

Faculté des sciences d'Orsay

Année 2008-2009

Licence Sciences-Technologie-Santé

Portail PCST

Module M 154 :

compléments d'intégration

Chapitre 1

Rappels sur l'intégration

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle de \mathbf{R} (ni vide, ni réduit à un point).

1.1 Primitives

1.1.1 Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle de \mathbf{R} (ou une réunion d'intervalles). On dit que la fonction $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable et si l'on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

1.1.2 Proposition.

- 1) Si F est une primitive de f il en est de même de $F + k$ où k est une fonction constante.
- 2) Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I , la différence $F - G$ est une constante. Soit $c \in I$ et $k \in \mathbf{R}$. Si f admet une primitive F , il existe une unique primitive G de f qui vérifie $G(c) = k$.

Démonstration. Le point 1) est clair. Pour 2) on a $(F - G)' = 0$, donc $F - G$ est constante.

1.2 Aires

On travaille dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé O, \vec{i}, \vec{j} .

Nous admettrons l'existence de la notion d'aire et ses propriétés essentielles :

- 0) On prend comme unité d'aire celle du carré unité bâti sur le repère.

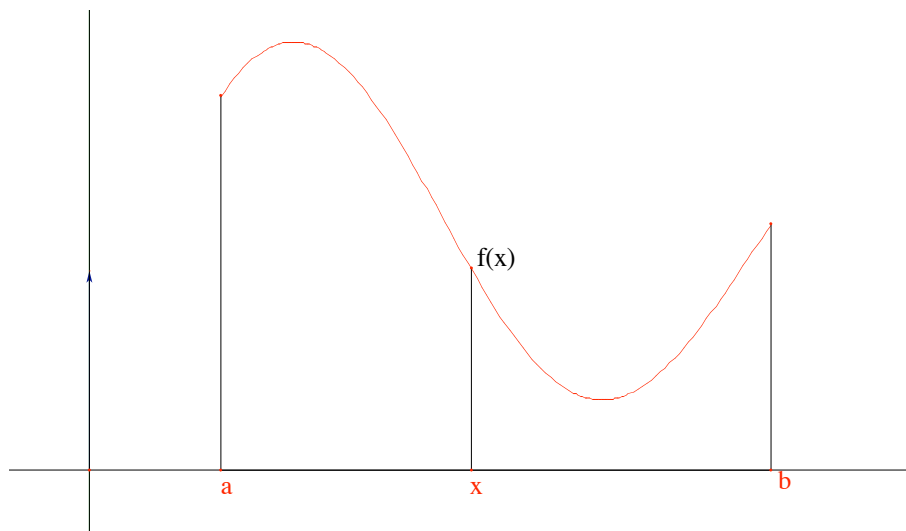


FIGURE 1.1 – L'hypographe de f

1) Les polygones ont une aire, ainsi que l'hypographe d'une fonction f continue et positive sur un segment (la partie limitée par l'axe des x , le graphe de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, voir figure ci-dessous).

2) L'aire d'un rectangle R dont les côtés sont de longueurs a et b est égale à ab .

3) L'aire est additive : si A, B sont des parties disjointes, on a $\mathcal{A}(A \cup B) = \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B)$. C'est encore vrai si les parties sont presque disjointes i.e. si leur intersection est une réunion finie de segments. Un corollaire de cette propriété est la croissance de l'aire : si on a $A \subset B$ on a $\mathcal{A}(A) \leq \mathcal{A}(B)$.

4) L'aire est invariante par isométrie : si g est une isométrie (une translation, une rotation, une symétrie) on a $\mathcal{A}(g(A)) = \mathcal{A}(A)$.

5) Elle est homogène : si h est une homothétie de rapport k on a $\mathcal{A}(h(A)) = k^2 \mathcal{A}(A)$.

1.3 Intégrale d'une fonction continue positive

1.3.1 Définition

1.3.1 Définition. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue ≥ 0 . On appelle **intégrale** de a à b de f et on note $\int_a^b f(t)dt$ la mesure de l'aire de l'hypographe de f défini ci-dessus par rapport au carré unité.

C'est ce que vous avez appris en terminale.

1.3.2 Lien avec les primitives

Le théorème essentiel est le suivant.

1.3.2 Théorème. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue ≥ 0 . La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f . Précisément, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Si G est une primitive quelconque de f on a $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.

Démonstration.

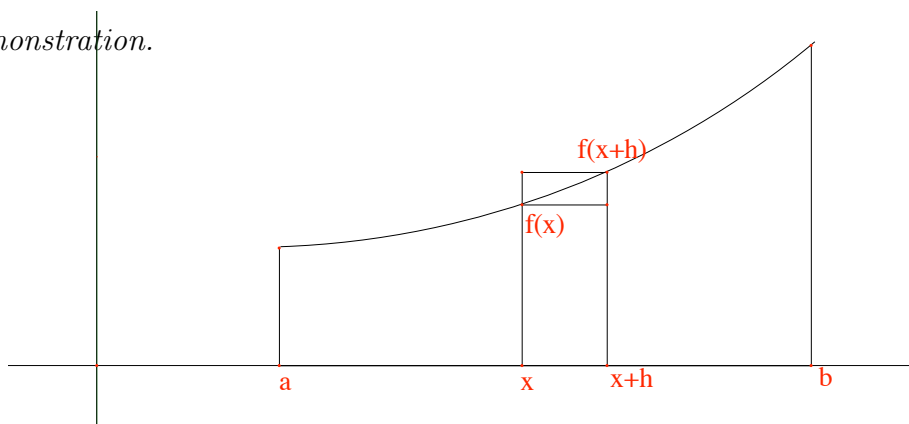


FIGURE 1.2 – La preuve de 1.3.2

On traite seulement le cas monotone, disons croissant. On calcule le taux d'accroissement $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, disons pour $h > 0$. La quantité $F(x+h) - F(x)$ est l'aire de l'hypographe entre les abscisses x et $x+h$. Comme cette partie est comprise entre deux rectangles de largeur h et de longueurs $f(x)$ et $f(x+h)$ on a : $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, d'où $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$. Quand h tend vers 0, comme f est continue, les deux extrêmes tendent vers $f(x)$, donc aussi le taux d'accroissement et on a donc, par définition de la dérivée, $F'(x) = f(x)$.

On a la formule $F(b) = \int_a^b f(t)dt$. Comme $F(a)$ est nulle¹, on a donc encore $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$. Si G est une autre primitive de f , la formule vaut aussi avec G car on a $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante.

1.3.3 Corollaire.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors, f admet des primitives.

1. Un segment est d'aire nulle. En effet, s'il est de longueur l , on peut l'englober dans des rectangles de longueur l et de largeur ϵ et on fait tendre ϵ vers 0.

Démonstration. On admet que f est minorée par une constante m . On considère $g = f - m$ qui est continue ≥ 0 . La fonction g admet une primitive G et f admet la primitive $F(x) = G(x) + mx$.

1.4 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

1.4.1 Définition

Pour une fonction positive, les choses sont claires, l'intégrale c'est l'aire sous la courbe. On a vu en 1.3.2 que, si F est une primitive de f , on a alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Cette formule est une première justification de la définition suivante, qui vaut pour une fonction de signe quelconque et sans supposer la condition $a < b$ sur les bornes :

1.4.1 Définition. Soient $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, a et b des points de I et soit F une primitive de f sur I . On définit l'intégrale de a à b de f par la formule $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

1.4.2 Remarque. Avec la définition ci-dessus, on vérifie que $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I . De façon un peu abusive, on notera $\int f(x)dx$ une primitive de f .

1.4.2 Discussion

On peut donner une justification supplémentaire de la définition ci-dessus en voyant l'intégrale comme une aire "orientée".

On considère une fonction continue définie sur un intervalle I , de signe constant, mais pas nécessairement ≥ 0 , et deux points $a, b \in I$ (on ne suppose pas $a < b$). On considère son hypographe H et le bord orienté ∂H qui est la courbe fermée simple constituée du segment $[a, b]$, mais parcouru de a vers b , puis du segment vertical qui va de $(b, 0)$ à $(b, f(b))$, puis du graphe de f allant jusqu'à $(a, f(a))$ puis du segment vertical qui joint ce point à $(a, 0)$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ sera alors l'aire de l'hypographe, mais comptée positivement (resp. négativement) si ∂H tourne dans le sens trigonométrique (resp. dans le sens des aiguilles d'une montre). En particulier, l'aire sera négative si on a $a < b$ et $f \leq 0$ ou $a > b$ et $f \geq 0$. Examinons ces deux cas

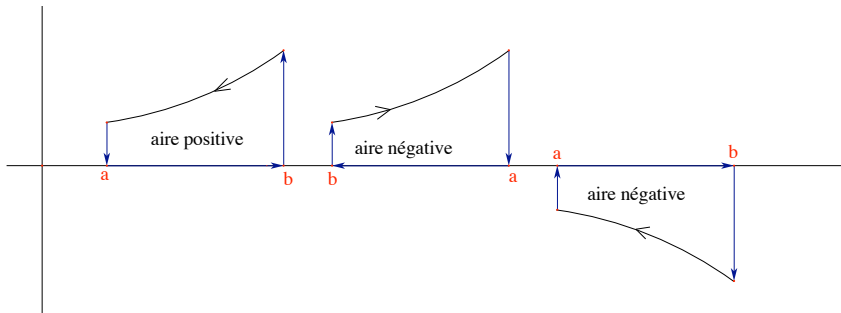


FIGURE 1.3 – Aires orientées

et montrons que l'intégrale est encore donnée par la formule $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f .

