MASTER 1 Mathématiques et enseignement **Année 2012-2013**
Faculté des sciences d'Orsay

Module Mathématiques et autres disciplines

Examen du 21 décembre 2012
durée : 2 heures 30

Exercice 1

On se propose d'étudier la variation d'une population p de souris dans une petite ville isolée, en fonction du temps t réel, exprimé en années en partant du temps $t = 0$. On considérera que $p(t)$ peut être un nombre réel positif quelconque (et pas seulement un entier) et que $p(t)$ est une fonction de classe C^1 de t. On rappelle les valeurs : $\ln 2 \sim 0,69$ et $\ln 10 \sim 2,3$.

Développement et stagnation

On suppose, dans un premier temps, que les souris vivent tranquillement et se multiplient avec comme seule limitation les ressources disponibles dans la ville. L'équation d'évolution de la population est alors de la forme $p'(t) = ap(t) - bp(t)^2$ avec des coefficients $a, b > 0$.

1) a) Justifier la forme de cette équation.

b) Résoudre cette équation (indépendamment du contexte des souris) et tracer ses solutions pour $t \geq 0$ (on distinguera plusieurs cas selon la position de $p(0)$ par rapport à $m = a/b$).

c) On suppose $p(0) < a/b$. Déterminer le maximum théorique de p. Existe-t-il une valeur τ de t pour laquelle la population est égale à la moitié de ce maximum ? Si oui, à quoi correspond cette valeur ?

d) Application numérique. On suppose $a = 1$, $p(0) = 1000$ et on estime le maximum théorique de la population à 100 000. Déterminer b et τ, ainsi que la date à laquelle la population atteindra son maximum à une unité près. Vérifier que $p(6)$ est proche de 80 000.

Au secours, les rapaces arrivent

Lorsque la population de souris atteint, au temps t_1, une valeur critique $Q < a/b$, les rapaces, informés de la prolifération des rongeurs, envahissent la ville et sèment la terreur chez les souris. On suppose que l'équation différentielle qui régit cette phase est encore de la forme $p' = Ap - Bp^2$, mais avec de nouveaux coefficients A, B vérifiant $Q > A/B$.

2) a) Résoudre cette équation et étudier le phénomène. Quelle est la limite attendue de la population ?

b) Application numérique : $t_1 = 6$, $Q = 80000$, $A = 0{,}1$, $B = 0,0002$.

Accalmie

Après la pluie le beau temps : lorsque la population de souris atteint un seuil q, avec $A/B < q < Q$, les rapaces, considérant que le jeu n'en vaut plus la chandelle, vont chercher leur pitance ailleurs, mais en se promettant de revenir si la situation s'améliore. La population de souris recommence alors à croître comme dans la première phase ci-dessus. On assiste ainsi à une alternance de phases d'expansion et de régression.

3) a) Déterminer les durées respectives T_e et T_r de ces phases en fonction des paramètres. Ces durées dépendent-elles de l'instant où elles se produisent ?

b) Application numérique : $q = 1000$. Calculer T_e et T_r à 0,1 près et tracer sommairement le graphe de l'évolution de p.

Variante

Dans un autre modèle, les équations différentielles des deux types de phases sont encore de la forme ci-dessus, mais dans l'équation de la phase d'expansion (resp. de régression), on considère que le terme b (resp. A) est négligeable par rapport à a (resp. B) et on le suppose nul.

4) Intégrer les deux équations obtenues, calculer les périodes T_e et T_r en fonction de a, B, q, Q. On reprend les valeurs numériques précédentes : $Q = 80000$, $q = 1000$, $a = 1$ et $B = 0,0002$. Donner les valeurs approchées à 0,1 près de T_e et T_r.

Exercice 2

Une plaque métallique circulaire de centre O et de rayon R a une masse surfacique [1] variable en fonction de la distance au centre. Précisément, en un point M situé à la distance r de O, cette masse surfacique vaut $\rho(r) = \delta + kr^2$, avec $k > 0$. On se propose de calculer la masse m de la plaque.

1) Faire le calcul à la manière d'un physicien en intégrant la masse d'une couronne infinitésimale d'épaisseur dr, située à la distance r du centre.

2) Donner une variante mathématique de ce calcul en introduisant la masse $m(r)$ de la partie de la plaque située à une distance $\leq r$ du centre et en calculant rigoureusement sa dérivée.

3) On suppose que la plaque est de rayon $50\,cm$, d'épaisseur $2\,cm$ et que les densités sont de $8,6$ au centre et $8,9$ sur le bord. Donner une valeur approchée de m à $0,1\,kg$ près.

Barème indicatif : Exercice 1 sur 14, exercice 2 sur 6.

1. La masse surfacique d'une partie S d'épaisseur constante est le quotient $m(S)/\mathcal{A}(S)$ de sa masse par son aire. Dans le système international elle s'exprime en kg par m^2.