omega_{\mathcal{O}}$*

Preuve. Le premier point découle immédiatement du paragraphe 6.1 (notamment le diagramme (D)). Le deuxième point résulte de la relation entre l'application d'Artin globale et les applications d'Artin locales ([5], 6.3. page 175), soit:

$$\psi((x_v)) = \prod_{v \in \Omega_K} \psi_v(x_v) \quad \forall (x_v) \in \mathcal{C}_K. \tag{12}$$

Prouvons donc le troisième point. Soit W' le sous-groupe de $\mathcal{I}_K$ constitué des idèles $(x_v)_{v \in \Omega_{\mathcal{O}_K}}$ tels que $x_v = 1$ si $v \notin \Omega_{\mathcal{O}}$ et $x_v \in \mathcal{O}_v^*$ si $v \in \Omega_{\mathcal{O}}$. L'image de s n'est autre que l'image de W' par l'application d'Artin globale $\psi : \mathcal{I}_K \to \mathcal{G}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, appelons W_n le sous-groupe de $\mathcal{I}_K$ constitué des idèles $(x_v)_{v \in \Omega_K}$ tels que $|x_v - 1| < 1/n$ si v est archimédienne, $v(x_v - 1) \geq n$ si v est finie mais $v \notin \Omega_{\mathcal{O}}$, et $x_v \in \mathcal{O}_v^*$ si $v \in \Omega_{\mathcal{O}}$. D'après le théorème d'existence ([5], VII.5.1), le conoyau de la restriction de ψ à W_n est de la forme $\mathrm{Gal}(K_n/K)$, où K_n est une extension finie abélienne de K et on a de plus $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} K_n = \mathcal{L}$. Comme $W' = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} W_n$, on en déduit déjà que si $g \in \psi(W')$, alors g fixe point par point tous les K_n, et donc aussi $\mathcal{L}$. Réciproquement, si $g \in \mathcal{G}$ induit l'identité sur $\mathcal{L}$, alors g laisse fixe les K_n, de sorte que pour chaque n de $\mathbf{N}^*$ on peut choisir $w_n \in W_n$ tel que $g = \psi(w_n)$. Alors, la suite (w_n) est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un certain w dans le groupe localement compact $\mathcal{I}_K$. On a alors $w \in W'$ (à cause de la définition de W_n) et $\psi(w) = g$ d'où le résultat. $\square$

Remarque. On peut reformuler cet énoncé dans le langage de la géométrie algébrique. Si l'on pose $U = \mathrm{Spec}\mathcal{O} \subset \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$, le conoyau de $\hat{s}$ n'est autre que le groupe fondamental abélien étale $\pi_1^{\mathrm{ab}}(U)$ (resp. modifié si K est un corps de fonctions) du schéma U.

6.3. Le cas du corps de fonctions

On suppose dans ce sous-paragraphe que K est une extension finie séparable de $\mathbf{F}_q(T)$ de groupe de Galois modifié $\mathcal{G}$. On peut alors préciser la proposition 6.2.3 de la manière suivante:

Proposition 6.3.1. *Soit $\mathcal{L}$ l'extension abélienne maximale de K non ramifiée aux places de $\Omega_{\mathcal{O}}$. La flèche $s : G \to \mathcal{G}$ est injective. Son image $s(G)$ est le sous-groupe J de $\mathcal{G}$ constitué des éléments dont l'action sur $\mathcal{L}$ est triviale.*

*Preuve***.** Seule l'injectivité de s reste à prouver. Comme K est un corps de fonctions, l'application d'Artin globale ψ est un isomorphisme de $\mathcal{C}_K$ sur $\mathcal{G}$ ([5], 5.5. page 173 ou [16], théorème 4 page 152). On utilise alors le diagramme commutatif de la proposition 6.2.3. Comme j est injective, s est injective. □

Comme l'anneau $\mathcal{O}$ est principal, on peut pour chaque place v de $\Omega_{\mathcal{O}}$ prendre comme uniformisante π_v de $\mathcal{O}_v$ l'élément de $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ correspondant. Ainsi, l'ensemble des zéros de la n-ième itérée ($n \in \mathbf{N}$) du polynôme $T^{q_v} + \pi_v T$ (de Lubin-Tate) est inclus dans K^{ab}. Le groupe formel local Λ_f^v s'identifie donc à une partie de K^{ab}. De ce fait, la somme directe des groupes formels locaux Λ_f^v (chacun isomorphe à $K_v/\mathcal{O}_v$ comme $\mathcal{O}_v$-module) forme un groupe formel global $\Lambda \subset \bigoplus_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} K^{\mathrm{ab}}$. L'action galoisienne du sous-groupe J de $\mathcal{G}$ sur Λ correspond exactement à l'action de G sur $K/\mathcal{O}$ ($\simeq \Lambda$) décrite au début du sous-paragraphe 6.2. Dans le cas très particulier de l'anneau $\mathbf{Z}$ (cf. [2]), on dispose d'un résultat beaucoup plus précis: le groupe $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \bigoplus_p \mathbf{Q_p}/\mathbf{Z}_p$ se plonge dans $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ et non plus seulement dans $\bigoplus_p \mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$. En effet, la loi de groupe formel locale sur chaque $\mathbf{Q_p}/\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ *coincide* avec la multiplication usuelle, ce qui fait que le groupe formel global Λ se plonge dans $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ en étant isomorphe au groupe des racines de l'unité. L'action de $G = \prod_p \mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ correspond également à l'action de $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q})$ sur le groupe des racines de l'unité. Dans le cas d'un corps de nombres autre que $\mathbf{Q}$, on n'a pas en général de description aussi agréable car G ne s'injecte pas forcément dans $\mathcal{G}$.

Maintenant, en procédant comme au début du paragraphe 6.2, on peut voir J comme un groupe de symétrie de (C_K, σ_t) qui paramétrisera bijectivement l'ensemble des états KMS_β extremaux pour $\beta > 1$.

7. Existence et unicité de l'état KMS_β de (C_K, σ_t) pour $0 < \beta \leq 1$

La structure de la démonstration sera évidemment celle du paragraphe 7 de [2]. La clause relative à l'existence est une extension facile de [2], aussi nous n'en donnerons que les grandes lignes. Par contre nous donnerons davantage de détails pour la preuve de l'unicité. En effet, nous devrons établir ce point *essentiel* directement pour la sous-algèbre C_K^H introduite dans le théorème 0.2. Il s'agira alors d'étendre la preuve de [2] dans deux directions: le cas des corps globaux et le cas $H-$équivariant.