Si on a $a < b$ et f négative, l'aire de l'hypographe, en valeur absolue est la même que celle de l'hypographe de $-f$ en vertu de l'invariance de l'aire par symétrie. Notons α cette aire. Si F est une primitive de f , $-F$ en est une de $-f$ et on a $\alpha = (-F)(b) - (-F)(a)$ en vertu de 1.3.2. Comme l'intégrale, par convention, doit être négative, c'est bien $-\alpha = F(b) - F(a)$.

Si maintenant on a $a > b$, mais $f \geq 0$, c'est l'intégrale de b à a qui est positive et vaut $F(a) - F(b)$. Comme l'intégrale de a à b correspond à la même aire, comptée négativement, c'est encore $F(b) - F(a)$.

1.4.3 Propriétés

1.4.3 Proposition. Soient I un intervalle de \mathbf{R} et $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues et $a, b, c \in I$. On a les propriétés suivantes :

1) **(Relation de Chasles)** On a $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$, $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$, $\int_a^a f(t)dt = 0$.

2) **(Linéarité)** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ on a $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$.

3) **(Positivité)** On suppose $a \leq b$. Si $f(t)$ est ≥ 0 pour tout $t \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)dt$ est ≥ 0 . Si on a $f \leq g$, on a $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. Montrons Chasles. Si F est une primitive de f , il s'agit de prouver les formules : $F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$, $F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$ et $F(a) - F(a) = 0$. On devrait y arriver.

Pour la linéarité, on note que $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ et

il s'agit de vérifier alors $(\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) = \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a))$. Là non plus il n'y a pas de difficulté.

Enfin, la positivité est évidente avec la définition 1.3.1.

1.5 Applications

1.5.1 L'inégalité des accroissements finis

1.5.1 Proposition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose qu'il existe m et M tels que l'on ait $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors, on a l'inégalité des accroissements finis :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ et d'appliquer la positivité de l'intégrale.

1.5.2 La quadrature de la parabole

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ et on cherche à calculer, par exemple, l'aire de la partie située au-dessus de la courbe et en dessous de la droite d'équation $y = 1$, ou, ce qui revient au même, l'aire de la partie limitée par l'axe des x , les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ et la courbe. Par symétrie, cette aire est double de celle de sa moitié droite E , définie par $x \geq 0$. Pour la calculer, deux méthodes.

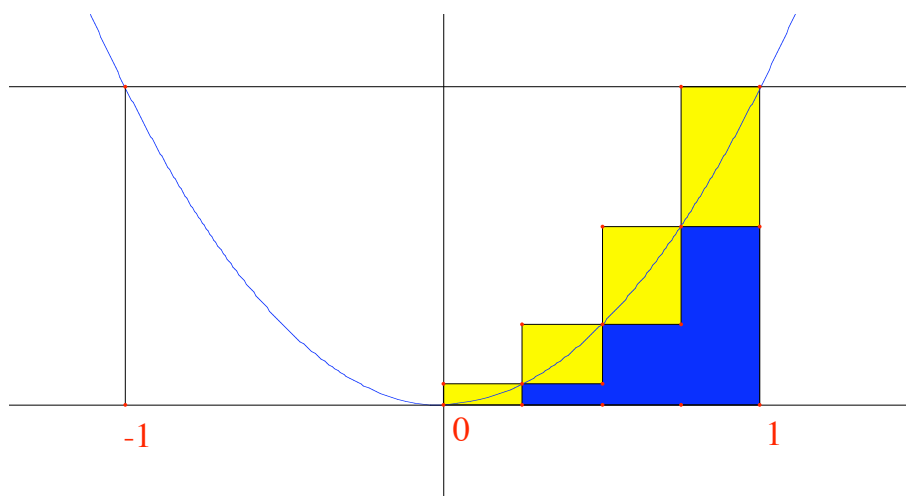


FIGURE 1.4 – La parabole et les rectangles

• On encadre E par des rectangles, voir figure ci-dessus. Si l'on partage le segment $[0, 1]$ en n parties égales, la somme des aires des rectangles situés en-dessous de la courbe est égale à $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2}$ et celle des aires situées au-dessus de la courbe est égale à $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$. Pour faire ce calcul, il faut se souvenir de la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On obtient alors :

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \int_0^1 t^2 dt \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes montre qu'on a $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$.

• On remarque que $x^3/3$ est une primitive de x^2 et on a le résultat.

1.5.2 Remarque. La première méthode n'est ici que comme repoussoir, pour montrer combien la méthode utilisant les primitives est plus simple. La procédure de découpage, qui remonte à Archimède² et qui ramène le calcul à la somme des termes d'une suite, est beaucoup plus compliquée que le calcul des primitives (méthode plus récente puisqu'elle remonte à Newton et Leibniz, vers 1650). Encore, dans le cas de la parabole, parvient-on à faire relativement aisément le calcul de $\sum n^2$, mais on pensera à la difficulté du calcul de $\sum n^{23}$ par rapport à celle de $\int x^{23} dx$ pour mesurer le progrès accompli avec l'invention du calcul infinitésimal.

Attention, ce qui vient d'être dit suppose que l'on sache calculer une primitive de f , ce qui n'est pas toujours le cas (par exemple on ne connaît pas de primitive de $f(x) = e^{-x^2}$). Dans ce cas la méthode des rectangles permet de trouver une valeur approchée de l'intégrale, voir Chapitre 4.

1.6 Intégration par parties

Rappelons que la notation $[f]_a^b$ (f à prendre entre a et b) signifie $f(b) - f(a)$.

2. Attention, Archimède calcule effectivement l'aire d'un segment de parabole par une méthode de découpage et passage à la limite, mais pas du tout en encadrant par des rectangles comme ci-dessus. En revanche, Archimède utilise une méthode très voisine de celle évoquée ici, et notamment la somme des k^2 , pour le calcul de l'aire de la spirale dite d'Archimède, comme nous le verrons.

1.6.1 La formule

1.6.1 Proposition. Soient u et v deux fonctions de classe C^1 définies sur un intervalle I . On a la formule :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Démonstration. C'est la formule $(uv)' = u'v + uv'$ intégrée entre a et b .

1.6.2 Utilisation de l'intégration par parties

On utilise l'intégration par parties essentiellement dans deux cas que l'on retrouvera dans les exercices. Rappelons qu'une fonction rationnelle est une fonction de la forme $f(x) = P(x)/Q(x)$ où P et Q sont des fonctions polynomiales.

Une fonction transcendante à dérivée rationnelle et un polynôme

L'exemple type est le suivant : u est la fonction logarithme népérien (dont la dérivée $1/x$ est rationnelle) et v' est un polynôme (voire une fonction rationnelle). Par exemple on a :

$$\int_a^b \ln(x)x^n dx = \left[\ln(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b - \frac{1}{n+1} \int_a^b x^n dx.$$

Nous verrons plus loin que cette méthode peut aussi être utilisée avec la fonction $\text{Arctan}(x)$.

Un polynôme et une fonction "primitivable" à l'infini

Le cas le plus courant est celui où u est un polynôme et v' une exponentielle (ou une fonction sinus ou cosinus). On utilise alors plusieurs intégrations par parties successives. Précisément, on va dériver le polynôme jusqu'à ce qu'il soit nul et, parallèlement, calculer des primitives de v' . On peut par exemple calculer ainsi l'intégrale de $x^n e^x$. Par exemple, on a :

$$\int x^3 e^x = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x.$$

Chapitre 2

Changement de variables dans les intégrales

2.1 Le résultat

2.1.1 Théorème. Soient I et J deux intervalles de \mathbf{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et soit $\varphi : J \rightarrow I$ une fonction de classe C^1 . Soient $a, b \in J$. On a les formules :

$$(1) \quad \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

$$(2) \quad \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx,$$

2.1.2 Remarque. Bien entendu, les formules (1) et 2) sont exactement identiques, mais ne seront pas employées de la même façon. Le point important est que l'intégrale qu'on veut calculer est celle qui fait intervenir x . Dans le premier cas, on pose $u = \varphi(x)$, autrement dit, on calcule la nouvelle variable u comme fonction de x , dans le second, on pose $x = \varphi(t)$, c'est-à-dire qu'on exprime x comme fonction de la nouvelle variable t .

Démonstration. Comme f est continue sur I elle admet une primitive F sur I et on a $I := \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. On considère ensuite la fonction $G = F \circ \varphi$. Elle est dérivable sur J et on a $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. On a donc $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a) = I$.

2.2 Utilisation de la formule (1)

Règle. On utilise la formule (1) quand, dans l'intégrale à calculer, on voit apparaître une fonction $\varphi(x)$ et que sa dérivée $\varphi'(x)$ intervient dans un terme de la forme $\varphi'(x) dx$.

