LICENCE Sciences-Technologie-Santé **Année 2005-2006**
Faculté des sciences d'Orsay

Module M 310 : INTÉGRATION

Séances de soutien de juin 2006

1. Exercice 1.

Déterminer la limite, quand n tend vers l'infini, des expressions suivantes :

$$R_n = \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\operatorname{Arctan}\frac{k}{n}\,, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{k}{n}\operatorname{Arctan}\frac{k}{n^2}\cdot$$

Pour T_n on pourra encadrer le deuxième Arctangente.

2. Exercice 2.

On note Y la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,+\infty[$ de $\mathbf{R}$, on numérote les rationnels de $[0,1]$ en une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on pose, pour $x\in[0,1]$:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\,Y(x-a_n).$$

Étudier la continuité et l'intégrabilité (au sens de Riemann) de f. On pourra établir les faits suivants :

- Pour $x<y$ on a $f(x)-f(y) = \sum_{x\leq a_n<y} 2^{-n}$.
- La fonction f est discontinue en les rationnels de $[0,1]$.
- La fonction f est continue en les irrationnels de $[0,1]$.

3. Exercice 3.

Soit $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ une fonction. Pour $n\in\mathbf{Z}$, on pose $I_n(f) = \int_a^b f(t)e^{-int}\,dt$.

1) Justifier l'existence de $I_n(f)$ lorsque f est continue, Riemann-intégrable, Lebesgue-intégrable.

2) On suppose que f est de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $I_n(f)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Même question si f est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

3) On suppose f, g Lebesgue-intégrables. Montrer qu'on a :

$$|I_n(f) - I_n(g)| \leq \|f - g\|_1.$$

En déduire que $I_n(f)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (on approchera f par des fonctions en escalier).

4. Exercice 4.

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale semi-convergente $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Pour cela on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \frac{\sin t}{t}\, dt$.

1) a) Montrer que, pour $x > 0$, l'intégrale $F(x)$ est absolument convergente.

b) Montrer que, pour $x = 0$, l'intégrale $F(0)$ est semi-convergente. La fonction $\sin t/t$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$?

2) a) Montrer que la fonction F est continue sur $]0, +\infty[$ et calculer sa limite quand x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

c) Calculer $F'(x)$ et en déduire la valeur de $F(x)$.

d) Montrer que $F(x)$ tend vers J quand x tend vers 0 (couper les intégrales en deux en utilisant le point 1, considérer $\int_1^A$ pour A grand et faire une intégration par parties).

e) En déduire la valeur de J.

5. Exercice 5.

Soient α et β deux nombres réels vérifiant $0 < \alpha < \beta$. On définit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par la formule $f(x) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sin(xu)\, du$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$. Calculer $f(x)$.

b) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Montrer qu'on a $F(x) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1 - \cos(ux)}{u}\, du$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos t}{t}\, dt$ tend vers 0 quand $|x|$ tend vers l'infini (on pourra utiliser une intégration par parties). En déduire la limite de $F(x)$ quand $|x|$ tend vers l'infini.

6. Exercice 6.

Pour $n \in \mathbf{N}$ on considère l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n}\cdot$ Pour chaque question, on donnera deux démonstrations, l'une à l'aide des résultats du cours, l'autre élémentaire.

1) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2) On pose $w_n = 1 - u_n$. Montrer l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \leq w_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

3) On pose $v_n = nw_n$. Déterminer la limite de (v_n).

7. Exercice 7.

Déterminer la limite de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ quand n tend vers $+\infty$.

8. Exercice 8.

1) Calculer les coefficients de Fourier a_p et b_p de la fonction de période 2π définie par $x \mapsto |\sin x|$.

2) En déduire une expression de $|\sin nx|$ comme somme de termes en $\cos 2pnx$.

3) Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Quelle est la limite de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,dt$ quand n tend vers l'infini (on utilisera l'exercice 3) ?

4) Proposer une autre méthode menant au même résultat en approchant f par des fonctions en escalier.