7.1. Unicité de l'état KMS_β pour C_K^H

L'objet de ce sous-paragraphe est d'établir la proposition suivante:

Proposition 7.1.1. *Soient H un sous-groupe compact de W et C_K^H la sous-C^*-algèbre de C_K formée des éléments $H-$invariants. Alors, pour chaque $\beta \in]0,1]$, (C_K^H, σ_t) possède au plus un état KMS_β. Un tel état est nécessairement factoriel de type III et $W/H-$invariant.*

Preuve. Nous commençons par introduire quelques notations. Rappelons que, dans le paragraphe 4, nous avons défini une action θ de W sur C_K qui, compte tenu de la proposition 5.1.5, nous permet d'identifier la sous-algèbre $C^*(K/\mathcal{O})^H$ de C_K^H avec $C(\mathcal{R})^H$. De plus si $u_1 \in W$ et $u_1' \in Hu_1$ alors pour tout x de C_K^H on a $\theta_{u_1}(x) = \theta_{u_1'}(x)$. Ceci nous autorise, pour chaque $u \in W/H$, à noter (encore) θ_u l'action de u sur C_K^H.

Maintenant, si χ_m est un caractère de W/H, on pose:

$$C_{K,\chi_m}^H = \big\{x \in C_K; \theta_u(x) = \chi_m(u)x \quad \forall u \in W/H\big\}. \tag{13}$$

Nous identifierons fréquemment un caractère de W/H à un caractère de W trivial sur H.

Si F est un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{P}$ (ou de places de $\Omega_\mathcal{O}$), on dit qu'un élément V de $C^*(K/\mathcal{O})^H = C(\mathcal{R})^H$ (resp. un caractère χ_m de W/H) est *localisé* dans F si $V \in (\otimes_{v\in F} C(\mathcal{O}_v)) \otimes 1 \subset C(\mathcal{R})$ (resp. χ_m, vu comme caractère de W, se factorise par la projection $W \to \prod_{v\in F} \mathcal{O}_v^*$).

Notons que si χ_m est localisé dans F, il existe un entier k_0 tel que la restriction de χ_m à $\prod_{P\in F}(1+P^{k_0}\mathcal{O}_P)$ soit triviale. En effet, χ_m est continu et les $(1+P^k\mathcal{O}_P)$ pour $k \in \mathbf{N}$ forment un système fondamental de voisinages de 1 dans $\mathcal{O}_P^*$. Dans ce cas, on peut alors identifier χ_m à un caractère de $(\mathcal{O}/N_0\mathcal{O})^*$ avec $N_0 = \prod_{P\in F} P^{k_0} \in \mathcal{O}_+^*$, car pour chaque P de $\mathcal{P}$: $\mathcal{O}_P^*/(1 + P^{k_0}\mathcal{O}_P) \simeq (\mathcal{O}/P^{k_0}\mathcal{O})^*$.

Réciproquement, comme W est muni de la topologie produit des $\mathcal{O}_v^*$, on vérifie aisément que chaque caractère de W/H est nécessairement localisé dans une partie finie convenable F.

Le lemme suivant est l'exact analogue du lemme 27 de [2]:

Lemme 7.1.2. *Soit $\beta \in]0,1]$ et ψ un état KMS_β du système dynamique (C_K^H, σ_t).*

1. *La restriction de ψ à $C^*(\mathcal{O}_+^*) \simeq C_K^W$ est égale à φ_β.*
2. *Soit χ_m un caractère non trivial de W/H et $V \in C^*(K/\mathcal{O})^H$ une isométrie partielle, tous deux localisés dans une partie finie F de $\mathcal{P}$, tels que:*

   $$\forall u \in W/H \quad \theta_u(V) = \chi_m(u)V.$$

   Alors $\forall x \in C^*(\mathcal{O}_+^*)$, $\quad \psi(Vx) = 0$
3. *Pour chaque caractère non trivial χ_m de W/H, la restriction de ψ au sous-espace spectral C_{K,χ_m}^H est nulle.*

Remarque. Dans le point 2], la condition $\theta_g(V) = \chi_m(g)V$ pour tout g de W/H entraine *automatiquement* que V est $H-$invariante.

Preuve de la proposition 7.1.1 *en fonction du lemme* 7.1.2**.** On observe que $C^K_{H,1} \simeq C^*(\mathcal{O}^*_+)$. Les points 1 et 2 du lemme 7.1.2 montrent alors que pour chaque caractère (trivial ou non) χ_m de W/H, la restriction de ψ à C^H_{K,χ_m} est entièrement déterminée . Or, W/H étant compact, un résultat général ([15]) assure que la somme directe des C^H_{K,χ_m} est dense dans C^H_K. Ceci prouve l'unicité de ψ. S'il existe, ψ est alors extremal et donc factoriel. La preuve du lemme montrera qu'il est de type III. Ceci prouve la proposition 7.1.1.

Preuve du lemme 7.1.2**.**

1. La restriction de ψ à $C^*(\mathcal{O}^*_+)$ induit un état KMS_β. Le point 1 découle alors de la proposition 1.2 qui affirme que $(C^*(\mathcal{O}^*_+), \sigma_t)$ possède un et un seul état KMS_β (noté φ_β).
2. Posons $E_1 = V^*V$. Comme $C^*(K/\mathcal{O})$ est commutative, $E_1 = VV^*$. Par hypothèse, pour chaque $g \in W/H$, on a $\theta_g(V) = \chi_m(g)V$ et $\theta_g(V^*) = \chi_m^{-1}(g)V^*$. Donc $E_1 = V^*V$ est $W-$invariant et appartient à $C^*(\mathcal{O}^*_+)$. Comme par hypothèse E_1 est un projecteur, on définit un automorphisme α de l'algèbre réduite $C^*(\mathcal{O}^*_+)_{E_1} = E_1 C^*(\mathcal{O}^*_+) E_1$ en posant:

$$\alpha(x) = VxV^* \quad \forall x \in C^*(\mathcal{O}^*_+)_{E_1}. \tag{14}$$

Comme $0 < \beta \leq 1$, la proposition 1.2 montre que l'adhérence faible de $C^*(\mathcal{O}^*_+)$ dans la représentation G.N.S de φ_β est un facteur de type III, que nous noterons M. On peut alors identifier $C^*(\mathcal{O}^*_+)$ à une sous-algèbre faiblement dense de M et étendre (de manière unique) l'état φ_β en un état normal $\widetilde{\varphi}_\beta$ fidèle sur M. Nous avons vu au début du paragraphe 4 que $V \in C^*(K/\mathcal{O})^H$ est fixé par tous les σ_t. Comme ψ vérifie la condition KMS_β, on constate alors que V appartient au centralisateur de ψ. Donc:

$$\forall x \in C^*(\mathcal{O}^*_+)_{E_1}, \varphi_\beta(VxV^*) = \psi(VxV^*) = \psi(xV^*V) = \psi(x) = \varphi_\beta(x).$$