2.2.1 Exemples.

1) On cherche à calculer $I = \int_1^3 \ln(x)^7 \frac{dx}{x}$. On applique la formule en posant $\varphi(x) = \ln(x)$ (car la dérivée de φ , c'est-à-dire $1/x$, apparaît en facteur de dx). On trouve $I = \int_0^{\ln(3)} u^7 du = \frac{\ln(3)^8}{8}$.

2) On cherche à calculer $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$. Ici, on se souvient de la formule $\tan x = \sin x / \cos x$ et on pose $\varphi(x) = \cos x$ (là encore, sa dérivée apparaît, au signe près en facteur de dx). On a alors $I = - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{u} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

2.2.2 Remarques.

1) Dans la pratique, on fait le changement de variable de la manière suivante. On pose $u = \varphi(x)$ et on écrit $du = \varphi'(x)dx$. On exprime la fonction à intégrer en fonction de u et enfin on change les bornes a, b en $\varphi(a), \varphi(b)$.

2) L'exemple 2) ci-dessus montre que la fonction φ n'a pas besoin d'être bijective (ici elle n'est pas injective : on a $\cos x = \cos(-x)$ pour $x \in [0, \pi/6]$).

2.3 Les fonctions réciproques des fonctions circulaires et hyperboliques

L'utilisation de la formule (2) nécessite souvent de connaître les fonctions réciproques des fonctions circulaires et hyperboliques dont nous rappelons ici les propriétés.

2.3.1 Réciproques des fonctions circulaires

On commence par la fonction sinus.

2.3.1 Proposition. La fonction $x \mapsto \sin x$ est de classe C^∞ et bijective de $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $J = [-1, +1]$. Sa fonction réciproque est notée $\text{Arcsin } x$.

La dérivée de cette fonction est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration. On a $f'(x) = \cos x$. Comme la fonction cosinus est positive sur l'intervalle I , la fonction sinus est strictement croissante et on a bien une bijection de I sur J en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Pour calculer la dérivée, on pose $f(x) = \sin x$, et on note la fonction réciproque $g(x) = \text{Arcsin } x$. On a donc, pour tout x , $f \circ g(x) = x$. Si on dérive cette relation on a $f'(g(x))g'(x) = 1$. Mais, $f'(g(x))$ c'est $\cos \theta$ avec $\theta = g(x) = \text{Arcsin } x$. Comme le cosinus est positif sur I on a $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$. Mais ici, on a $\sin \theta = \sin(\text{Arcsin } x) = x$ et on a donc $g'(x) \sqrt{1 - x^2} = 1$, d'où le résultat.

2.3.2 Corollaire. Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est la fonction $\text{Arcsin } x$.

On passe ensuite à la fonction tangente.

2.3.3 Proposition. La fonction $x \mapsto \tan x$ est de classe C^∞ et bijective de $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $J =]-\infty, +\infty[$. Sa fonction réciproque est notée $\text{Arctan } x$. La dérivée de cette fonction est $\frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. La démonstration est analogue.

2.3.4 Corollaire. Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est la fonction $\text{Arctan } x$.

2.3.5 Exemple. Comme la fonction Arctangente est une fonction transcendante à dérivée rationnelle, pour calculer des intégrales faisant appel à cette fonction, on peut souvent intégrer par parties. Par exemple, pour calculer $I = \int_0^1 \text{Arctan } x \, dx$ on pose $u = \text{Arctan } x$ et $v' = 1$, d'où $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $v(x) = x$ et on a donc :

$$I = [x \text{Arctan } x] - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

2.3.2 Les fonctions hyperboliques

Il s'agit de fonctions qui se calculent à partir de l'exponentielle réelle comme les fonctions trigonométriques avec l'exponentielle complexe et ont un comportement assez voisin.

2.3.6 Définition. Pour $x \in \mathbf{R}$ on pose $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Ces fonctions s'appellent **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique**. On définit la **tangente hyperbolique** comme le quotient $\text{th } x = \text{sh } x / \text{ch } x$.

2.3.7 Proposition. *On a les propriétés suivantes.*

1) *La fonction $\operatorname{ch} x$ est paire, positive, croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est dérivable et sa dérivée est $\operatorname{sh} x$. Elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.*

2) *La fonction $\operatorname{sh} x$ est impaire, positive et croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est dérivable et sa dérivée est $\operatorname{ch} x$. Elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle réalise une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .*

3) *On a la formule¹ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.*

4) *La fonction $\operatorname{th} x$ est impaire, positive et croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est dérivable et sa dérivée est $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Elle tend vers 1 en $+\infty$. Elle réalise une bijection de \mathbf{R} sur $] -1, 1[$.*

5) *On a les formules $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$ et $\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b + \operatorname{ch} b \operatorname{sh} a$. En particulier, on a $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ et $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x$.*

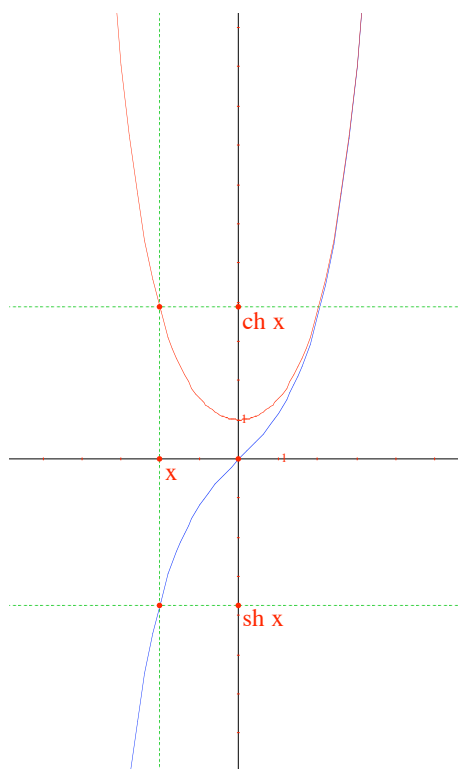


FIGURE 2.1 – Les fonctions ch et sh

1. Cette formule explique l'appellation "hyperbolique". En effet, de même qu'on a une paramétrisation du cercle $X^2 + Y^2 = 1$ par les fonctions trigonométriques ordinaires : $X = \cos t$, $Y = \sin t$, on a une paramétrisation de l'hyperbole $X^2 - Y^2 = 1$ par les fonctions hyperboliques : $X = \operatorname{ch} t$, $Y = \operatorname{sh} t$.

2.3.3 Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

2.3.8 Proposition.

1) La fonction réciproque de $\operatorname{ch} x$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. On la note $\operatorname{Argch} x$ (argument ch), mais elle est aussi égale à $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

2) La fonction réciproque de $\operatorname{sh} x$ est une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} . On la note $\operatorname{Argsh} x$, mais elle est aussi égale à $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Sa dérivée est la

fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

3) La fonction réciproque de $\operatorname{th} x$ est une bijection de $] -1, 1[$ sur \mathbf{R} . On la note $\operatorname{Argth} x$, mais elle est aussi égale à $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. Sa dérivée est la

fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$.

Démonstration. Montrons par exemple le point 2). Le calcul de la dérivée se fait comme dans le cas du sinus. On pose $f(x) = \operatorname{sh} x$ et $g(x) = \operatorname{Argsh} x$. On a donc $f(g(x)) = x$, donc $f'(g(x))g'(x) = 1$. Mais, si l'on pose $t = g(x)$, donc $\operatorname{sh} t = x$, on a $f'(t) = \operatorname{ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1 + x^2}$. On a donc bien $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Pour trouver la formule avec le logarithme, on écrit $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et on cherche à calculer x en fonction de y . Posons $u = e^x$, donc $e^{-x} = \frac{1}{u}$. On en déduit $y = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u})$, d'où $u^2 - 2uy - 1 = 0$. On résout cette équation du second degré en u et on trouve $u = y \pm \sqrt{1 + y^2}$. Comme u est > 0 (c'est une exponentielle), le signe $-$ est à écarter et on a donc $u = e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$, donc $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

On voit qu'on a trouvé ainsi des primitives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,
 $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$.

2.4 Utilisation de la formule (2)

Règle. On utilise la formule (2) quand on repère dans l'intégrale à calculer la dérivée $\psi'(x)$ d'une fonction bijective $t = \psi(x)$. On pose alors $x = \varphi(t)$ où φ est la fonction **réciproque** de ψ .

Le ressort de cette règle est la formule de dérivée des fonctions réciproques, que nous avons déjà rencontrée ci-dessus : $\varphi'(t) = (\psi^{-1})'(t) = \frac{1}{\psi'(x)}$. En effet, comme $\psi'(x)$ est présente dans l'expression, elle va se simplifier avec le terme $dx = \varphi'(t)dt = \frac{dt}{\psi'(x)}$.

2.4.1 Exemples. On utilise principalement cette méthode quand on voit apparaître les dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques ou hyperboliques, donc des termes du genre :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1}{1-x^2}.$$

On pose alors, respectivement $x = \sin t$, $x = \tan t$, $x = \operatorname{ch} t$, $x = \operatorname{sh} t$, $x = \operatorname{th} t$. Voici quelques exemples.