9. Exercice 9.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de période 2π. Soit $g \in \mathcal{F}$ une fonction de classe C^1. On cherche $f \in \mathcal{F}$, de classe C^1, vérifiant l'équation :

$$(\mathcal{E}) \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x + \frac{\pi}{2}) + f'(x) + f(x - \frac{\pi}{2}) = g(x).$$

1) On suppose que f est dans $\mathcal{F}$ et vérifie $(\mathcal{E})$.

a) Déterminer les coefficients de Fourier $c_n(f)$ en fonction de ceux de g. Vérifier que l'on a, $\forall n \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $|c_n(f)| \leq \dfrac{|c_n(g)|}{n}$. Montrer que les "séries" $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|$ et $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |nc_n(f)|$ sont convergentes.

b) Que peut-on dire de f si la fonction g est identiquement nulle ? Montrer f est la seule fonction de classe C^1 de $\mathcal{F}$ vérifiant $(\mathcal{E})$.

c) Déterminer f dans les cas suivants : $g(x) = e^{ipx}$, $p \in \mathbf{Z}$, $g(x) = \cos px$, $p \in \mathbf{N}$.

2) On note γ_n la valeur obtenue en 1.a) pour $c_n(f)$. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \gamma_n e^{inx}$ est de classe C^1, 2π-périodique, et qu'elle vérifie $(\mathcal{E})$. En déduire que f est de classe C^2.

10. Exercice 10.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ (bornés ou non). On considère deux fonctions mesurables $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : J \to \mathbf{R}$ et on définit la fonction $h : I \times J \to \mathbf{R}$ par $h(x, y) = f(x)g(y)$.

1) Montrer que h est mesurable.

2) On suppose f intégrable sur I et g intégrable sur J. Montrer que h est intégrable sur $I \times J$ et calculer $\displaystyle\int_{I\times J} h$ en fonction de $\displaystyle\int_I f$ et de $\displaystyle\int_J g$.

Réciproquement, si h est intégrable sur $I \times J$, peut-on affirmer que f est intégrable sur I et g intégrable sur J ?

11. Exercice 11.

Soient a, b deux nombres réels vérifiant $-1 < a < b$. Montrer que la fonction $f(x, y) = y^x$ est intégrable sur $D = [a, b]\times]0, 1]$ et calculer son intégrale. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}\, dy$.

12. Exercice 12.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et soit A le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par les inégalités $x^2 + y^2 \le \dfrac{1}{a^2}$, $x + 2y \ge a$ et $4x + 3y \le 0$.

1) Dessiner la partie A dans le cas $a = 1/2$. Préciser les inéquations définissant l'intérieur A° de A. Montrer que, si (x, y) est dans A, y est positif et x négatif.

2) On considère l'application $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $\Phi(x, y) = (u, v)$ avec $u = x^2+y^2$ et $v = x + 2y$.

a) Montrer que Φ est de classe C^∞ et calculer son jacobien $J(x, y)$. Préciser le signe de $J(x, y)$ pour $(x, y) \in A$.

b) Montrer que Φ induit un difféomorphisme de A° sur l'ouvert Ω défini par les inéquations $a^2 < u < \dfrac{1}{a^2}$ et $a < v < \sqrt{u}$. (On pourra noter la formule : $y(3y+4x) = v^2-u$.)

3) Calculer l'intégrale : $I(a) = \displaystyle\int_A \frac{(y - 2x)e^{-x-2y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$ en utilisant le changement de variables Φ.

13. Exercice 13.

On considère le carré $E = [0, 1]^2$ que l'on munit de la mesure de Lebesgue.

1) Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in E \,|\, x + y = 1\}$ est négligeable.

2) Soit α un nombre réel. On pose, pour $(x, y) \in E$, $f(x, y) = |x+y-1|^\alpha$. Déterminer pour quels α la fonction f est intégrable sur E et calculer alors son intégrale.

14. Exercice 14.

En considérant la fonction $f : [0,1] \times [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)},$$

calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt$.

On pourra établir une identité de la forme :

$$\frac{1}{(1+at^2)(1+bt^2)} = \frac{A}{1+at^2} + \frac{B}{1+bt^2}.$$

15. Exercice 15.

On pose $I =]-1,1[$. On pose, pour $x \in I$ et $t \in \mathbf{R}$, $S_x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \, e^{i(n+1)t}$.

a) Montrer que, pour x fixé, la série converge normalement pour $t \in \mathbf{R}$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} S_x(t)\, dt$.

b) Calculer, pour t réel fixé, la dérivée de la fonction $f_t(x) = \ln(1 - 2x\cos t + x^2)$ et la comparer à $S_x(t)$.

c) Calculer, pour $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\, dt$ (on pourra dériver sous le signe somme).