Ainsi, l'automorphisme α préserve l'état $\widetilde{\varphi}_\beta$ et se prolonge en un automorphisme de l'algèbre de von Neumann réduite $M_{E_1} = E_1 M E_1$. Nous verrons plus loin que α est exterieur, ce qui est le point clef.

Lemme 7.1.3. *Soit $Q \in \mathcal{P} \setminus F$, on pose:*

$$(g_Q)_Q = 1, \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{P} \setminus \{Q\}, \quad (g_Q)_P = Q \in \mathcal{O}^*_P. \tag{15}$$

On note ainsi g_Q l'élément de W défini par $\prod_{P \in \mathcal{P}} (g_Q)_P$. Alors on a:

$$\mu_Q E_1 = E_1 \mu_Q \in M_{E_1}, \quad \alpha(E_1 \mu_Q) = \chi_m(g_Q) E_1 \mu_Q.$$

*Preuve***.** Rappelons que V et V^* appartiennent à $C^*(K/\mathcal{O})$ qui a été identifiée dans le paragraphe 4 à la C^*-algèbre engendrée par les $e(\gamma)$. En utilisant la relation (e) de la proposition 3.1, le lemme 4.2 et la proposition 5.1.5, on vérifie que:

$$V^*\mu_Q = \mu_Q\theta_Q(V^*), \quad V\mu_Q = \mu_Q\theta_Q(V).$$

Mais comme les fonctions V, V^* sont localisées dans F et que $Q \in \mathcal{P} \setminus F$, on constate que:

$$\theta_Q(V) = \theta_{g_Q}(V) = \chi_m(g_Q)V$$
$$\theta_Q(V^*) = \theta_{g_Q}(V^*) = \chi_m^{-1}(g_Q)V^*.$$

On en déduit que $\mu_Q V^* = \chi_m(g_Q)V^*\mu_Q$ et $\mu_Q V = \chi_m^{-1}(g_Q)V\mu_Q$. On obtient alors immédiatement le lemme 7.1.3.

Nous avons vu au début de ce paragraphe qu'on pouvait identifier χ_m (localisé dans F) à un caractère de $(\mathcal{O}/N_0\mathcal{O})^*$ où $N_0 = \prod_{P\in F} P^{k_0} \in \mathcal{O}_+^*$ et k_0 est un entier suffisamment grand. Pour chaque $Q \in \mathcal{P} \setminus F$, on peut alors écrire : $\chi_m(G_Q) = \chi_m(Q)$ où Q est identifié à son image dans $\prod_{P\in F} \mathcal{O}_P^*/(1 + P^{k_0}\mathcal{O}_P) \simeq (\mathcal{O}/N_0\mathcal{O})^*$.

Pour tout nombre complexe λ de module 1, notons $\rho_{P,\lambda}$ l'automorphisme de l'algèbre de Toeplitz τ_P défini par sa valeur sur le générateur μ_P:

$$\rho_{P,\lambda}(\mu_P) = \lambda\mu_P.$$

Il préserve l'état $\varphi_{\beta,P}$. Rappelons que d'après les propositions 1.1 et 1.2, $C^*(\mathcal{O}_+^*) = \otimes_{P\in\mathcal{P}}\tau_P$ et $\varphi_\beta = \otimes_{P\in\mathcal{P}}\varphi_{\beta,P}$. Comme M est de type III, $M_{E_1} = E_1 M E_1$ est isomorphe à M. D'après le lemme 7.1.3, l'automorphisme α s'écrit, à automorphismes intérieurs près, comme le produit tensoriel infini suivant:

$$\alpha = \otimes_{Q\notin F}\ \rho_{Q,\chi_m(Q)} \quad \text{dans} \quad M_{F^c} = \otimes_{Q\notin F}(M_Q, \varphi_{\beta,Q}) \tag{16}$$

où M_Q désigne le facteur de type I_∞ qui est l'adhérence faible de τ_Q dans la représentation GNS de $\varphi_{\beta,Q}$ (cf. proposition 1.2).

Nous désignerons par $\widetilde{\theta}_{\chi_m}$ l'élément de $\operatorname{Out} M = \operatorname{Aut}(M)/\operatorname{Inn}(M)$ dont la classe est $(\otimes_{Q\in F}\mathrm{Id}) \otimes_{Q\notin F} \rho_{Q,\chi_m(Q)}$. Le lemme suivant (dû à Connes, [6]) est crucial.

Lemme 7.1.4. *L'automorphisme $\widetilde{\theta}_{\chi_m}$ est extérieur relativement à φ_β si et seulement si le produit infini suivant ne converge pas absolument:*

$$\prod_{P\in\mathcal{P}} (1 - N(P)^{-\beta})(1 - \chi_m(P)N(P)^{-\beta})^{-1}. \tag{17}$$

Preuve du lemme 7.1.4. Dans le facteur M_P (de type I_∞) associé à $(\tau_P, \varphi_{\beta,P})$, l'automorphisme $\rho_{P,\chi_m(P)}$ est implémenté par un unitaire défini comme opérateur diagonal dont l'ensemble des valeurs propres est $\{\chi_m(P)^j, j \in \mathbf{N}\}$. En évaluant l'état $\varphi_{\beta,P}$ sur cet unitaire, on obtient:

$$(1 - N(P)^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} \chi_m(P)^n N(P)^{-n\beta} = (1 - N(P)^{-\beta})(1 - \chi_m(P)N(P)^{-\beta})^{-1}.$$

Un critère de [6] permet alors de voir que la divergence de la valeur absolue de (17) est équivalente à ce que $\widetilde{\theta}_{\chi_m}$ soit extérieur.

