Cours numéro 2 :

calcul de grandeurs physiques

Ce chapitre a pour but de discuter les méthodes des physiciens pour calculer les grandeurs à l'aide du calcul intégral. On verra que leur méthode est très efficace et on discutera de la manière de la rendre parfaitement correcte du point de vue mathématique. On s'appuiera sur plusieurs exercices dans le style des épreuves sur dossier du CAPES.

1 Un exemple : le volume de la boule

1.1 Un exercice

Soit B une boule de centre O et de rayon R. On se propose de calculer le volume $V(B)$. On choisit un repère orthonormé de l'espace, d'origine O.

0) Soit B_z l'intersection de B avec le plan $Z = z$. Calculer l'aire $S(z)$ de B_z en fonction de R et z.

1) La méthode du physicien.

a) Soit dV le volume de la tranche de boule située entre les hauteurs z et $z+dz$ (dz est supposé petit, voire "infinitésimal"). Calculer dV en considérant que la tranche est assimilable à un cylindre de base B_z et de hauteur dz.

b) Le volume de la boule est la "somme" des volumes des tranches infinitésimales, ce que le physicien écrit $V(B) = \int_{-R}^{R} dV$. Calculer $V(B)$.

2) La justification mathématique.

On considère la partie de B située entre les plans de cote $Z = 0$ et $Z = z$. Soit $V(z)$ son volume.

a) Soient z un réel de $[0, R]$ et soit h un réel. Montrer que la partie de B située entre les plans de cote $Z = z$ et $Z = z + h$ est comprise entre deux cylindres que l'on précisera. En déduire un encadrement de $V(z+h) - V(z)$.

b) Montrer que la dérivée $V'(z)$ existe et est égale à $S(z)$. Comparer au résultat de 1.a.

c) Calculer $V(B)$.

1.2 Corrigé

1.2.1 La résolution à la physicienne

Si l'on admet la validité de la procédure, il suffit de calculer $S(z)$, ce qui est facile. En effet, B_z est un disque de rayon $r(z)$ et on a, par Pythagore, $R^2 = r(z)^2 + z^2$, d'où $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$.

On en déduit $V(B) = \displaystyle\int_{-R}^{R} S(z)dz = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)dz = \frac{4}{3}\pi R^3$.

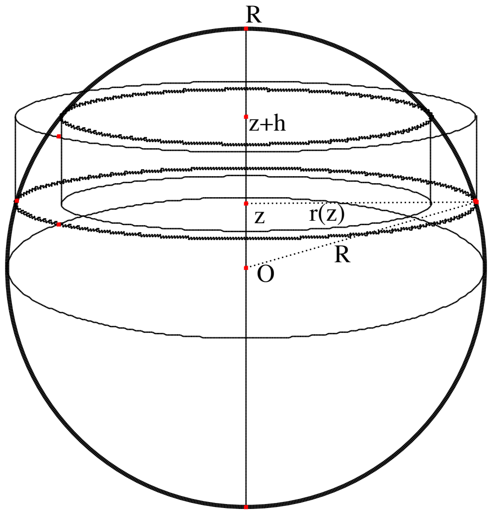

FIGURE 1 – Le volume de la boule

1.2.2 La méthode mathématique

L'idée est d'écrire la formule $dV = S(z)dz$ sous la forme $\dfrac{dV}{dz} = S(z)$ et de l'interpréter comme le calcul de la dérivée d'une fonction V (ce que ne fait pas le physicien, qui n'introduit pas de fonction). La fonction $V(z)$ n'est pas difficile à imaginer, c'est simplement le volume jusqu'à la cote z. On va calculer sa dérivée en revenant au taux d'accroissement.

