MASTER 1 Mathématiques et enseignement **Année 2010-2011**
Faculté des sciences d'Orsay

Module Mathématiques et autres disciplines

Examen du 14 janvier 2011
durée : 2 heures

Exercice 1

Le but de l'exercice est de déterminer la masse volumique de la terre au voisinage de son centre. On rappelle les données suivantes :

• On considère, en première approximation, que la terre est une boule.

• La circonférence de la terre est d'environ $40000\,km$. On note R son rayon.

• La masse M de la terre est environ de $5,97 \times 10^{24}\,kg$. (Cette masse est déterminée précisément grâce à des mesures de trajectoire de satellites, ou à des expériences utilisant le mouvement de pendules).

• La masse volumique ρ de la terre est plus grande au centre qu'à la surface. On fait l'hypothèse qu'elle varie linéairement en fonction de la distance r au centre : $\rho(r) = ar + b$. Au niveau de la surface, on peut mesurer cette masse volumique qui est est d'environ $2,7 \times 10^3 kg/m^3$.

1) On appelle $m(r)$ la masse de la partie de la terre située à une distance $\leq r$ du centre. Calculer $m'(r)$, puis $m(r)$ en fonction de a, b, r. (On effectuera ce calcul à la manière des physiciens et on indiquera brièvement comment le rendre acceptable par un mathématicien pointilleux.)

2) Déterminer la masse volumique au centre de la terre.

3) On postule en général que le centre de la terre est formé de fer et de nickel, de masses volumiques respectives $7,32 \times 10^3$ et $8,9 \times 10^3$ (en kg/m^3) dans les conditions usuelles de température et de pression. Quelles réflexions vous inspirent les calculs précédents ?

Exercice 2

Une boîte parallélipipédique en carton, de dimensions x, y, z (z est la hauteur de la boîte), a un volume de 32 litres et elle est ouverte en haut (elle n'a donc que cinq faces). Trouver les dimensions (exprimées en décimètres) qui minimisent la surface de carton. Justifier.

Exercice 3

Le but de l'exercice est d'étudier le modèle épidémiologique SIS, qui s'applique notamment pour des maladies assez bénignes comme le rhume, dont l'issue est rarement fatale, mais où les individus guéris peuvent être infectés à nouveau. On note N la population totale, supposée constante, et $y(t)$ le nombre total d'individus infectés au temps t.

On suppose que la variation dy de y, rapportée à un temps infinitésimal dt provient de deux sources :

• les nouvelles contaminations que l'on suppose proportionnelles au produit $y(N-y)$ (avec un coefficient α positif),

• les guérisons que l'on suppose proportionnelles à y (avec un coefficient β positif, supposé constant).

1) Discuter les hypothèses ci-dessus et notamment la raison d'être du terme $y(N-y)$.

2) Montrer que l'équation différentielle en y qui traduit ces hypothèses est la suivante :

$$y' = (\alpha N - \beta)y - \alpha y^2.$$

3) Intégrer cette équation. Discuter le signe de $\alpha N - \beta$. Indiquer rapidement l'allure du graphe de y dans le cas $\alpha N - \beta > 0$.

4) Le tableau ci-dessous indique le nombre total de cas dans une petite ville pendant les mois de décembre-janvier en fonction du nombre de jours écoulés (ainsi, le 28-ième jour, il y avait eu, en tout, 1940 cas). En supposant que le modèle étudié ci-dessus est pertinent, utiliser ce tableau pour donner une prévision (approximative) du maximum de cas d'infection.

20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
480	697	1000	1408	1940	2600	3366	4194	5014	5791	6452	6986	7396

On donne $\alpha = 4,7 \times 10^{-5}$ et $\beta = 0,31$. Donner une estimation de la population de la ville.

Le modèle permet-il de rendre compte de ce qui se passera au printemps ?

Barème indicatif : Exercice 1 sur 8, exercice 2 sur 4, exercice 3 sur 8.