Rappelons que χ_m est non trivial et $0 < \beta \leq 1$. Démontrons alors que le produit (17) n'est pas absolument convergent. Désignons par $\mathcal{Q}$ l'ensemble des P de $\mathcal{P}$ tels que $\chi_m(P) \neq 1$. On observe qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout P de $\mathcal{Q}$, on ait: $|\chi_m(P) - 1| > \varepsilon$. On vérifie alors que la non convergence absolue du produit (17) est équivalente à la divergence de la série $\sum_{P\in\mathcal{Q}} \frac{|\chi_m(P)-1|}{N(P)^\beta}$. Il suffit donc de traiter le cas $\beta = 1$. Le produit:

$$\prod_{P\in\mathcal{P}} (1 - \chi_m(P)N(P)^{-\beta'})^{-1}$$

converge absolument pour $\beta' > 1$ et sa limite quand β' tend vers 1^+ est non nulle (c'est la généralisation du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers: cf. [13], théorème 2 page 313). Le produit eulérien

$$\prod_{P\in\mathcal{P}} (1 - N(P)^{-\beta'})$$

converge absolument pour $\beta' > 1$ (c'est la fonction $\zeta_{\mathcal{O}}$; cf. [13], paragraphe 2 page 159). Ainsi le produit (17) diverge pour $\beta = 1$, donc pour tout $\beta \in]0, 1]$.

Revenons maintenant à la preuve du lemme 7.1.2. D'après le lemme 7.1.4 et la formule (16), l'automorphisme α de M_{E_1} donné par (14) est extérieur. Ceci signifie exactement que:

$$\{z \in M_{E_1} \,/\, \forall x \in M_{E_1}, \quad \alpha(x)z = zx\} = \{0\}. \tag{18}$$

En outre, comme ψ est définie sur C_K^H, on définit une forme linéaire L sur M_{E_1} en posant:

$$\forall x \in C^*(\mathcal{O}_+^*)_{E_1}, \quad L(x) = \psi(Vx).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz $|L(x)|^2 \leq \psi(V^*V)\psi(x^*x)$ permet de voir que L se prolonge en une forme linéaire normale sur M_{E_1}. Considérons alors la décomposition polaire de L et l'isométrie partielle U de M_{E_1} telle que pour tout y de M_{E_1}, $L(y) = |L|(Uy)$ (cf. [22]). Le fait que V et ψ soient σ_t-invariants entraîne que L, U et $|L|$ le sont aussi. On peut alors appliquer le théorème de Radon-Nikodym aux deux poids *finis* de M_{E_1} définis par $|L|$ et $|\widetilde{\varphi_\beta}|$. La dérivée de Radon-Nikodym $(D|L| : D\widetilde{\varphi_\beta})_t$ appartient au centralisateur de $\widetilde{\varphi_\beta}$ et est de la forme h^{it} où $h \in M_{E_1}$. Ainsi:

$$\forall x \in M_{E_1}, \quad |L|(x) = \widetilde{\varphi_\beta}(hx). \tag{19}$$

La relation (18) et le lemme suivant montreront que $hU \equiv 0$ puis $L \equiv 0$ ce qui prouvera le point 2 du lemme 7.1.2.

Lemme 7.15. *Pour tout x de M_{E_1} on a:* $\alpha(x)(hU) = (hU)x$.

Preuve. Dans un premier temps, soient x', y' deux points de $C^*(\mathcal{O}_+^*)_{E_1}$ ($\subset C_K$). Comme ψ vérifie la condition KMS_β relativement à (C_K, σ_t), il existe une fonction F_1 holomorphe bornée et continue sur la bande fermée $0 \leq \mathrm{Im} z \leq \beta$, telle que:

$$\forall t \in \mathbf{R},\ F_1(t) = \psi((Vx')\sigma_t(y')) = L(x'\sigma_t(y'))$$
$$F_1(t + i\beta) = \psi(\sigma_t(y')(Vx')).$$

Rappelons que $\alpha(x') = Vx'V^*$. Comme V^* est fixé par le flot σ_t, il appartient au centralisateur de ψ. D'où:

$$\psi(\sigma_t(y')(Vx')) = \psi(V^*V\sigma_t(y')(Vx')) = \psi(V\sigma_t(y')Vx'V^*) = L(\sigma_t(y')\alpha(x')).$$

Donc: $F_1(t + i\beta) = L(\sigma_t(y')\alpha(x'))$. Considérons maintenant deux éléments quelconques x, y de M_{E_1}. Comme L est une forme linéaire normale sur M_{E_1}, ce qui précède montre l'existence d'une fonction F holomorphe bornée et continue sur la bande fermée $0 \leq \mathrm{Im} z \leq \beta$, telle que:

$$\forall t \in \mathbf{R},\ F(t) = L(x\sigma_t(y)),\ F(t + i\beta) = L(\sigma_t(y)\alpha(x)).$$

En utilisant la relation (19) et l'identité $L(z) = |L|(Uz)$ $(z \in M_{E_1})$, on obtient alors:

$$\widetilde{\varphi_\beta}(\,(hUx)\sigma_t(y)\,) = L(x\sigma_t(y)) = F(t), \quad \text{et}$$
$$\widetilde{\varphi_\beta}(\,hU\sigma_t(y)\alpha(x) = L(\sigma_t(y)\alpha(x)\,) = F(t + i\beta).$$

Mais $\widetilde{\varphi_\beta}$ vérifie la condition KMS_β relativement au flot σ_t, donc pour tout réel t on a:

$$F(t + i\beta) = \widetilde{\varphi_\beta}(\,\sigma_t(y)(hUx)\,) = \widetilde{\varphi_\beta}(\,hU\sigma_t(y)\alpha(x)\,). \tag{20}$$

Comme hU est fixée par le flot σ_t, il est dans le centralisateur de $\widetilde{\varphi_\beta}$ de sorte que (20) entraîne:

$$\forall (t,y) \in \mathbf{R} \times M_{E_1},\ \widetilde{\varphi_\beta}(\,\sigma_t(y)(hUx)\,) = \widetilde{\varphi_\beta}(\,\sigma_t(y)(\alpha(x)hU)\,).$$

La fidélité de $\widetilde{\varphi_\beta}$ entraîne alors que $hUx = \alpha(x)hU$ pour tout x de M_{E_1}, ce qui prouve le lemme 7.1.2.