Supposons $h > 0$ pour fixer les idées (mais il faut aussi traiter le cas $h < 0$, qui est analogue). On encadre la tranche de boule T comprise entre les cotes z et $z + h$ entre deux cylindres de hauteur h, l'un de rayon $r(z)$ l'autre de rayon $r(z + h)$, voir figure ci-dessus. On a ainsi :

$$\pi(R^2 - (z+h)^2)\, h \leq V(z+h) - V(z) = V(T) \leq \pi(R^2 - z^2)h.$$

On divise par h et on fait tendre h vers 0. Comme les fonctions sont continues, on voit que le taux d'accroissement $\dfrac{V(z+h)-V(z)}{h}$ tend vers $\pi(R^2-z^2) = S(z)$. On a donc $V'(z) = S(z)$ et $V = V(R) - V(-R) = \displaystyle\int_{-R}^{R} S(z)\,dz$, comme annoncé.

1.2.3 Discussion

Le physicien, en remplaçant $v(T)$ par $S(z)dz$ (ou encore $S(z)h$ avec nos notations) c'est-à-dire par le membre de droite de l'inégalité ci-dessus, commet donc une erreur qui est majorée par $(S(z) - S(z+h))h = \pi(2z+h)h^2$. Comme on divise par h et qu'on fait tendre h vers 0, cette erreur est, bien entendu, sans effet sur le résultat : le physicien, qui a de l'intuition, néglige les infiniment petits du second ordre et il a bien raison.

En fait, *a posteriori*, on peut préciser quelle est exactement l'erreur du physicien. En effet, maintenant qu'on sait calculer le volume de la boule, on sait aussi calculer exactement celui de la tranche. On a, en effet, $V(z) = \displaystyle\int_0^z \pi(R^2-t^2)dt = \pi R^2 z - \pi\frac{z^3}{3}\cdot$ On en déduit :

$$V(z+h) - V(z) = \pi R^2 h - \pi z^2 h - \pi z h^2 - \frac{\pi}{3}h^3$$

et la différence avec $S(z)h = \pi(R^2 - z^2)h$ est égale à $\pi(z + \dfrac{h}{3})h^2$. Comme on a $z + \frac{h}{3} \leq 2z + h$, cette erreur est bien majorée par $\pi(2z+h)h^2$.

1.3 Compléments

1.3.1 Ce qu'aurait pu faire Archimède

Le calcul du volume de la boule n'est pas dans Euclide, ce qui montre qu'à l'époque il n'était nullement évident. En revanche, il est dans Archimède. Bien entendu, Archimède n'utilise pas le calcul différentiel (qui date du XVII-ième siècle avec Newton et Leibniz). Sa preuve est absolument remarquable, mais pas facile. J'en dirai un mot plus loin, mais voici d'abord une preuve qui n'est pas celle d'Archimède, mais qu'il aurait pu inventer car elle utilise le même ingrédient algébrique (la somme des carrés des n premiers entiers) que le calcul de l'aire de la spirale qu'il effectue par ailleurs.

On découpe la demi-boule supérieure en n tranches d'épaisseur R/n. Le volume d'une tranche est compris entre le volume de deux cylindres, comme on l'a vu ci-dessus. Regardons par exemple, pour la tranche comprise entre les cotes kR/n et $(k+1)R/n$ le cylindre extérieur. Le carré du rayon est $r^2 = R^2 - z^2$ soit ici $R^2(1-\frac{k^2}{n^2})$. On additionne les volumes de tous ces cylindres et on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \pi R^2 (1-\frac{k^2}{n^2})\frac{R}{n}\cdot$ On obtient $\pi R^3 - \dfrac{\pi R^3}{n^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \pi R^3 - \dfrac{\pi R^3}{n^3}\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}\cdot$ Quand n tend vers l'infini, on voit que cette quantité tend vers $\frac{2\pi R^3}{3}$ qui est bien la moitié du volume de la boule.

