MASTER 1 Mathématiques et enseignement **Année 2011-2012**
Faculté des sciences d'Orsay

Module Mathématiques et autres disciplines

Examen du 16 décembre 2011
durée : 2 heures 30

Exercice 1

Un parachutiste saute d'un hélicoptère, au temps $t = 0$, depuis une hauteur $h = 2000$ (en mètres). L'hélicoptère est supposé immobile au moment du saut, de sorte que la vitesse initiale du parachutiste est nulle. On note g l'accélération de la pesanteur (en valeur absolue). Pour les calculs on prendra $g \simeq 10ms^{-2}$. L'axe vertical est orienté vers le haut, on note $z(t)$ l'altitude (en mètres) du parachutiste au temps t (exprimé en secondes) et $v(t)$ sa vitesse (en valeur absolue). On a donc $z'(t) = -v(t)$. La masse du parachutiste (avec son équipement) est de $M = 100kg$.

On donnera d'abord les résultats sous forme littérale, puis sous forme numérique. Les temps seront exprimés en secondes et les vitesses en ms^{-1}, mais on donnera aussi leurs valeurs numériques en km/h. On rappelle qu'on a $\ln 10 \simeq 2{,}3$, $\ln 2 \simeq 0{,}69$ et $\ln 3 \simeq 1{,}1$.

1) Le parachute ne s'ouvre pas. On considère alors que la force de frottement de l'air est négligeable. Établir les équations donnant la vitesse et l'altitude en fonction du temps. À quelle vitesse le parachutiste touchera-t-il le sol ?

2) On suppose maintenant que le parachute s'ouvre dès le début de la chute et que la force de frottement (qui s'oppose au mouvement) est proportionnelle à la vitesse : $F = kv$, (valeur numérique $k = 100$ dans le système international).

a) Montrer que l'équation différentielle qui donne $v(t)$ est $Mv' = Mg - kv$ et la résoudre. Étudier la fonction $v(t)$. À partir de quel temps de chute la vitesse limite est-elle atteinte à $10^{-3}ms^{-1}$ près ?

b) Déterminer l'altitude en fonction de t. Déterminer le temps de chute à la seconde près (on pourra utiliser une calculatrice, mais ce n'est pas indispensable) et la vitesse au moment de l'impact.

3) On suppose que la chute commence par une phase de chute libre pendant un temps τ suivie d'une chute freinée comme en 2). Déterminer les fonctions $v(t)$ et $z(t)$ avant et après τ. Étudier ce que deviennent les résultats précédents dans les deux cas $\tau = 5s$ et $\tau = 10s$: vitesse limite (quand est-elle atteinte à 10^{-3} près ?) et temps de chute.

4) On suppose maintenant que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse (on écrira cette force sous la forme $F = Mgr^2v^2$ où r désigne une constante dont on précisera la dimension).

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ et l'intégrer. (On pourra utiliser l'aide-mémoire ci-dessous).

b) On suppose que le parachute s'ouvre dès le début de la chute et que la vitesse limite est la même que dans la question 2). En quoi cette hypothèse est-elle raisonnable ?

Calculer la valeur de r.

Au bout de combien de temps la vitesse limite est-elle atteinte à 10^{-3} ms^{-1} près ? Déterminer le temps de chute. Comparer aux résultats de la question 2). Les mesures naturelles que l'on peut effectuer pour valider l'un ou l'autre modèle sont celles de la vitesse limite et du temps de chute. Permettent-elles de trancher ? Que pourrait-on proposer sinon ?

Aide-mémoire pour la question 3 de l'exercice 1

Les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques sont définies, pour $x \in \mathbf{R}$, par $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$.

La fonction $\operatorname{th} x$ est impaire, positive et croissante sur $\mathbf{R}$. Elle est dérivable et sa dérivée est $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\cdot$ Elle tend vers 1 en $+\infty$. Elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-1, 1[$. La fonction réciproque de $\operatorname{th} x$ est une bijection de $]-1, 1[$ sur $\mathbf{R}$. On la note $\operatorname{Argth} x$, mais elle est aussi égale à $\dfrac{1}{2} \ln \big(\dfrac{1+x}{1-x}\big)\cdot$ Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}\cdot$

Exercice 2

Un nageur est en difficulté au milieu d'un lac et souhaite rejoindre le bord le plus rapidement possible. La situation est modélisée ainsi : on est dans le plan $\mathbf{R}^2$ muni de la distance euclidienne, le nageur est un point $m = (\alpha, \beta)$ et le bord du lac une courbe $\mathcal{C}$ d'équation $F(x, y) = 0$, que l'on suppose de classe C^1 et lisse [1]. On se propose donc de trouver les points de la courbe les plus proches de m.

0) Indiquer quelle hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{C}$ assure l'existence de tels points.

1) Montrer que les points cherchés sont parmi les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la courbe $\mathcal{H}$ d'équation :

$$(x - \alpha)\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - (y - \beta)\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0.$$

2) On suppose que $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $ax^4 + by^4 = 1$ avec $b > a > 0$ et que m est l'origine $m = (0, 0)$. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{H}$ et les points de $\mathcal{C}$ où la distance à m est minimum et maximum.

3) On suppose que $\mathcal{C}$ est l'ellipse d'équation $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ avec $a \geq b > 0$ et que m est le point de coordonnées $(\alpha, 0)$ avec $\alpha \geq 0$. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ et les points de $\mathcal{C}$ où la distance à m est minimum et maximum. Préciser dans quel cas ces points sont tous deux sur l'axe des abscisses.

Barème indicatif : Exercice 1 sur 14, exercice 2 sur 6.

1. Cela signifie que les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ existent, sont continues, et ne s'annulent pas simultanément sur $\mathcal{C}$.