3. Rappelons que le caractère non trivial χ_m est localisé en F. Il suffit de trouver une suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'isométries partielles localisées également en F telles que pour chaque $n \in \mathbf{N}$:

$$\forall g \in W/H,\ \theta_g(V_n) = \chi_m(g)V_n;\ \lim_{n'\to+\infty} \varphi_\beta(V_{n'}V_{n'}^*) = 1.$$

En effet, pour tout $a \in C^H_{K,\chi_m}$, $V_n^* a$ appartient à $C^H_{K,1} = C^*(\mathcal{O}_+^*)$. Le point 2 montre alors que $\psi(V_n(V_n^*a)\,) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis $\psi(a) = \lim \psi(V_nV_n^*a) = 0$.

L'identification $C^*(K/\mathcal{O})^H = C(\mathcal{R})^H$ (proposition 5.1.5) montre qu'on obtient de telles isométries partielles $V_n \in C(\prod_{P\in F} \mathcal{O}_P\,) \subset C(\mathcal{R})$ en posant pour chaque $(u_P, k_P)_{P\in F} \in \prod_{P\in F} \mathcal{O}_P^* \times \mathbf{Z}$:

$$V_n\left(\prod_{P\in F} P^{-k_P}u_P\right) = \chi_m\left(\prod_{P\in F} u_P\right) \quad \text{si} \quad \max_{P\in F}|k_P| \le n,$$
$$V_n\left(\prod_{P\in F} P^{-k_P}u_P\right) = 0 \quad \text{si} \quad \max_{P\in F}|k_P| > n$$

où nous regardons χ_m comme un caractère de W. Comme χ_m est trivial sur H on constate que les isométries partielles V_n ainsi définies *sont bien $H-$invariantes.* Ceci termine la preuve du lemme 7.1.2.

□

7.2. Existence de l'état KMS_β

Comme la preuve est très analogue à celle de [2] (pages 448–453), nous n'en donnerons que les grandes lignes. D'après la proposition 1.2, $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ s'identifie à la sous-algèbre réduite $eC^*(P_\mathcal{A})e$ de $C^*(P_\mathcal{A})$. On considère alors $\mathcal{E} = C^*(P_\mathcal{A})e$ comme un C^*-module à droite sur la C^*-algèbre $C^*(\mathcal{O}_+^*)$. Pour $\beta > 0$, on note $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$ l'espace de Hilbert de la représentation GNS de φ_β, l'unique état KMS_β de $(\,C^*(\mathcal{O}_+^*), \sigma_t\,)$. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta = \mathcal{E} \otimes_{C^*(\mathcal{O}_+^*)} \mathcal{H}_{\varphi_\beta}$ est alors la complétion de $\mathcal{E}$ pour le produit scalaire:

$$< \xi, \eta >_\beta = \varphi_\beta(< \xi, \eta >) \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E}.$$

Comme $\mathcal{E}$ est un espace de fonctions sur $\Delta = P_{\mathcal{A}}/P_{\mathcal{R}} = P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$, il en est de même de chaque $\mathcal{H}_\beta$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, on note alors ε_α la fonction caractéristique de $\{\alpha\}$. La famille $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est normée et engendre un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\beta$. Pour $\beta = 1$, c'est une base orthonormée et $\mathcal{H}_1 = l^2(\Delta)$. On a en particulier un vecteur ε_0 correspondant à la fonction caractéristique du point base de Δ. Rappelons aussi qu'on note δ la fonction module sur le groupe $P_{\mathcal{A}}$.

La proposition suivante est analogue à la proposition 32 page 452 de [2].

Proposition 7.2.1.

1. *Pour chaque $\beta > 0$ la C^*-algèbre C_K^0 (opposée de C_K) admet une représentation ρ dans $\mathcal{H}_\beta$ donnée par la convolution à droite avec $\delta^{\beta/2}f$ pour toute fonction $P_{\mathcal{O}}^+$-biinvariante f sur P_K^+.*
2. *Le vecteur ε_0 (=classe de $P_{\mathcal{O}}^+$) est cyclique pour P_K^+ et sépare les points de C_K; l'adhérence $\overline{C_K\varepsilon_0}$ de $C_K\varepsilon_0$ est l'ensemble des points fixes de $P_{\mathcal{O}}^+$ et $(C_K)''$ est le commutant de P_K^+ dans $\mathcal{H}_\beta$.*
3. *Le vecteur ε_0 définit un état, noté ψ_β, KMS_β pour (C_K, σ_t) via la formule:*

$$\psi_\beta(x) =< \rho(x)\varepsilon_0, \varepsilon_0 > \quad \forall x \in C_K.$$

Preuve. On utilise le lemme 30 de [2]. L'action de $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P_K^+; P_{\mathcal{O}}^+)$ par convolution à droite donne une représentation ρ de $\mathcal{H}^0$ dans l'espace engendré par les ε_x, $x \in P_K^+/P_{\mathcal{O}}^+$. C'est encore le cas en tordant l'action par l'automorphisme de $\mathcal{H}$ donné par la multiplication par $\delta^{\beta/2}$. Il reste à prouver que cette nouvelle représentation de $\mathcal{H}^0$ dans $\mathcal{H}_\beta$ est *involutive.* Quand on la restreint à $C^*(K/\mathcal{O})$, on obtient (vu que $\delta = 1$ sur les $e(\gamma)$):

$$\rho(\gamma)\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} 1 & b+\gamma \\ 0 & a \end{pmatrix}\varepsilon_0. \tag{21}$$

Considérons $N = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right); r \in K\right\}$ (c'est un sous-groupe normal de P_K^+), notons $\mathcal{H}_{\beta,1}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_\beta$ engendré par l'orbite $N\varepsilon_0$, et posons $\mathcal{H}_{\beta,s} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)\mathcal{H}_{\beta,1}$ pour $s \in K_+^*$. Alors $\mathcal{H}_\beta$ est l'adhérence de la somme directe orthogonale des $\mathcal{H}_{\beta,s}$. D'après (21), l'endomorphisme $\rho(\gamma)$ se diagonalise dans cette décomposition et comme l'action à gauche de N sur $\mathcal{H}_{\beta,s}$ est unitaire, la restriction de $\rho(\gamma)$ à $\mathcal{H}_{\beta,s}$ est unitaire. Maintenant le lemme 30b) de [2] permet de voir que la restriction de ρ à $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ est unitaire. Ainsi ρ est involutive et d'après la proposition 3.2, elle s'étend en une représentation de C_K^0 dans $\mathcal{H}_\beta$ d'où le premier point.