1.3.2 Et l'aire de la sphère ?

On se dit qu'on va faire la même chose que pour le volume de la boule. On calcule l'aire de la tranche située entre les cotes z et $z + dz$. Comme dz est petit, on l'assimile à un cylindre et son aire est donc $d\mathcal{A} = 2\pi r(z)dz = 2\pi\sqrt{R^2 - z^2}\, dz$. On intègre entre $-R$ et $+R$ en faisant le changement de variables $z = R\sin\theta$. On obtient $\mathcal{A} = \pi^2 R^2$. Bizarre, vous avez dit bizarre ... En effet, on sait bien que cette aire est $4\pi R^2$. Alors ?

En vérité, dans l'espace, les calculs d'aires sont plus compliqués que ceux de volumes et ils nécessitent, si on utilise un processus d'approximation, d'approcher la surface non seulement en position, mais aussi en direction [1].

Alors, comment faire un calcul correct ? Réponse, en assimilant l'aire de la tranche à celle d'un tronc de cône [2] et pas d'un cylindre. Le calcul n'est pas tout à fait évident. On montre d'abord que l'aire d'un cône de rayon r dont la génératrice est de longueur [3] l est πrl (il suffit de fendre le cône le long d'une arête et de le déplier). On en déduit que l'aire d'un tronc de cône de génératrice l et de rayons r, s est égale à $\pi(r + s)l$. On calcule alors, aux infiniment petits du second ordre près, l'aire $d\mathcal{A}$ du tronc de cône de hauteur dz et de rayons $r(z)$ et $r(z + dz)$. On trouve un résultat un peu surprenant : $d\mathcal{A} = 2\pi R dz$ (le résultat est plausible si z est voisin de 0, moins si z est voisin de R ; ce qui est étonnant est qu'il ne dépend pas de z). Il n'y a plus qu'à intégrer $d\mathcal{A}$ entre $-R$ et R et on trouve bien $4\pi R^2$ cette fois.

1.3.3 Ce que fait vraiment Archimède

Par rapport à la méthode que je lui ai prêtée ci-dessus, il y a trois différences essentielles.

1. On pensera à l'exemple d'un papier plissé comme un toit d'usine qui peut être proche d'un plan, mais dont l'aire sera plus grande.
2. On verra qu'Archimède ne s'y est pas trompé.
3. Par rapport à la hauteur h on a $l^2 = r^2 + h^2$ par Pythagore.

• Il commence par calculer l'aire de la sphère et il en déduit le volume de la boule (voir l'idée au paragraphe suivant).

• Il découpe la boule et la sphère en tranches qu'il encadre entre des troncs de cône.

• Il évite de calculer la somme des carrés des premiers entiers grâce à une ruse géométrique que je vous laisse en exercice :

Soit Γ *un cercle de centre* O *et de rayon* R *et soit* $A_0A_1 ... A_{2p-1}$ *un polygone régulier à* $2p$ *côtés inscrit dans* Γ. *On note* c *le côté du polygone. Soit* $S = \sum_{k=0}^{p} A_k A_{2p-k}$ *(les segments verticaux). Alors, on a* $\dfrac{S}{2R} = \dfrac{A_0A_{p-1}}{c}$.

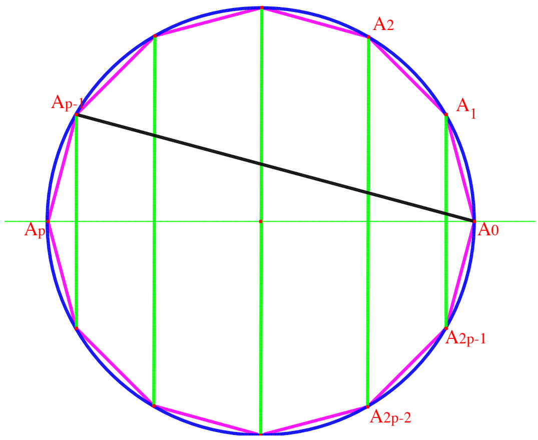

FIGURE 2 – Le calcul d'Archimède (avec $p = 6$)

(La somme des longueurs des segments intervient dans le calcul de la somme des volumes des troncs de cône obtenus en faisant tourner la figure ci-dessus autour de l'axe horizontal.)

