Existence d'ensembles finis de résolutions données

Daniel PERRIN

1 Introduction

Dans tout ce qui suit on travaille sur un corps k algébriquement clos. On note R l'anneau de polynômes $k[X, Y, T]$.

Soit r un entier ≥ 1 et soient E et F deux R-modules libres gradués : $E = \bigoplus_{j=1}^{r} R(-m_j)$ et $F = \bigoplus_{i=0}^{r} R(-n_i)$, où les m_j et les n_i sont des entiers positifs qui vérifient : $n_0 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_r$ et $m_1 \leq \cdots \leq m_r$. **On suppose de plus**[1] que l'on a $m_j \neq n_i$ pour tous les couples i, j et $\sum_{j=1}^{r} m_j = \sum_{i=0}^{r} n_i$.

Soit $u : E \to F$ un homomorphisme R-linéaire gradué de degré zéro, donné, dans les bases canoniques, par une matrice $A = (a_{ij})$ de taille $(r+1) \times r$ dont le coefficient d'indices i, j est un polynôme homogène de degré $m_j - n_i$ (donc nul si $m_j < n_i$).

On rappelle les résultats suivants (voir [DP] Ch. X, 2.7 et 2.9, le cas traité là est celui des courbes de $\mathbf{P}^3$, mais il se transpose sans peine au cas des points de $\mathbf{P}^2$) :

1) u est injectif si et seulement si les r-mineurs $\varphi_0, \cdots, \varphi_r$ de A sont non tous nuls,

2) si on suppose les φ_i non tous nuls les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Les φ_i sont sans facteur commun.

ii) $\operatorname{Coker} u$ est engendré par les φ_i et c'est l'idéal saturé d'un ensemble fini $Z \subset \mathbf{P}^2$ de degré $d := \sum_{j=1}^{r} m_j^2 - \sum_{i=0}^{r} n_i^2$ (attention, *a priori*, cet ensemble peut avoir des points multiples).

Le but de ce qui suit est de prouver le théorème suivant :

1.1 Théorème. *Avec les notations précédentes, on suppose qu'on a, pour tout $i = 1, \ldots, r$, $m_i > n_i$. Alors, il existe un homomorphisme $u : E \to F$, injectif, tel que les r-mineurs de u définissent un ensemble fini Z formé de d points distincts.*

1.2 *Remarque.* Bien entendu, on a un résultat plus fort : les u convenables forment un ouvert partout dense de $\operatorname{Hom}(E, F)$.

[1] On montre facilement, voir mon problème d'examen de janvier 1994, que si l'on a des "répétitions" on peut les "simplifier" sans changer le conoyau à condition de mettre des constantes non nulles aux endroits correspondants de la matrice.

2 Un lemme

2.1 Lemme. *Soit $f \in R$ un polynôme homogène de degré p sans facteur multiple. Si g est un polynôme homogène de degré q assez général, l'intersection $V(f) \cap V(g)$ est formée de pq points distincts.*

Démonstration. Bien entendu, le mot général signifie que la propriété est vraie sur un ouvert de Zariski de R_q et on sait qu'une intersection finie de tels ouverts en est encore un.

On peut commencer par supposer que $V(g)$ est une courbe lisse, puisque c'est vrai pour g général dans R_q.

On note ensuite que si h est un facteur irréductible de f, les polynômes homogènes g de degré q qui sont multiples de h forment un sous-espace vectoriel de R_q, distinct de R_q. Le complémentaire de ce sous-espace est donc un ouvert de Zariski non vide de R_q et en prenant l'intersection des ouverts correspondant aux différents facteurs de f, on voit qu'un $V(g)$ général n'a pas de facteur commun avec f.

Comme $V(f)$ est réduit, il n'a qu'un nombre fini de points singuliers. Les g tels que $V(g)$ passe par l'un de ces points forment encore un sous-espace vectoriel strict de R_q, de sorte qu'un $V(g)$ général ne passe par aucun des points singuliers de $V(f)$.

On appelle Ω l'ouvert non vide de R_q formé des g tels que $V(g)$ est lisse, ne contient aucune composante de $V(f)$ et aucun de ses points singuliers.

En vertu du théorème de Bézout, pour avoir le résultat, il reste à montrer que le $V(g)$ associé à un g général de Ω coupe transversalement $V(f)$. Pour cela, on note C la courbe $V(f)$ privée de ses points singuliers, on considère le sous-schéma[2] W de $C \times \Omega$ formé des (m, g) tel que $V(g)$ soit tangent à C en m et on va montrer qu'il n'est pas trop gros. Pour cela, on dispose des deux projections $p_1 : W \to C$ et $p_2 : W \to \Omega$.