Le vecteur ε_0 est cyclique pour P_K^+ par construction et sépare les points de C_K^0 parce que l'action de $\mathcal{H}^0$ (donc de C_K^0) commute avec P_K^+. Finalement on obtient aisément les points 2 et 3 en utilisant l'analogue des lemmes 16 et 17 de [2]. $\square$

En combinant la proposition 7.2.1, la proposition 7.1.1, et le théorème 5.3.1, on obtient bien la totalité du théorème 0.1.

8. Preuve du théorème 0.2 et application aux corps de nombres

Dans ce paragraphe nous fixons un caractère admissible χ, au sens de la définition 5.1.3, de $K/\mathcal{O}$. Pour chaque $v \in \Omega_{\mathcal{O}}$ on se donne donc un caractère admissible χ_v de $K_v/\mathcal{O}_v$ de sorte que pour tout $\gamma = \oplus_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}}\gamma_v$ de $K/\mathcal{O} = \oplus K_v/\mathcal{O}_v$, on ait $\chi(\gamma) = \Pi_v\chi_v(\gamma_v)$. Nous identifierons parfois χ_v à un caractère de K_v trivial sur $\mathcal{O}_v$. Rappelons qu'on a fixé une uniformisante π_v de $\mathcal{O}_v$ et que la restriction de χ_v à $\pi_v^{-1}\mathcal{O}_v$ est non triviale. La proposition suivante nous permettra d'établir plus loin que pour $\beta > 1$ deux éléments distincts du groupe W/H définissent deux états KMS_β extremaux distincts de (C_K^H, σ_t).

Proposition 8.1. *Soit H un sous-groupe compact de $W = \prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}}\mathcal{O}_v^*$ et χ un caractère admissible de $K/\mathcal{O}$. On note du la mesure de Haar normalisée de H. Soit g un élément de W vérifiant, pour tout γ de $K/\mathcal{O}$:*

$$\int_H \chi(u\gamma)du = \int_H \chi(gu\gamma)du.$$

Alors $g \in H$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons $g \notin H$. Nous aurons besoin de deux lemmes intermédiaires.

Lemme 8.2. *Il existe une partie finie S de $\Omega_{\mathcal{O}}$ et un entier naturel non nul m tels que:*

$$\forall u = (u_v)_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} \in gH, \quad \exists v \in \Omega_{\mathcal{O}}, \quad v(1-u_v) \leq m-1. \tag{22}$$

Preuve. Notons $v_1, v_2, \ldots$ les éléments de $\Omega_{\mathcal{O}}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que le résultat est faux. Alors on construit aisément une suite $u(n) = (u_v(n))_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}}$ indexée par $n \in \mathbf{N}$ de points de gH telle que:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad |1 - u_{v_j}(n)|_{v_j} \leq \frac{1}{n}.$$

Ceci exprime que la suite $u(n)$ converge dans W vers $(1, 1, 1, \ldots,)$. Comme gH est compact, on obtient alors que $(1, 1, 1, \ldots,)$ appartient à gH ce qui contredit l'hypothèse $g \notin H$. Ceci prouve le lemme 8.2. $\square$

Lemme 8.3. *Fixons S et m comme dans le lemme 8.2. Soit I le sous-groupe fini de $K/\mathcal{O}$ défini par $I = \oplus_{v\in S}\pi_v^{-m}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$. Pour chaque $u \in W$, on désigne par $\overline{\chi^u}$ la restriction à I du caractère $\chi^u = \chi(u.)$ Alors il existe $u \in gH$ tel que $\overline{\chi} = \overline{\chi^u}$.*

Preuve. Notons $\mathcal{F}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des applications de I dans $\mathbf{C}$. L'hypothèse de la proposition 8.1 entraîne l'égalité suivante dans $\mathcal{F}$:

$$\int_H \overline{\chi^u}du = \int_{gH} \overline{\chi^u}du. \tag{23}$$

Munissons alors $\mathcal{F}$ du produit scalaire hermitien:

$$(f,g) \mapsto \frac{1}{\mathrm{Card} I} \sum_{i \in I} f(i)\overline{g(i)}.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout u de gH, $\overline{\chi} \neq \overline{\chi^u}$. Comme le groupe I est fini, deux caractères distincts de I sont orthogonaux pour ce produit scalaire ([17], théorème 3 page 28). En faisant le produit scalaire (dans $\mathcal{F}$) des deux membres de l'égalité (23) par $\overline{\chi}$ on obtient exactement:

$$\mu(V) = 0 \tag{24}$$

où $\mu(V)$ est la mesure de Haar (dans H) du sous-ensemble $V = \{u \in H;\ \overline{\chi^u} = \overline{\chi}\}$. Or, en utilisant la définition de I on voit que V contient l'ouvert non vide de H défini par:

$$\left\{u = (u_v)_{v \in \Omega_{\mathcal{O}}} \in H,\ / \forall v \in S\ v(1-u_v) \geq m\right\}.$$

Ceci contredit l'égalité (24) et prouve le lemme 8.3. □

Maintenant nous pouvons terminer la preuve de la proposition 8.1. D'après le lemme 8.3 il existe $u \in gH$ tel que $\overline{\chi} = \overline{\chi^u}$. A cet élément u le lemme 8.2 associe une place $v \in S$ et un $x_v \in \mathcal{O}_v$ tels que $u_v = 1 + x_v$ avec $v(x_v) \leq m - 1$. Comme χ_v est admissible, il existe $y_v \in K_v$ de valuation -1 tel que $\chi_v(y_v) \neq 0$. Posons alors $\gamma_v = y_v/x_v$ de sorte que $v(\gamma_v) \geq -m$ et notons γ l'image de γ_v par l'injection $K_v/\mathcal{O}_v \hookrightarrow K/\mathcal{O}$. Par construction γ appartient à I et on a:

$$\begin{gathered}\chi(u\gamma) = \chi_v(u_v\gamma_v) = \chi_v((1+x_v)\gamma_v) = \chi_v(\gamma_v) + \chi_v(x_v\gamma_v) = \\ \chi_v(\gamma_v) + \chi_v(y_v) \neq \chi_v(\gamma_v)\end{gathered}$$

car par hypothèse $\chi_v(y_v) \neq 0$. Donc χ et χ^u ne coïncident pas sur I d'où une contradiction. Ceci prouve la proposition. □