1.3.4 Au collège et au lycée

Les formules du volume de la boule et de l'aire de la sphère sont admises dès le collège. Grâce au calcul infinitésimal, elles sont (au moins pour le volume) à portée d'un élève de terminale. On mesure ici le progrès apporté par Newton et Leibniz par rapport à Euclide et Archimède.

La formule du découpage en tranches : $V = \int_a^b S(z)dz$ donnant le volume d'un solide en fonction de l'aire de ses sections est admise en terminale. Elle permet de démontrer les formules du volume du cône ou de la boule. On a vu qu'on peut, au moins dans certains cas particuliers, la prouver, comme ci-dessus.

En revanche une justification de l'aire de la sphère est plus difficile et la question se pose d'en donner une explication intuitive. On peut proposer les deux versions suivantes, qui utilisent toutes deux le volume de la boule :

• On considère la boule comme une réunion de petites pyramides de sommets le centre de la sphère et de petites bases découpées sur la sphère (ce n'est pas si loin de l'idée d'Archimède). Le volume de la boule est alors le tiers de la somme des bases multipliée par le rayon, la somme des bases c'est l'aire de la sphère d'où la relation $V = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times R$ et la valeur de $\mathcal{A}$. Cette version peut être expliquée à des collégiens.

• La deuxième explication est un argument de physicien qui utilise la dérivée (donc ne peut s'adresser qu'à des lycéens). On augmente de dR le rayon de la sphère. Le volume augmente alors de $dV = V'(R)dR$ par définition de la dérivée. Mais c'est aussi $\mathcal{A}(R)dR$ (on voit ici la couronne sphérique comme une sorte de parallélipipède de base $\mathcal{A}(R)$ et de hauteur dR). On en déduit $\mathcal{A}(R) = V'(R)$. Comme on a $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ on en déduit bien $\mathcal{A}(R) = 4\pi R^2$.

1.4 Exercices

1.4.1 Le volume du cône

Soit C un cône de base B et de sommet O. On suppose que B est un disque de centre A et de rayon R et que O est situé sur la perpendiculaire au plan de B passant par A. On note $h = OA$ la hauteur du cône. On se propose de calculer le volume $V(C)$. On choisit un repère orthonormé de l'espace, d'origine O et tel que le plan de B soit le plan $Z = h$. On note C_z l'intersection de C avec le plan $Z = z$.

On appelle $dV(z)$ le volume du tronc de cône situé entre les hauteurs z et $z+dz$ (dz est supposé petit, voire "infinitésimal"). En considérant que le tronc de cône est assimilable à un cylindre de base C_z et de hauteur dz, on trouve, à la manière des physiciens, $dV(z) = S(z)dz$ et le volume du cône est la "somme" des volumes des troncs de cône infinitésimaux, $V(C) = \int_0^h dV(z)$.

On fera d'abord les calculs à la manière du physicien, puis on rédigera un texte d'exercice pour des élèves de terminale S en considérant la partie $C_{\leq z}$ de C située au-dessous du plan $Z = z$ et son volume $V(z)$.

1.4.2 Le calcul du volume du tétraèdre selon Euclide

Il s'agit de montrer que le volume d'un tétraèdre est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur. On connaît le volume des parallélipipèdes et des prismes. On prouve d'abord le lemme suivant :

1.1 Lemme. *Deux tétraèdres qui ont des bases de même aire et des hauteurs égales ont des volumes égaux.*

1) On se reportera à la figure ci-dessous. On a deux tétraèdres $\mathcal{P} = ABCD$ et $\mathcal{P}' = A'B'C'D'$ de même base et même hauteur. On découpe $\mathcal{P}$ (et de même pour $\mathcal{P}'$) comme indiqué sur la figure, en utilisant les milieux des arêtes, en deux tétraèdres $AMNP$ et $BMQS$, l'un au-dessus, l'autre en bas à gauche et deux prismes $QCRMNP$ et $MQSPRD$, l'un debout, l'autre couché.

a) Montrer que les deux prismes de $\mathcal{P}$ ont même volume, puis que les prismes correspondants de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont même volume.

b) Montrer que le volume total des petits tétraèdres est plus petit que le volume total des prismes.