1) On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$. On pose $x = \sin t = \varphi(t)$. On a alors $dx = \cos t dt$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. On voit, comme annoncé, que le terme $\sqrt{1-x^2}$ se simplifie et on a $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt$, ce qui se calcule en linéarisant $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$. On trouve $I = \pi/4$.

2) On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. On pose $x = \tan t$ et on a $dx = 1 + \tan^2 t = 1 + x^2$ et un des termes $1 + x^2$ se simplifie. On se souvient aussi de la formule $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. On a donc $I = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt$. On linéarise : $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ et on a $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

3) On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$. On pose $x = \operatorname{sh} t$. On a $dx = \operatorname{ch} t dt$ et $\sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} t$. Il reste donc $I = \int_0^a \operatorname{sh}^2 t dt$ avec $a = \operatorname{Argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$. On linéarise en notant qu'on a $\operatorname{sh}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}$. On obtient $I = \frac{\operatorname{sh} 2a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}$.

Chapitre 3

Primitives des fractions rationnelles

3.1 Introduction et rappels

Une fraction rationnelle est une fonction de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des fonctions polynômes à coefficients réels. Une telle fonction est définie (et indéfiniment dérivable) là où son dénominateur $Q(x)$ est non nul.

3.1.1 Les primitives connues de fractions rationnelles

Rappelons qu'on note $\int f(x) dx$ une primitive de la fonction f . On a les formules suivantes, qui vont nous suffire pour traiter tous les cas de primitives de fractions rationnelles :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad \text{pour } n \geq 2,$$

$$\int \frac{x dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} + C.$$

3.2 Quelques résultats sur les polynômes

3.2.1 Division euclidienne

Rappelons qu'un polynôme non nul s'écrit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ où les a_i sont des réels, avec $a_n \neq 0$. Le degré de P est alors l'entier n . On dit qu'un nombre $\alpha \in \mathbf{C}$ est racine de P si l'on a $P(\alpha) = 0$. Si un polynôme vérifie $P(x) = 0$ pour tout réel x c'est le polynôme nul (i.e. tous ses coefficients sont nuls) et on écrit $P = 0$.

On peut diviser un polynôme $A(x)$ par un polynôme $B(x)$, un peu comme on divise un entier a par un entier b . Précisément, on a :

3.2.1 Théorème. *Soient A et B deux polynômes à coefficients réels, avec $B \neq 0$. Il existe des polynômes Q et R vérifiant $A = BQ + R$ et ($R = 0$ ou $\deg R < \deg B$). Le polynôme Q est le **quotient** de A par B et le polynôme R est le **reste**. Ces polynômes sont uniques.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le degré n de A . Si on a $\deg A < \deg B = p$ on prend $Q = 0$ et $R = A$. Supposons la propriété prouvée au degré $n \geq p$ et passons à $n + 1$. On écrit $A(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ et $B(x) = b_p x^p + \dots + b_0$. On considère le polynôme $Q_1(x) = -\frac{a_{n+1}}{b_p} x^{n+1-p}$. Le polynôme $A' = A - BQ_1$ est alors de degré $\leq n$ (on a annulé le terme de degré $n + 1$), donc on peut (c'est l'hypothèse de récurrence) le diviser par B . On a ainsi $A' = BQ_2 + R$ avec $\deg R < \deg B$ et donc $A = B(Q_1 + Q_2) + R$ est l'écriture cherchée.

3.2.2 Racines

3.2.2 Proposition. *Le nombre réel α est racine de P si et seulement si on a $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où Q est un polynôme.*

Démonstration. Il est clair que, si P est de la forme annoncée, α est racine de P . Pour montrer la réciproque, on effectue la division. On a $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x)$ avec $\deg R < 1$. Le polynôme R est donc une constante r et cette constante est nulle comme on le voit en écrivant $P(\alpha) = 0 + r = 0$.

Le théorème suivant est admis :

3.2.3 Théorème. *Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients réels. Alors P s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r) Q_1(x) \cdots Q_s(x)$$

où les α_i sont des réels et les Q_i des polynômes de degré 2 de la forme $Q_i(x) = x^2 + p_i x + q_i$ de discriminant < 0 et où l'on a $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + 2s = n$. Les polynômes du second degré à discriminant négatif seront dits **irréductibles**.

3.2.4 Remarques.

- 1) Les α_i sont les racines réelles de P tandis que les Q_i correspondent aux racines imaginaires conjuguées de P racines. Par exemple on a $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$ avec les racines 1 et $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.
- 2) Certaines des racines α_i peuvent être égales (ou certains des Q_i).

3.2.3 Un exemple de division

Traitons l'exemple suivant : $A(X) = X^5 - 4X^4 + 2X^2 - X + 1$ et $B(X) = X^2 + 1$. Pour trouver Q et R explicitement, on pose la division comme dans les entiers en posant les soustractions à chaque pas. On a le tableau suivant :

$$\begin{array}{r}
 X^5 \quad -4X^4 \quad \quad +2X^2 \quad -X \quad +1 \quad \left| \quad X^2 + 1 \right. \\
 \hline
 -X^5 \quad \quad \quad -X^3 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad X^3 - 4X^2 - X + 6 \\
 \hline
 \quad \quad -4X^4 \quad -X^3 \quad +2X^2 \quad -X \quad +1 \\
 \quad \quad \quad \quad 4X^4 \quad \quad \quad +4X^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad -X^3 \quad +6X^2 \quad -X \quad +1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad X^3 \quad \quad \quad +X \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6X^2 \quad \quad \quad +1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -6X^2 \quad \quad \quad -6 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -5
 \end{array}$$

On a donc $Q(X) = X^3 - 4X^2 - X + 6$ et $R(X) = -5$.

3.3 Le théorème de décomposition en éléments simples

3.3.1 Éléments simples

3.3.1 Définition. On appelle **élément simple** une fraction rationnelle de l'une des deux formes suivantes :

- $\frac{a}{(x - \alpha)^n}$ avec $a, \alpha \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$,
- $\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^m}$ avec $a, b, p, q \in \mathbf{R}$, a, b non tous deux nuls, $m \in \mathbf{N}^*$ et le polynôme $x^2 + px + q$ de discriminant < 0 (donc irréductible).

Le premier intérêt de ces fractions vient du fait qu'on sait en calculer des primitives. On l'a vu pour celles du premier type. Pour les autres, qui sont plus compliquées, on montre d'abord un lemme :

3.3.2 Lemme. On désigne par F_n une primitive de $\frac{1}{(x^2 + 1)^n}$ pour $n \geq 1$. On a $F_1(x) = \text{Arctan } x + C$ et, pour $n \geq 2$, la relation de récurrence :

$$F_n(x) = \frac{2n - 3}{2n - 2} F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n - 2} \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + C.$$

Cette relation permet de calculer F_n par récurrence.

Démonstration. La preuve repose sur deux astuces classiques :

1) On écrit $F_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^n} dx$, donc $F_n(x) = F_{n-1}(x) - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx := F_{n-1}(x) - G_n(x)$.

2) On sépare alors le terme x^2 du numérateur de $G_n(x)$ en $x \cdot x$ et on intègre par parties en posant $u = x$, d'où $u' = 1$ et $v' = \frac{x}{(x^2 + 1)^n}$, d'où

$$v = -\frac{1}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}}. \text{ On en déduit :}$$

$$G_n(x) = -\frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} F_{n-1}$$

et le résultat annoncé s'ensuit.

On peut maintenant calculer $\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^m} dx$. On fait apparaître la dérivée de $x^2 + px + q$ (c'est-à-dire $2x + p$) au numérateur en écrivant :

$$ax + b = \frac{a}{2}(2x + p) + b - \frac{ap}{2}.$$

L'intégrale $\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^m} dx$ se calcule aisément : dans le cas $m = 1$ on trouve $\ln(x^2 + px + q) + C$ et $\frac{1}{(1 - m)(x^2 + px + q)^{m-1}} + C$ sinon. Il reste

à calculer $\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^m} dx$. Pour cela, on regarde $x^2 + px + q$ comme le début d'un carré. Si on pose $\Delta = p^2 - 4q$, on a $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}$. Comme Δ est négatif, on peut poser $\Delta = -c^2$ avec $c \in \mathbf{R}$ et il reste à calculer $\int \frac{dX}{(X^2 + c^2)^m}$ où l'on a posé $X = x + \frac{p}{2}$. Si on effectue le changement de variable $u = X/c$ on est ramené à l'intégrale calculée dans le lemme ci-dessus.

3.3.2 Le théorème

Le second intérêt des éléments simples c'est que toute fraction rationnelle se décompose comme **somme** de tels éléments :

3.3.3 Théorème. Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fraction rationnelle. Alors f s'écrit

de manière unique sous la forme $f(x) = E(x) + \sum_{i=1}^r e_i(x)$ où E est un polynôme et où les e_i sont des éléments simples. Plus précisément :

- le polynôme E est le quotient dans la division euclidienne de N par D ,
- si le dénominateur de f s'écrit :

$$D(x) = c \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^s Q_j(x)^{l_j}$$

où c est un réel non nul, les α_i des réels distincts et les Q_j des polynômes unitaires de degré 2 irréductibles, alors les éléments simples qui interviennent dans la décomposition sont des types suivants :

- $\frac{a}{(x - \alpha_i)^m}$, avec $1 \leq m \leq k_i$,
- $\frac{ax + b}{Q_j^m}$, avec $1 \leq m \leq l_j$.