Le théorème 0.2 découle du théorème 8.4 et de la proposition 8.5 ci-dessous:

Théorème 8.4. *Soit H un sous-groupe* compact *de W. Alors, le groupe W/H agit sur la C^*-algèbre $C_K^H = C_r^*(P_K^+, P_{\mathcal{O}}^+)^H$ des points fixes de H et commute avec $(\sigma_t), t \in \mathbf{R}$. De plus:*

1. *Pour tout $\beta > 1$, le groupe W/H paramétrise bijectivement l'ensemble des états KMS_β extremaux.*
2. *Pour tout $\beta \in]0,1]$, il existe un et un seul état KMS_β de (C_K^H, σ_t). Un tel état est W/H-invariant.*

*Preuve***.** Comme H agit trivialement sur C_K^H, le groupe W/H agit bien sur C_K^H et il est clair que l'action commute avec σ_t pour tout $t \in \mathbf{R}$. Distinguons deux cas:

1. Supposons $\beta > 1$. Pour chaque u de W, considérons l'état KMS_β $\varphi_{\beta,u}$ de C_K introduit dans le théorème 5.3.1. Par restriction, il induit un état

KMS_β de C_K^H. Comme $\widetilde{\pi_u} = \widetilde{\pi_1} \circ \theta_u$, on constate que pour tout u' de uH, $\varphi_{\beta,u_{|C_K^H}} = \varphi_{\beta,u'_{|C_K^H}}$. L'étude de la représentation GNS de $\varphi_{\beta,u_{|C_K^H}}$ est presque identique à celle de $\varphi_{\beta,u}$ menée dans la preuve du point 2 du théorème 5.3.1. On vérifie aisément que l'état $\varphi_{\beta,u_{|C_K^H}}$ est encore factoriel de type I_∞, donc *extremal*.

Prouvons alors que l'application $u \mapsto \varphi_{\beta,u_{|C_K^H}}$ est injective sur W/H. Soient donc $u, u' \in W$ tels que $\varphi_{\beta,u_{|C_K^H}} = \varphi_{\beta,u'_{|C_K^H}}$. En procédant comme dans la preuve du point 3 du théorème 5.3.1 on vérifie que pour tout x de C_K^H :

$$< \widetilde{\pi_u}(x)\varepsilon_1, \varepsilon_1 >=< \widetilde{\pi_{u'}}(x)\varepsilon_1, \varepsilon_1 > . \tag{25}$$

Considérons alors un élément quelconque γ de $K/\mathcal{O}$ et "sa projection" $x = \int_H \theta_v(e(\gamma))dv$ dans C_K^H. D'après le lemme 4.2, on a $x = \int_H e(v\gamma)dv$. En appliquant l'équation (25) à ce x on obtient:

$$\int_H \chi^u(v\gamma)dv = \int_H \chi^u(u^{-1}u'v\gamma)dv$$

pour tout γ de $K/\mathcal{O}$. La proposition 8.1 appliquée au caractère χ^u montre alors que $u^{-1}u' \in H$ et donc que u et u' sont égaux modulo H. Ceci prouve l'injectivité de $u \in W/H \mapsto \varphi_{\beta,u_{|C_K^H}}$.

Prouvons la surjectivité. Soit donc ψ un état KMS_β de (C_K^H, σ_t). Rappelons que, d'après la proposition 4.1, $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ s'identifie à la sous-algèbre de C_K^H formée des points $W/H-$invariants. Les deux états KMS_β suivants de C_K^H :

$$\int_{W/H} \psi \circ \theta_u du, \quad \text{et} \quad \int_{W/H} \varphi_{\beta,u_{|C_K^H}} du$$

sont invariants sous l'action de W/H. Ils sont donc déterminés par leur restrictions à la sous-algèbre $C^*(\mathcal{O}_+^*)$ qui admet un unique état KMS_β (cf. proposition 1.2). On conclut alors exactement comme dans la preuve du point 3 du théorème 5.3.1.

2. Supposons $\beta \in]0, 1]$. L'unicité de l'état KMS_β a déjà été établie dans le paragraphe 7.1. D'après la proposition 7.2.1, il existe un (unique) état KMS_β ψ_β sur C_K, qui induit par restriction un état KMS_β sur C_K^H. Ceci prouve le théorème.

□

Nous allons appliquer le résultat précédent à un corps de nombres K dont l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ est *principal*. On prend alors $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$, c'est-à-dire que $\Omega_\mathcal{O}$ est exactement l'ensemble des places non archimédiennes de K. Rappelons qu'on note r_1 le nombre de places réelles de K, U_K le groupe multiplicatif des unités de

$\mathcal{O}_K$, et U_K^+ le sous-groupe de U_K constitué des unités totalement positives. Enfin Cl_K^+ désigne le groupe des idéaux fractionnaires de K modulo les idéaux principaux engendrés par un élément totalement positif.

Proposition 8.5. *Soit K un corps de nombres dont l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ est principal. Soit $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ le groupe de Galois abélien de K. Alors:*

1. *On dispose d'une suite exacte:*
$$0 \to N \to W \xrightarrow{\hat{s}} \mathcal{G} \to \mathrm{Cl}_K^+ \to 0 \tag{26}$$
et le groupe Cl_K^+ des classes d'idéaux étendu de K est un 2-groupe fini de cardinal $2^{r_1}[U_K : U_K^+]^{-1}$.
2. *Si K est totalement imaginaire, la flèche s est surjective.*
3. *Si K est un corps quadratique imaginaire, le noyau N s'identifie à U_K et la C^*-algèbre C_K^N s'identifie à $C_r^*(P_K, P_{\mathcal{O}})$.*

Remarques

- Si l'anneau des entiers de K n'est pas principal (ce qui est équivalent à dire que le groupe des classes d'idéaux de K est non trivial), on est obligé d'enlever des places non archimédiennes à $\Omega_{\mathcal{O}}$ et le conoyau de $\hat{s}$ n'est plus fini.
- Il y a exactement neuf corps quadratiques imaginaires dont l'anneau des entiers est principal (cf. [10], 12.4.13). La théorie de la multiplication complexe (cf. [5], I3) permet de décrire plus précisément K^{ab} dans ce cas. Un exemple de cette situation est $K = \mathbf{Q}(i)$ et $\mathcal{O} = \mathbf{Z}[i]$; dans ce cas $\mathcal{O}^* = \{1, -1, i, -i\}$.