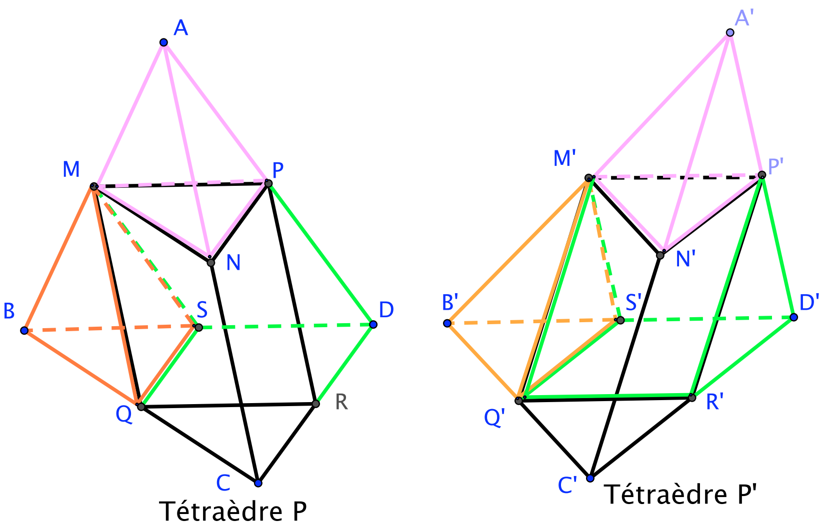

Figure 3 – Le lemme des tétraèdres

2) On itère le découpage précédent en découpant comme précédemment les deux petits tétraèdres de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$.

a) Montrer que la partie formé par les nouveaux prismes est la même dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

b) Montrer que le volume total des petits tétraèdres obtenus à la deuxième opération est plus petit que le quart du volume de $\mathcal{P}$ ou de $\mathcal{P}'$.

c) Plus généralement, montrer qu'au n-ième découpage, les deux tétraèdres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont découpés en un certain nombre de prismes correspondant au même volume et en 2^n tétraèdres dont le volume total est plus petit que $1/2^n$ fois le volume de $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}'$.

d) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont même volume (on raisonnera par l'absurde).

3) Montrer la formule donnant le volume du tétraèdre en considérant la figure ci-contre et en montrant que les trois tétraèdres $P_1 = (D, ABC)$ (sommet D, base ABC) $P_2 = (B, DEF)$ (sommet B, base DEF) et $P_3 = (B, CDF)$ (sommet B, base CDF) ont même volume.

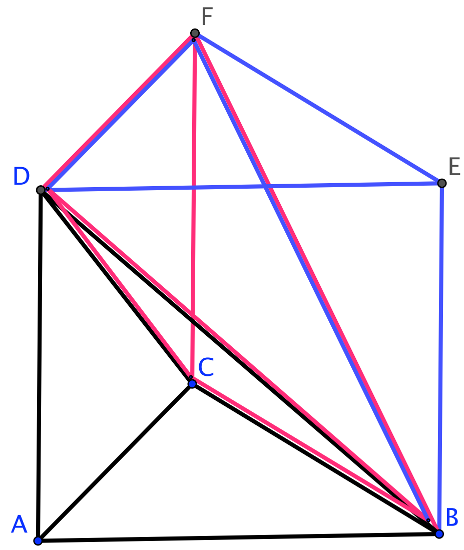

FIGURE 4 – Le volume du tétraèdre

2 Moment d'inertie

2.1 Rappels sur le moment d'inertie

Nous allons maintenant calculer des moments d'inertie. Avant cela, il faut expliquer à quoi sert cette notion. La réponse est dans le théorème du moment cinétique qui est la traduction du principe fondamental de la dynamique dans le cas des mouvements de rotation.