Démonstration. On donne juste une petite indication de la démonstration. On commence par faire la division de N par D : $N = DE + R$ avec $\deg R < \deg D$. On a alors $f = E + R/D$ et on est donc ramené au cas $\deg N < \deg D$.

Traitons le cas le plus simple, celui où D admet n racines réelles simples. On a donc :

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}}{(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)}$$

avec les α_i distincts. Il s'agit d'écrire $f(x)$ sous la forme :

$$\frac{\beta_1}{(x - \alpha_1)} + \cdots + \frac{\beta_n}{(x - \alpha_n)}.$$

On connaît les α_i et les a_j et on cherche les β_k . En réduisant au même dénominateur, on a à résoudre :

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} = \beta_1(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) + \dots + \beta_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-1}).$$

En identifiant les coefficients des monômes x^k , on trouve :

$$a_0 = (-1)^{n-1} [\beta_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n + \dots + \beta_n \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}],$$

⋮

$$a_{n-1} = \beta_1 + \dots + \beta_n.$$

On a ainsi un système de n équations linéaires en les n inconnues β_1, \dots, β_n et on montre qu'il admet une solution unique.

3.4 Méthodes pratiques de décomposition

Nous allons expliciter ces méthodes sur quelques exemples. On commence toujours par faire la division euclidienne pour se ramener au cas $\deg N < \deg D$.

3.4.1 Le cas où D est de degré 2

Posons $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + px + q}$. Il y a trois cas.

1) Si D n'a pas de racine réelle, il n'y a rien à faire, on a déjà un élément simple.

2) Si D a deux racines réelles distinctes : $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$ avec $\alpha \neq \beta$, on cherche A, B tels que :

$$(*) \quad \frac{ax + b}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

Il y a deux méthodes.

- Méthode brutale. On réduit les fractions au même dénominateur et on identifie $A(x - \beta) + B(x - \alpha) = ax + b$. On obtient un système en A et B :

$$\begin{cases} A + B = a \\ \beta A + \alpha B = -b. \end{cases}$$

La résolution est facile et donne $A = \frac{\alpha a + b}{\alpha - \beta}$ et $B = \frac{\beta a + b}{\beta - \alpha}$.

• Méthode astucieuse. On multiplie (*) par $x - \alpha$. On obtient $\frac{ax + b}{x - \beta} = A + \frac{B(x - \alpha)}{x - \beta}$ et on fait $x = \alpha$ dans cette expression. On trouve bien $A = \frac{\alpha a + b}{\alpha - \beta}$. On procède de même pour B en multipliant par $x - \beta$.

3) Il reste le cas d'une racine double : $x^2 + px + q = (x - \alpha)^2$. On doit écrire :

$$(**) \quad \frac{ax + b}{(x - \alpha)^2} = \frac{A}{(x - \alpha)^2} + \frac{B}{x - \alpha}.$$

Là encore, il y a deux méthodes.

- La méthode d'identification comme ci-dessus.
- Une méthode astucieuse. On multiplie par $(x - \alpha)^2$, il reste $ax + b = A + B(x - \alpha)$ et on fait $x = \alpha$, d'où $A = a\alpha + b$. Pour trouver B on multiplie par x . On obtient :

$$\frac{ax^2 + bx}{(x - \alpha)^2} = \frac{Ax}{(x - \alpha)^2} + \frac{Bx}{x - \alpha}.$$

On fait alors tendre x vers l'infini. Le membre de gauche tend vers a , celui de droite vers B , d'où $B = a$.

3.4.2 Le cas où D est de degré 3

On sait qu'alors D admet au moins une racine réelle et il y a quatre cas.

1) Si D a trois racines réelles, il faut écrire :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}.$$

On utilise la méthode astucieuse vue ci-dessus : on multiplie par $x - \alpha$ et on fait $x = \alpha$. On trouve $A = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$ et de même pour B, C .

2) Si D a une racine double et une autre racine réelle, on doit écrire :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^2(x - \beta)} = \frac{A}{(x - \alpha)^2} + \frac{B}{x - \alpha} + \frac{C}{x - \beta}.$$

Pour trouver C on utilise la même méthode (multiplier par $x - \beta$ et faire $x = \beta$), pour trouver A on fait de même en multipliant par $(x - \alpha)^2$. Enfin, pour trouver B on multiplie par x et on fait tendre x vers l'infini. On obtient $a = B + C$, ce qui donne B .

3) Si D a une racine triple on doit écrire :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^3} = \frac{A}{(x - \alpha)^3} + \frac{B}{(x - \alpha)^2} + \frac{C}{x - \alpha}.$$

Pour A on multiplie par $(x - \alpha)^3$ et on fait $x = \alpha$, pour C on multiplie par x et on fait tendre x vers l'infini, enfin, pour B , le plus simple est de donner une valeur particulière à x , différente de α , par exemple 0 si c'est possible. On trouve alors $-c/\alpha^3 = -A/\alpha^3 + B/\alpha^2 - C/\alpha$, ce qui donne B .

4) Si D a une unique racine réelle simple, on doit écrire :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)(x^2 + px + q)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}.$$

La méthode est toujours la même pour trouver A . Pour B on multiplie par x et on fait tendre x vers l'infini, ce qui donne $a = A + B$ donc B . Enfin, pour C , le plus simple est de donner à x une valeur quelconque, différente de α , par exemple $x = 0$ si c'est possible. On trouve alors $-\frac{c}{\alpha q} = -\frac{A}{\alpha} + \frac{C}{q}$, ce qui donne C .

3.4.3 Le cas général

Les méthodes sont analogues à celles vues ci-dessus. On peut notamment toujours utiliser les méthodes brutales d'identification ou d'attribution de valeurs. Dans la pratique, la limite du théorème est essentiellement la difficulté de résolution des équations algébriques.

Chapitre 4

Calcul approché d'intégrales

4.1 Introduction

Pour calculer une intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$, le moyen le plus simple est de déterminer une primitive F de f car on a alors $I = F(b) - F(a)$. Le problème, c'est qu'il y a des fonctions continues dont on ne connaît pas de primitive. Un exemple classique est celui de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$, très importante en probabilités. Dans ce cas, on ne peut calculer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ par les méthodes usuelles. On doit donc recourir à des méthodes de calcul approché. Nous étudierons ici quatre de ces méthodes : méthodes des rectangles, des trapèzes, du point médian et de Simpson, en abrégé R, T, M, S. Bien entendu, comme dans tout procédé de calcul approché, il faudra disposer d'une majoration de l'erreur.

4.2 Les quatre méthodes R,T,M,S

4.2.1 Cadre général

On cherche à calculer une intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction continue (voire C^1, C^2, C^4) sur $[a, b]$, avec $a < b$. L'idée est de remplacer f sur $[a, b]$ par une fonction g plus simple dont on saura calculer une primitive (constante, affine, polynomiale de degré 2).

Les méthodes des rectangles

On remplace f par la fonction constante égale à la valeur de f à l'une des bornes du segment : $f(a)$ ou $f(b)$. Il y a donc deux méthodes essentiellement

équivalentes qui correspondent sur la figure au rectangle foncé et au rectangle réunion des deux.

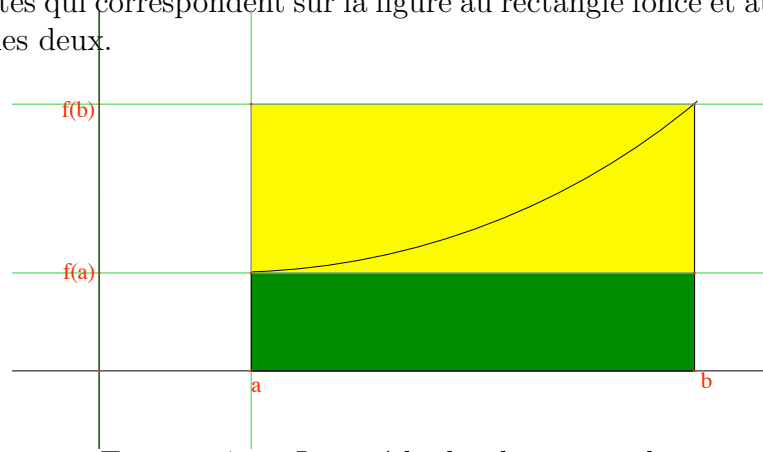


FIGURE 4.1 – Les méthodes des rectangles

On remplace donc I par $I_R = (b - a)f(a)$ ou $(b - a)f(b)$.

La méthode des trapèzes

On remplace f par la fonction affine g qui vaut $f(a)$ en a et $f(b)$ en b . La partie située sous le graphe de g est alors un trapèze.