Preuve de la proposition 8.5**.**

1. La flèche $\hat{s}$ s'obtient en composant la flèche s (paragraphe 6.2, définition (11)) avec l'isomorphisme $W \to G = \prod_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}} G_{\pi_v}$ (qui vient de la théorie de Lubin-Tate). Le conoyau de $\hat{s}$ est donc celui de s, étudié dans le paragraphe 6 (proposition 6.2.3). D'après [9] (chapitre VI.3), l'extension abélienne maximale de K non ramifiée aux places finies a pour groupe de Galois Cl_K^+ et de plus, $\mathrm{Cl}_K^+/\mathrm{Cl}_K$ est un 2-groupe d'ordre $2^{r_1}[U_K : U_K^+]^{-1}$. Comme $\mathcal{O}_K$ est principal, le groupe des classes d'idéaux Cl_K est trivial d'où le résultat.
2. En particulier, si K est totalement imaginaire, on a $r_1 = 0$ et $U_K = U_K^+$. Ainsi, le conoyau de $\hat{s}$ est trivial et $\hat{s}$ est surjective.
3. Le noyau de l'application d'Artin $\mathcal{C}_K \to \mathcal{G}$ est la composante connexe D_K du neutre ([5], 5.6 page 173). Si K est un corps quadratique imaginaire, il n'y a qu'une place archimédienne et D_K est donc simplement constituée des classes d'idèles de la forme $(a, b, b, \cdots, \dots)$ où $b \in K^*$ et $a \in \mathbf{C}^*$. Un idèle de la forme $(1, (u_v)_{v\in\Omega_{\mathcal{O}}})$ est de cette forme modulo K^* si et seulement s'il

existe a' dans $\mathcal{O}^*$ tel que $u_v = a'$ pour toute place v de $\Omega_{\mathcal{O}}$. Ainsi, le noyau de $\hat{s}$ est bien l'image de $\mathcal{O}^*$ dans W.

Le fait que $C_K^{\mathcal{O}^*}$ s'identifie à $C_r^*(P_K, P_{\mathcal{O}})$ résulte d'un calcul aisé, analogue à celui de [2] (égalité (36) page 454).

□

Remarques

1. Il peut arriver que $\hat{s}$ soit surjective même si K a des places réelles. C'est le cas pour $K = \mathbf{Q}$ et $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, mais pas pour $K = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$, comme le montre le calcul de $[U_K : U_K^+]$ pour ces corps. Un critère général pour calculer $[U_K : U_K^+]$ dans le cas d'un corps quadratique sur $\mathbf{Q}$ se trouve dans [9], théorème VI.3.2.
2. Si K est un corps de nombres différent de $\mathbf{Q}$ dont l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ est principal, la flèche $\hat{s}$ (correspondant à $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$) n'est jamais injective. En effet comme K a au moins deux places archimédiennes, le théorème des unités de Dirichlet ([5] page 72) montre qu' il existe une unité $a \in U_K$ distincte de 1 et -1 de sorte que $b = a^2$ est totalement positif et distinct de 1. Donc l'image dans $\mathcal{C}_K$ de l'idèle $I_1 = (1/b, \dots, 1/b, 1, 1, \dots)$ (obtenu en mettant $1/b$ aux places archimédiennes et 1 aux places finies) appartient à D_K. Comme l'idèle I_1 est dans la même classe modulo K^* que $(1, 1, \dots, b, b, \dots)$, l'élément non trivial $(b, b, b, \dots)$ de W est dans le noyau de $\hat{s}$.

References

[1] H. Araki and E.J. Woods. A classification of factors. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.* **4** (1968), 51–130.

[2] J.-B. Bost and A. Connes. Hecke Algebras, Type III factors and phase Transitions with Spontaneous Symmetry Breaking in Number Theory. *Selecta Mathematica, New Series* Vol.**,** No **3** (1995), 411–457.

[3] N. Bourbaki. *Algèbre.* Hermann, 1976.

[4] O. Bratteli and D. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag.

[5] J.W.S. Cassels and A. Fröhlich. *Algebraic number theory.* Academic press, London and New-York, 1967.

[6] A. Connes. Une classification des facteurs de type III. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) **6** (1973), 133–252.

[7] A. Connes. *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1994.

[8] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New-York, 1977.

[9] G.J. Janusz. *Algebraic number fields.* Academic Press, New York and London, 1973.

[10] D. Hüsemoller. *Elliptic Curves.* Springer-Verlag, 1987.

[11] B. Julia. Statistical theory of numbers. in Number Theory and Physics, Les Houches Winter School (J.-M. Luck, P. Moussa et M. Waldschmidt, eds.). Springer-Verlag, 1990.

[12] M. Laca and I. Raeburn. A semi-group crossed product arising in number theory. preprint (1996).
[13] S. Lang. *Algebraic Number Theory.* Springer-Verlag, New-York, 1986.
[14] J. Lubin and J. Tate. Formal Complex Multiplication in Local Fields. *Annals of Math* **81** (1965), 380–387.
[15] G.K. Pedersen. *C^*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.
[16] J.-P. Serre. *Groupes algébriques et corps de classes.* Hermann, Paris, 1959.
[17] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, 1967.
[18] J.-P. Serre. *Corps Locaux.* Hermann, Paris, 1968.
[19] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique.* PUF, Paris, 1970.
[20] J.-P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2. *Astérisque* **46** (1977).
[21] D. Spector. Supersymmetry and the Möbius inversion function. *Commun. Math. Phys.* **127** (1990), 239–252.
[22] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I.* Springer-Verlag, 1979.
[23] J. Tate. Fourier Analysis in Number fields and Hecke's Zeta-Functions. Thesis 1950, dans J.W.S. Cassels, A. Fröhlich; *Algebraic number theory.* Academic press, London and New-York, 1967.
[24] A. Weil. *Basic number theory.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1974.

D. Harari et E. Leichtnam
DMI
45, rue d'Ulm
F–75005 Paris
France
e-mail: harari@dmi.ens.fr
leicht@dmi.ens.fr