2.1.1 Le théorème du moment cinétique pour un point matériel

Considérons un point matériel M de masse m soumis à une force $\vec{F}$. Supposons ce point animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ dirigé par un vecteur unitaire $\vec{k}$, le mouvement ayant lieu dans le plan P perpendiculaire à Δ passant par $O \in \Delta$. Choisissons O comme origine et un repère orthonormé $\vec{i}, \vec{j}$ de P. Repérons la position de M par l'angle polaire $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. On a donc, en posant $r = OM$, $\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j})$. Comme on a un mouvement de rotation autour de O, le rayon r est constant, mais l'angle θ est une fonction du temps t et c'est cette fonction qui décrit le mouvement, donc qu'on cherche à calculer (comme toujours en mécanique en calculant ses dérivées).

Une notion fondamentale, dans le cas du mouvement d'un point M autour d'un axe, est celle de moment des forces par rapport à l'axe. C'est le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ et on note $\mathcal{M}$ son module. Intuitivement, le moment décrit la partie utile de la force, celle qui sert à faire tourner, donc celle qui est orthogonale à $\overrightarrow{OM}$. Dans la formule, la partie colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, qui est inutile, est annihilée dans le produit vectoriel. Le théorème du moment cinétique [4] est alors le suivant :

2.1 Théorème. *On pose $J = mr^2$ (le moment d'inertie du point par rapport à l'axe). Alors, on a $J\theta'' = \mathcal{M}$.*

2.2 *Remarque.* C'est l'analogue de la formule $F = ma$ pour un mouvement de rotation : la force est remplacée par son moment, la masse par le moment d'inertie et l'accélération est angulaire.

Démonstration. Le principe fondamental de la dynamique affirme qu'on a $\vec{F} = m\vec{a}$ où $\vec{a}$ est l'accélération : $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\cdot$ On calcule, en tenant compte du fait que la distance r est constante, donc sa dérivée nulle :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -r\sin\theta\,\theta'\vec{\imath} + r\cos\theta\,\theta'\vec{\jmath}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -r(\cos\theta\,\theta'^2 + \sin\theta\,\theta'')\vec{\imath} + r(-\sin\theta\,\theta'^2 + \cos\theta\,\theta'')\vec{\jmath}$$

et on en déduit $\overrightarrow{\mathcal{M}} = mr^2\theta''\vec{k}$, d'où le résultat.

2.1.2 Le moment d'inertie d'un solide

Le théorème du moment cinétique vaut non seulement pour un point, mais pour un solide, mais il faut une nouvelle définition du moment d'inertie. Pour un nombre fini de points matériels il s'agit seulement de la somme $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, où les m_i sont les masses des points et les r_i les distances à l'axe, mais pour un solide non discret, il faut une intégrale triple $\int\int\int_S r^2 dm$ où dm est un petit élément de masse situé à la distance r de l'axe.

2.1.3 Version axiomatique

Plutôt que d'introduire des intégrales multiples, il me semble plus simple de donner une présentation axiomatique du moment d'inertie J d'un solide

4. Dans le cas général, le moment cinétique est le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse, et le théorème (qui est une conséquence évidente de $\vec{F} = m\vec{a}$) affirme que sa dérivée est le moment des forces.

S par rapport à un axe Δ. On supposera que cette grandeur vérifie les deux axiomes suivants :

1) Le moment d'inertie est additif (si on a une réunion "presque disjointe" $S = S_1 \cup S_2$, le moment d'inertie de S est la somme de ceux des S_i).

2) Si S est de masse totale m et situé entre les distances r et R de Δ, on a $mr^2 \leq J \leq mR^2$.

Ces axiomes sont vérifiés par les expressions ci-dessus (somme finie ou intégrale), mais on peut les prendre comme définition, assez naturelle à partir du cas du point.