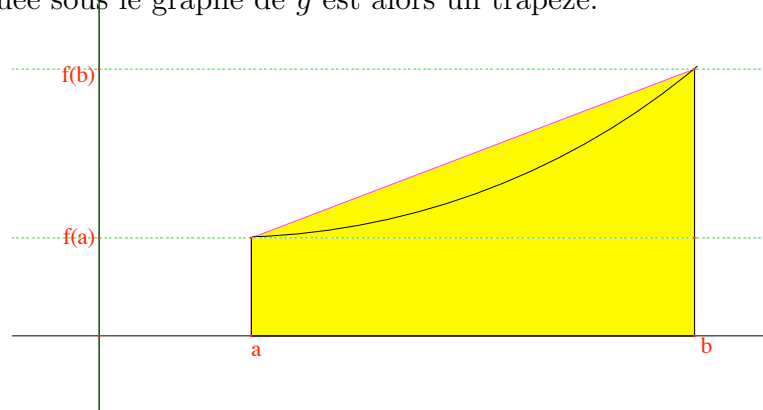


FIGURE 4.2 – La méthode des trapèzes

Comme l'aire du trapèze est le produit de la hauteur par la demi-somme des bases, on remplace donc I par $I_T = (b - a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right]$.

La méthode du point médian

Il s'agit d'une méthode des rectangles, mais au lieu de remplacer f par la valeur constante prise aux bornes, on prend la valeur prise au point médian

(ou milieu) $\frac{a+b}{2}$. On remplace donc I par $I_M = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

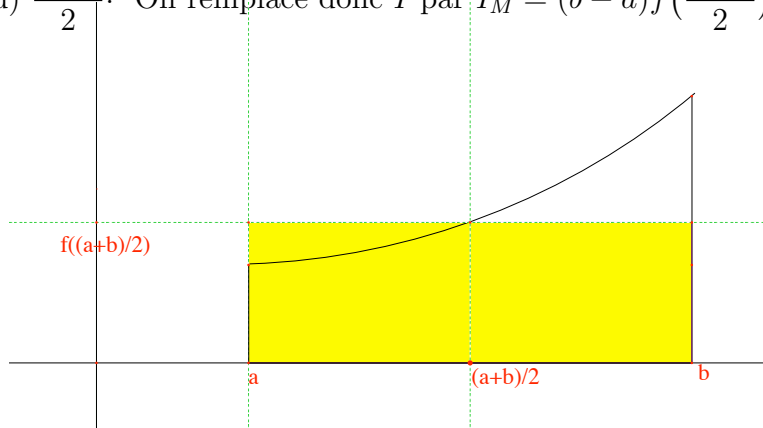


FIGURE 4.3 – La méthode du point médian

La méthode de Simpson

Cette fois, on approche f par une fonction du second degré g qui prend les mêmes valeurs que f aux extrémités de l'intervalle et au milieu (ou en un point $c \in]a, b[$). Le graphe de g est une parabole.

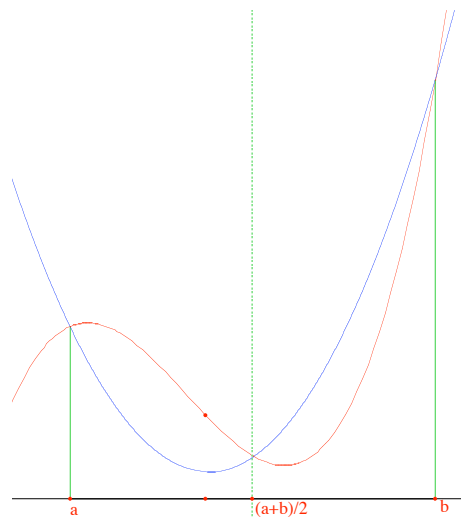


FIGURE 4.4 – La méthode de Simpson

On cherche donc $g(x) = ux^2 + vx + w$ avec $g(a) = f(a) = \alpha$, $g(b) = f(b) = \beta$ et $g(c) = f(c) = \gamma$. On voit qu'on a à résoudre le système d'équations

linéaires suivant, en u, v, w , qui est un système de Cramer :

$$(S) \quad \begin{cases} ua^2 + va + w = \alpha \\ ub^2 + vb + w = \beta \\ uc^2 + vc + w = \gamma. \end{cases}$$

On montre¹ qu'alors on a $\int_a^b g(t)dt = I_S = \frac{b-a}{6} [f(a) + f(b) + 4f(\frac{a+b}{2})]$ (dans le cas $c = \frac{a+b}{2}$). On appelle cette formule la formule des trois niveaux².

4.2.2 Itération

En général, il ne suffit pas d'appliquer l'une des méthodes sur un seul intervalle pour avoir une précision satisfaisante. On va donc itérer la méthode en l'appliquant sur chacun des intervalles d'une subdivision régulière de $[a, b]$:

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b.$$

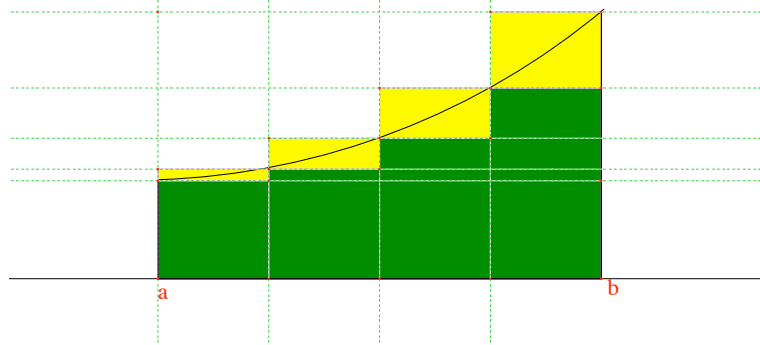


FIGURE 4.5 – Les méthodes des rectangles itérées

Par exemple, pour la méthode des rectangles et des trapèzes on obtient

$$I_{R,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) ; \quad I_{T,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right].$$

On définit de même $I_{M,n}$ et $I_{S,n}$.

-
1. Exercice pour le lecteur courageux.
 2. Ce type de formule est utilisé pour calculer notamment les volumes des tonneaux.

4.3 Les majorations

Si f est de classe C^k on note M_k le maximum de la valeur absolue $|f^{(k)}(x)|$ sur $[a, b]$ On a alors le théorème suivant :

4.3.1 Théorème.

- 1) (Rectangles) On suppose f de classe C^1 . On a $|I - I_R| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1$.
- 2) (Trapèzes) On suppose f de classe C^2 . On a $|I - I_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2$.
- 3) (Point médian) On suppose f de classe C^2 . On a $|I - I_M| \leq \frac{(b-a)^3}{24} M_2$.
- 4) (Simpson) On suppose f de classe C^4 . On a $|I - I_S| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M_4$.

On déduit de ce théorème les majorations dans le cas d'une subdivision à n pas :

4.3.2 Corollaire.

- 1) (Rectangles) On suppose f de classe C^1 . On a $|I - I_{R,n}| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$.
- 2) (Trapèzes) On suppose f de classe C^2 . On a $|I - I_{T,n}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$.
- 3) (Point médian) On suppose f de classe C^2 . On a $|I - I_{M,n}| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$.
- 4) (Simpson) On suppose f de classe C^4 . On a $|I - I_{S,n}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} M_4$.

Démonstration. (du corollaire) Faisons par exemple le cas du trapèze, les autres sont identiques. En vertu du théorème 4.3.1, appliqué à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, de longueur $\frac{b-a}{n}$, on a l'inégalité :

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right] \right| \leq \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \frac{M_2}{12}.$$

En sommant ces n inégalités on obtient le résultat (il y a un n du dénominateur qui s'en va).

4.3.1 Preuve du théorème 4.3.1, cas R et T

Expliquons l'idée sur le cas du rectangle. On cherche à majorer l'erreur $\Delta = \int_a^b f(t) dt - (b-a)f(a)$. Cette quantité est une constante, mais si on fait varier b elle devient une fonction : $\Delta(x) = \int_a^x f(t) dt - (x-a)f(a)$. Bien sûr,

il suffit de majorer $\Delta(x)$ (car on aura la majoration de Δ en faisant $x = b$). Pour cela on dérive jusqu'à ce qu'on voie une majoration évidente. Ici, le premier pas suffit, on a $\Delta'(x) = f(x) - f(a)$ et on applique l'inégalité des accroissements finis (IAF) (voir 1.5.1) qui donne $|\Delta'(x)| \leq M_1(x - a)$. On majore alors Δ en intégrant Δ' : $\Delta(x) = \int_a^x \Delta'(t)dt$ (car $\Delta(a) = 0$), d'où, $|\Delta(x)| \leq M_1 \int_a^x (t - a)dt = M_1 \frac{(x - a)^2}{2}$ et on a le résultat.

Pour la méthode des trapèzes on considère $\Delta(x) = \int_a^x f(t)dt - (x - a) \frac{f(x) + f(a)}{2}$ et on a : $\Delta'(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(a) - (x - a)f'(x))$, puis $\Delta''(x) = -\frac{(x - a)}{2}f''(x)$. On en déduit $|\Delta''(x)| \leq \frac{1}{2}M_2(x - a)$ et, en intégrant (en tenant compte de $\Delta'(a) = \Delta(a) = 0$), $|\Delta'(x)| \leq \frac{(x - a)^2}{4}M_2$ et $|\Delta(x)| \leq \frac{(x - a)^3}{12}M_2$ d'où le résultat en prenant $x = b$.