2.2 Calcul du moment d'inertie d'un disque

Avec cette définition il est facile de calculer le moment d'inertie d'un disque autour de son axe. Voici un dossier de CAPES sur ce thème.

2.2.1 Exercice proposé

Le but de l'exercice est de calculer le moment d'inertie I d'un disque homogène de rayon R et de masse m (et d'épaisseur négligeable) par rapport à son axe (i.e. un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre).

On rappelle que si les points d'un solide de masse m sont situés à une distance d'un axe qui varie entre r et R, le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe est compris entre mr^2 et mR^2.

On notera μ la masse surfacique du disque et on calculera μ en fonction de m et de R

1) La méthode du physicien.

a) Soit $dI(r)$ le moment d'inertie de la couronne située entre les rayons r et $r + dr$ (dr est supposé petit, voire "infinitésimal"). Calculer $dI(r)$ en faisant les approximations suivantes :

• on considérera que la couronne est assimilable à un rectangle de longueur $2\pi r$ et de largeur dr,

• on considérera que tous les points de la couronne sont à la distance r de l'axe.

b) Le moment d'inertie du disque est la "somme" des moments des couronnes infinitésimales, ce que le physicien écrit $I = \int_0^R dI(r)$. Calculer I.

2) La traduction mathématique.

On appelle $I(r)$ le moment du disque de rayon r.

a) Soit h un nombre > 0. Encadrer la quantité $I(r+h) - I(r)$ en fonction de μ, r, h (sans faire d'approximation).

b) En déduire la dérivée $I'(r)$ et vérifier, avec le $dI(r)$ calculé en 1), la formule $dI(r) = I'(r)dr$.

c) Calculer I.

2.2.2 Corrigé

L'exercice a pour but de montrer que les méthodes des physiciens sont efficaces et essentiellement correctes, à quelques justifications près.

Le calcul du physicien donne $dI(r) = 2\pi\mu r^3 dr$ et on en déduit $I = \frac{1}{2}\pi\mu R^4$, ce qui, avec $m = \pi R^2 \mu$ donne $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Du point de vue mathématique, il s'agit de montrer la formule $I'(r) = 2\pi\mu r^3$ qui n'est autre que la formule du physicien $dI(r) = 2\pi\mu r^3 dr$ (si l'on pense $I'(r)$ comme $dI(r)/dr$ ce que l'on justifie par un passage à la limite à partir du taux d'accroissement $\Delta I(r)/\Delta(r)$).

Mathématiquement, en utilisant l'axiome fourni et l'additivité, $I(r+h) - I(r)$ est le moment de la couronne, que l'on peut encadrer en notant qu'elle est située entre les distances r et $r+h$ et en calculant sa masse, ce qui revient à calculer son aire : $\mu\pi\big((r+h)^2 - r^2\big) = \mu\pi h(2r+h)$. On obtient alors :

$$\mu\pi(2r+h)r^2h \leq I(r+h) - I(r) \leq \mu\pi(2r+h)(r+h)^2h.$$

On voit que le physicien oublie systématiquement les termes de degré ≥ 2 en h (termes du second ordre), ce qui, comme on divise par h et qu'on passe à la limite, est un peu rapide, mais parfaitement correct.

Le calcul précédent vaut pour $h > 0$, mais il est pratiquement identique pour $h < 0$.

2.3 Variantes

Un exercice analogue consiste à calculer le moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à l'un de ses diamètres.

Il faut commencer par faire le calcul du physicien en calculant le moment d'une bande infinitésimale parallèle au diamètre. On peut le faire par exemple avec un paramètre angulaire θ, cf. figure, qui donne $dI(\theta) = 2\mu R^4 \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta$ et $I = \frac{1}{4}mR^2$. La seule difficulté est de calculer l'épaisseur de la bande, ce que le physicien fait en calculant $d(R\cos\theta) = R\sin\theta d\theta$, ce qui mérite explication pour des élèves.

On peut ensuite justifier ce calcul avec un encadrement. Il y a deux difficultés. D'abord, on tombe sur des formules trigonométriques du genre $\cos\theta - \cos(\theta+h)$, et ensuite, il faut connaître les limites de $\sin h/h$ et de $(1-\cos h)/h$.

Dans cette méthode l'intégrale à calculer est $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$ qui ne pose pas de problème.

On peut aussi utiliser comme paramètre la distance y de la bande au diamètre. Le calcul, dans la version physicien ou encadrement, est nettement plus facile, on obtient $dI = 2\mu\sqrt{R^2 - y^2}\, y^2 dy$, mais le problème est qu'on ne sait pas calculer l'intégrale en terminale (faute de pouvoir faire le changement de variable trigonométrique).

3 Exercices

3.1 Le flux sanguin

Le but de cet exercice est de calculer le débit du sang dans un vaisseau sanguin (que ce soit une veine ou une artère). On assimile le vaisseau à un tube cylindrique de rayon R et de longueur l. La vitesse v du sang varie selon la distance à l'axe du tube. Précisément, à la distance r de l'axe, elle est donnée par la loi de l'écoulement laminaire : $v = \dfrac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$ où η est le coefficient de viscosité du sang et P la différence de pression entre les extrémités du tube.

1) Selon cette loi, à quel endroit du vaisseau la vitesse du sang est-elle la plus grande ? Proposer une explication du phénomène.

2) On se propose de calculer le débit (ou flux) sanguin, c'est-à-dire le volume qui s'écoule dans le tube pendant une unité de temps.

a) Montrer que, si l'on suppose que la vitesse v du sang est constante, le flux à travers une surface S est Sv.

b) On regarde la section du tube comme une réunion de petites couronnes infinitésimales, situées à la distance r du centre et d'épaisseur dr. Montrer (à la manière des physiciens) que le flux à travers une telle couronne est $dF = 2\pi r v dr$ et en déduire que le flux total est égal à $F = \dfrac{\pi P R^4}{8\eta l}$ (loi de Poiseuille).

Discuter la méthode utilisée et la rendre mathématiquement correcte.

c) Pour une petite artère du corps humain on a $\eta = 0,027 Pa.s$, $R = 80\mu m$, $l = 2cm$, $P = 4000\ dynes/cm^2$. Exprimer le résultat en $mm^3.s^{-1}$.

Discuter la rédaction de cette dernière question, notamment du point de vue des unités.

3.2 La masse volumique de la terre (examen 2011)

Le but de l'exercice est de déterminer la masse volumique de la terre au voisinage de son centre. On rappelle les données suivantes :

• On considère, en première approximation, que la terre est une boule.

• La circonférence de la terre est d'environ $40000\,km$. On note R son rayon.

• La masse M de la terre est environ de $5,97 \times 10^{24}\,kg$. (Cette masse est déterminée précisément grâce à des mesures de trajectoire de satellites, ou à des expériences utilisant le mouvement de pendules).

• La masse volumique ρ de la terre est plus grande au centre qu'à la surface. On fait l'hypothèse qu'elle varie linéairement en fonction de la distance r au centre : $\rho(r) = ar + b$. Au niveau de la surface, on peut mesurer cette masse volumique qui est est d'environ $2,7 \times 10^3 kg/m^3$.

1) On appelle $m(r)$ la masse de la partie de la terre située à une distance $\leq r$ du centre. Calculer $m'(r)$, puis $m(r)$ en fonction de a, b, r. (On effectuera ce calcul à la manière des physiciens et on indiquera brièvement comment le rendre acceptable par un mathématicien pointilleux.)

2) Déterminer la masse volumique au centre de la terre.

3) On postule en général que le centre de la terre est formé de fer et de nickel, de masses volumiques respectives $7,32 \times 10^3$ et $8,9 \times 10^3$ (en kg/m^3) dans les conditions usuelles de température et de pression. Quelles réflexions vous inspirent les calculs précédents ?