4.3.2 Preuve du théorème 4.3.1, cas M et S

L'idée est identique, avec une variante qui consiste à choisir comme origine le point médian $c = \frac{a + b}{2}$. On regarde alors, dans le cas du point médian : $\Delta(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)dt - 2xf(c)$ (car la largeur de l'intervalle est ici $2x$; on aura la majoration voulue en prenant $x = \frac{b-a}{2}$). On dérive : $\Delta'(x) = f(c + x) + f(c - x) - 2f(c)$, puis $\Delta''(x) = f'(c + x) - f'(c - x)$ que l'on majore par IAF : $|\Delta''(x)| \leq 2xM_2$, d'où en intégrant deux fois sur $[0, x]$ et en tenant compte de $\Delta'(0) = \Delta(0) = 0$, les majorations : $|\Delta'(x)| \leq x^2M_2$, puis $|\Delta(x)| \leq \frac{x^3}{3}M_2$. Si on applique cette formule avec $x = \frac{b-a}{2}$ on obtient $|I - I_M| \leq M_2 \frac{(b - a)^3}{3 \times 8}$, d'où le résultat.

Finissons avec Simpson. Cette fois on considère

$$\Delta(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)dt - \frac{x}{3}[f(c + x) + f(c - x) + 4f(c)].$$

On doit dériver trois fois pour voir une majoration évidente :

$$\Delta'(x) = \frac{2}{3}[f(c + x) + f(c - x)] - \frac{4}{3}f(c) - \frac{x}{3}[f'(c + x) - f'(c - x)],$$

$$\Delta''(x) = \frac{1}{3}[f'(c+x) - f'(c-x)] - \frac{x}{3}[f''(c-x) + f''(c+x)],$$

$$\Delta'''(x) = \frac{x}{3}[f'''(c-x) - f'''(c+x)]$$

que l'on majore par IAF : $|\Delta'''(x)| \leq \frac{2x^2}{3}M_4$. On en déduit successivement, en intégrant sur $[0, x]$ et en tenant compte de $\Delta''(0) = \Delta'(0) = \Delta(0) = 0$, les majorations :

$$|\Delta''(x)| \leq \frac{2x^3}{9}M_4, \quad |\Delta'(x)| \leq \frac{x^4}{18}M_4, \quad |\Delta(x)| \leq \frac{x^5}{90}M_4.$$

En faisant $x = \frac{b-a}{2}$ on obtient $|I - I_S| \leq \frac{(b-a)^5}{90 \times 32}M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880}M_4$ comme annoncé.

Chapitre 5

Calculs d'aires, de volumes et de grandeurs physiques

L'intégrale est un moyen très efficace pour calculer des grandeurs physiques (et notamment aires et volumes). Dans ce qui suit, on va utiliser des méthodes "de physiciens", mais en les décryptant du point de vue mathématique.

5.1 L'aire de la spirale

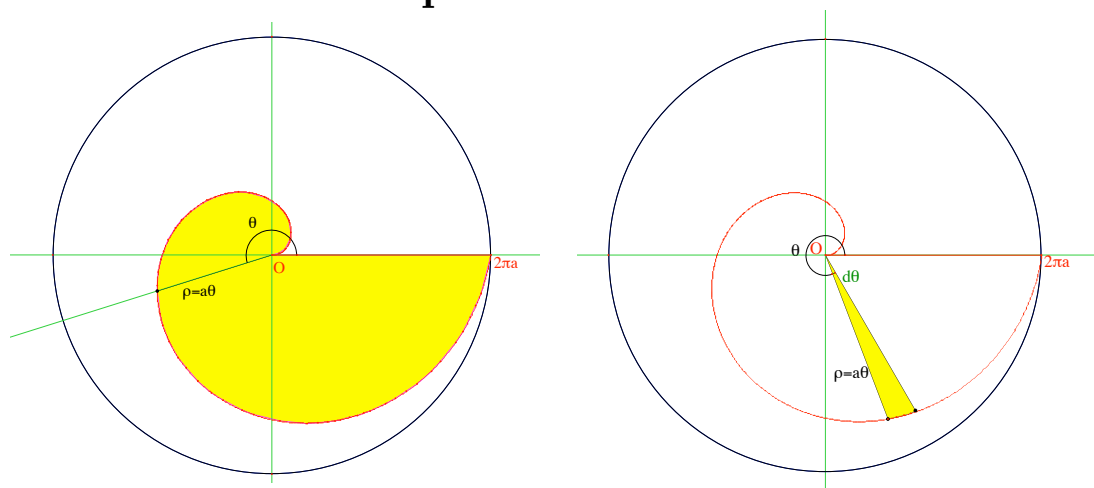


FIGURE 5.1 – L'aire de la spirale.

On travaille dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé O, \vec{i}, \vec{j} . On définit le point A par $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$. Un point M du plan a pour coordonnées $(x, y) : \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. L'angle polaire de M est l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, le rayon vecteur de M est $\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. La spirale d'Archimède est

la courbe \mathcal{S} donnée en coordonnées polaires par la formule $\rho = a\theta$, c'est-à-dire l'ensemble des points M qui vérifient cette relation avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, voir figure 5.1.

On se propose de calculer l'aire \mathcal{A} limitée par cette courbe et par la demi-droite $[OA)$. Cette aire apparaît en jaune sur la figure. Rappelons que l'aire d'un secteur circulaire de rayon R et d'angle α est égale à $\frac{\alpha R^2}{2}$ (on fait une règle de trois¹ : l'aire du disque, qui correspond à un angle de 2π radians, est πR^2 , pour un angle d'un radian elle sera $\pi R^2/(2\pi) = R^2/2$ et pour α radians, $\alpha R^2/2$).

La méthode du physicien consiste à regarder la petite proportion d'aire $d\mathcal{A}$ comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$, où $d\theta$ est supposé petit, voire infinitésimal. Comme $d\theta$ est petit, on peut considérer que ρ est constant sur la portion de spirale correspondante et l'aire est donc celle d'un secteur circulaire : $d\mathcal{A} = \rho^2 d\theta/2 = a^2 \theta^2 d\theta/2$. Ensuite, l'aire totale est la "somme" des morceaux infinitésimaux $d\mathcal{A}$, ce qui se note² $\mathcal{A} = \int d\mathcal{A}$ ou encore $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \theta^2 d\theta$.
Il n'y a aucune difficulté pour faire ce calcul et on trouve $\mathcal{A} = \frac{4a^2\pi^3}{3}$.

Bien entendu, cette méthode n'est pas tout à fait rigoureuse, mais elle l'est presque, et elle est très efficace. Pour la rendre rigoureuse, repartons de l'égalité $d\mathcal{A} = a^2 \theta^2 d\theta/2$. On peut l'écrire $\frac{d\mathcal{A}}{d\theta} = \frac{a^2 \theta^2}{2}$, ce qui fait penser à une dérivée. Effectivement, nous allons montrer que cette quantité est la dérivée $\mathcal{A}'(\theta)$ de la fonction $\mathcal{A}(\theta)$ qui représente l'aire comprise entre les angles 0 et θ . Si cela est vrai, on a $\mathcal{A} = \mathcal{A}(2\pi) - \mathcal{A}(0) = \int_0^{2\pi} \mathcal{A}'(\theta) d\theta$ et on retrouve la formule précédente.

Pour montrer l'assertion sur la dérivée, revenons à la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement :

$$\mathcal{A}'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\theta + h) - \mathcal{A}(\theta)}{h}.$$

L'accroissement en question est le même que le $d\mathcal{A}$ précédent, mais où l'on remplace l'accroissement infinitésimal $d\theta$ de l'angle par un accroissement fini h , que l'on va faire tendre vers 0. Si on ne fait plus l'approximation du physicien qui assimilait la petite aire jaune à celle d'un secteur circulaire,

1. On sait faire, nous, contrairement à certains !

2. Le signe intégrale \int est un S, comme dans somme. Les anciens voyaient l'intégrale comme une somme, mais pas une somme finie, une somme infinie de morceaux infiniment petits.

comme le rayon $\rho = a\theta$ croît, on a un encadrement entre deux secteurs, l'un de rayon $a\theta$, l'autre de rayon $a(\theta + h)$. On obtient :

$$\frac{a^2\theta^2h}{2h} \leq \frac{\mathcal{A}(\theta + h) - \mathcal{A}(\theta)}{h} \leq \frac{a^2(\theta + h)^2h}{2h}.$$

On voit que les deux termes extrêmes tendent vers $\frac{a^2\theta^2}{2}$ et on a le résultat. En fait, ce que fait le physicien c'est que dans le terme $(\theta + h)^2 = \theta^2 + 2\theta h + h^2$, il néglige les termes en h et h^2 . C'est justifié par le fait que ces termes tendent vers 0 quand h tend vers 0.

5.1.1 Remarque. Le premier à avoir calculé cette aire est Archimède qui n'utilisait évidemment pas la méthode avec les primitives qui date du XVII^e siècle, mais un encadrement par des sommes finies, comme ce que nous avons fait au chapitre 1 dans le cas de la parabole. Le ressort de la preuve d'Archimède est le calcul de la somme $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

5.2 Le volume du cône

La méthode est la même et nous allons l'expliquer sur le cas du cône droit. Elle s'applique aussi pour la pyramide, la boule, etc. Rappelons que le volume d'un cylindre droit dont la base est d'aire B et qui a une hauteur h , est Bh (voir par exemple [Perrin] Mathématiques d'Ecole, Cassini, 2005 sur ces questions).

Soit C un cône de base B et de sommet O . On suppose que B est un disque de centre A et de rayon R et que O est situé sur la perpendiculaire au plan de B passant par A , voir figure 5.2. On note $a = OA$ la hauteur du cône. On se propose de calculer le volume $V(C)$. On choisira un repère orthonormé de l'espace d'origine O et tel que le plan de B soit le plan $Z = a$.

5.2.1 Le calcul du physicien

On note $dV(z)$ le volume du tronc de cône situé entre les hauteurs z et $z + dz$ (dz est supposé petit, voire "infinitésimal"). Comme dz est petit, on peut assimiler $dV(z)$ à un cylindre de base C_z et de hauteur dz . Si on note $S(z)$ l'aire de C_z , on a donc $dV(z) = S(z)dz$. Pour calculer $S(z)$ il faut calculer le rayon $r(z)$ de C_z , ce qui se fait par homothétie ou Thalès : $\frac{r(z)}{R} = \frac{z}{a}$, d'où $r(z) = \frac{Rz}{a}$. On en déduit $S(z) = \frac{\pi R^2 z^2}{a^2}$.

Le volume du cône est alors la “somme” des volumes des troncs de cône infinitésimaux, ce que le physicien écrit $V(C) = \int_0^a dV(z) = \int_0^a \frac{\pi R^2 z^2}{a^2} dz = \frac{1}{3}\pi R^2 a$.

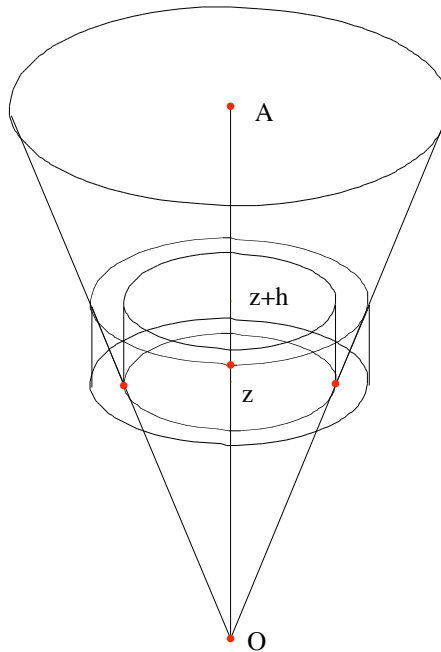


FIGURE 5.2 – Le volume du cône

5.2.2 La justification mathématique

Comme pour l’aire, on va lire la formule $dV(z) = S(z)dz$ sous la forme $V'(z) = \frac{dV(z)}{dz} = S(z)$, et montrer que $S(z)$ est la dérivée d’une fonction volume. Cette fonction est très simple. On considère la partie $C_{\leq z}$ de C située au-dessous du plan $Z = z$ et on note $V(z)$ son volume.

Pour montrer que la dérivée de V est bien S on revient au taux d’accroissement. On considère un réel z et un accroissement h et on suppose, pour fixer les idées, $h > 0$. Alors, la partie $C_{\leq z+h} \setminus C_{\leq z}$ est comprise entre deux cylindres de hauteur h : un cylindre intérieur de rayon $r(z)$ et un cylindre extérieur de rayon $r(z+h)$. On en déduit l’encadrement suivant :

$$\pi r(z)^2 h \leq V(z+h) - V(z) \leq \pi r(z+h)^2 h,$$

puis, en divisant par h :

$$\pi r(z)^2 \leq \frac{V(z+h) - V(z)}{h} \leq \pi r(z+h)^2.$$

Quand h tend vers 0, les deux termes extrêmes tendent vers $\pi r(z)^2 = S(z)$ et on a bien montré que la dérivée $V'(z)$ existe et est égale à $S(z)$.

On a alors la formule $V(C) = V(a) = V(a) - V(0) = \int_0^a V'(z) dz = \int_0^a S(z) dz$ et on retrouve le résultat précédent.

5.3 Calcul d'un moment d'inertie

Lorsqu'on étudie le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe, un corollaire de la loi fondamentale de la dynamique est le théorème du moment cinétique. Pour énoncer ce théorème, on a besoin d'un invariant qui prend en compte à la fois la masse du solide, mais aussi sa position par rapport à l'axe. Le cas le plus simple est celui d'un point matériel de masse m , situé à la distance r de l'axe pour lequel le moment d'inertie est $J = mr^2$. Dans le cas général, le moment d'inertie est défini par une intégrale multiple, mais on peut parfois le calculer de manière simple en utilisant les propriétés de symétrie de la figure et les deux axiomes suivants :

Axiomes.

- 1) **Additivité** *Le moment d'inertie d'un solide réunion disjointe (ou presque disjointe) de deux solides est la somme des moments.*
- 2) **Encadrement** *Si un solide de masse m est situé à une distance d'un axe comprise entre r et R , son moment d'inertie J vérifie $mr^2 \leq J \leq mR^2$.*

Avec ces remarques, on peut montrer le théorème suivant :

5.3.1 Théorème. *Soit D un disque matériel homogène d'épaisseur négligeable, de masse m , de centre O et de rayon R . Le moment d'inertie de D par rapport à un axe passant par O et perpendiculaire au plan de D est $J = \frac{mR^2}{2}$.*

Démonstration. On désigne par μ la densité surfacique de D . On a donc $m = \pi R^2 \mu$. On utilise la méthode du physicien : grâce à l'axiome d'additivité, on découpe le disque en petites couronnes. On considère donc une couronne dC d'épaisseur dr infinitésimale, située à la distance r de O , voir figure 5.3. Comme dr est infinitésimal, on considère que tous les points de la couronne sont à la distance r de l'axe et son moment est donc $dJ = dm r^2$ où dm est

la masse de la couronne, que l'on calcule (à la physicienne) en redressant la couronne dC pour la considérer comme un rectangle de longueur $2\pi r$ et d'épaisseur dr . On a donc $dm = 2\pi r\mu dr$. On somme ensuite les moments de toutes ces couronnes : $J = \int dJ = \int_0^R 2\pi r^3\mu dr = \pi R^4\mu/2 = mR^2/2$ comme annoncé.

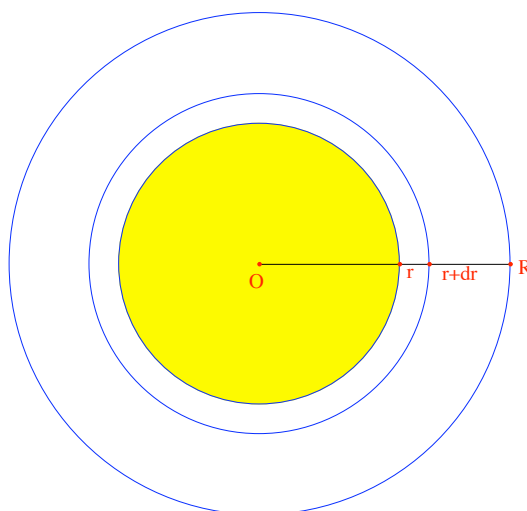


FIGURE 5.3 – Le moment d'inertie d'un disque

Le mathématicien, désireux de justifier ce calcul, le fera sans peine en introduisant le moment $J(r)$ du disque de rayon r et en montrant la formule $J'(r) = 2\pi r^3\mu$. Pour cela, on considère un accroissement h (au lieu de dr) de r . Par l'axiome d'additivité, la différence $J(r+h) - J(r)$ est le moment de la couronne d'épaisseur h . On calcule facilement la masse Δm de cette couronne (sans faire d'approximation). En effet, son aire est la différence des aires des disques, donc $\pi((r+h)^2 - r^2)$ et on a $\Delta m = \pi((r+h)^2 - r^2)\mu$. Comme la couronne est à une distance de O comprise entre r et $r+h$, l'axiome 2) donne l'encadrement :

$$\pi((r+h)^2 - r^2)\mu r^2 \leq J(r+h) - J(r) \leq \pi((r+h)^2 - r^2)\mu(r+h)^2,$$

soit encore :

$$\pi\mu r^2 h(2r+h) \leq J(r+h) - J(r) \leq \pi\mu(r+h)^2 h(2r+h).$$

Si on divise par h et qu'on fait tendre h vers 0, on voit que les deux membres tendent vers $2\pi\mu r^3$ comme annoncé. Là encore, le physicien néglige dans l'expression précédente tous les termes en h , et comme on fait tendre h vers

0, il a bien raison! Précisément, au lieu de $\Delta m = \pi\mu(2rh + h^2)$ il garde seulement $2\pi\mu rh$, négligeant le terme en h^2 , et au lieu d'avoir r^2 et $(r + h)^2$, il ne garde que r^2 , négligeant les termes en h et h^2 .