Montrons que les fibres de p_1 sont de codimension 2 dans Ω. Pour $m \in C$, la fibre $p_1^{-1}(m)$ est isomorphe à l'ensemble des $g \in \Omega$ tels que $V(g)$ soit tangent à C en m. Mais, dire que g est tangent à C en m signifie d'abord que $V(g)$ passe par m (ce qui définit un sous-espace vectoriel de codimension 1 de R_q), puis que $V(g)$ est tangente à C en m. La tangente à $V(g)$ en m a pour équation $x\dfrac{\partial g}{\partial X}(m) + y\dfrac{\partial g}{\partial Y}(m) + t\dfrac{\partial g}{\partial T}(m) = 0$ et il suffit d'écrire qu'elle passe par un point de la tangente à C en m, distinct de m. On obtient bien ainsi une deuxième condition linéaire indépendante de la première.

On en déduit que W est de codimension 2 dans $C \times \Omega$, donc de dimension un de moins que Ω et donc l'image de p_2 est de codimension 1 dans Ω. Un g général de Ω n'est donc pas dans l'image de p_2, donc est transverse à C, ce qui achève de prouver le lemme.

3 La preuve du théorème

On raisonne par récurrence sur r. Pour $r = 1$, on a un homomorphisme $u : R(-p-q) \to R(-p) \oplus R(-q)$ avec $0 < p \leq q$ (de sorte que la condition $m_1 > n_1$ est automatique) et les mineurs de u sont deux polynômes f, g de degrés p, q. Le lemme montre que la propriété est vraie pour des polynômes f et g généraux.

[2] Ce procédé est universel dans ce genre de situations.

Supposons le résultat établi jusqu'au rang $r-1$ et passons à r, avec $r \geq 2$. On peut écrire A sous la forme suivante : $A = \begin{pmatrix} M & B \\ C & g \end{pmatrix}$ où M est de taille $r \times (r-1)$, où B est une matrice colonne de taille r, dont les coefficients b_i sont homogènes de degrés $m_r - n_i > 0$ ($i = 0, \dots, r-1$), où C est une matrice ligne et g un polynôme de degré $m_r - n_r > 0$. Soit W le schéma défini par les r-mineurs de A.

Par l'hypothèse de récurrence, on sait qu'on peut choisir M telle que ses $r-1$-mineurs μ_i définissent un ensemble fini lisse Z. On choisit alors $C = 0$ et on calcule les r-mineurs de A. Il y a les mineurs $\mu_i g$ et le déterminant de la matrice $(M\ B)$ qui vaut $f := \sum_{i=0}^{r-1} b_i \mu_i$. On en déduit aussitôt que W est la réunion de Z et de $V(f) \cap V(g)$.

Comme Z est défini par les μ_i et qu'il est formé de points distincts c'est que les μ_i sont sans facteurs multiples. On peut alors choisir B de sorte que f n'ait pas de facteur multiple (par exemple en prenant b_1 qui n'ait pas de facteur commun avec μ_1 et les autres nuls). Si on choisit g assez général, il vérifie deux propriétés :

1) $V(g)$ ne contient aucun des points de Z,

2) $V(f) \cap V(g)$ est formé de points distincts (c'est le lemme),

et on bien a le résultat.

Au passage, on a montré le résultat suivant :

3.1 Proposition. *Soit r un entier ≥ 1. Avec les notations précédentes, on suppose qu'on a des entiers m_j, n_i avec la condition $m_j > n_j$ pour tout $j = 1, \dots, r$. On considère une matrice A de taille $r+1 \times r$ de la forme $A = \begin{pmatrix} M & B \\ 0 & g \end{pmatrix}$ où M est de taille $r \times (r-1)$, où B est une matrice colonne de taille r, dont les coefficients b_i sont homogènes de degrés $m_r - n_i > 0$ ($i = 0, \dots, r-1$), et où g est un polynôme de degré $m_r - n_r > 0$. On choisit la matrice M de telle sorte que ses $r-1$ mineurs μ_i définissent un schéma fini lisse Z et on pose $f = \sum_{i=0}^{r-1} b_i \mu_i$.*

Alors, le schéma W défini par les r-mineurs de A est la réunion disjointe de Z et de $V(f, g)$.

3.2 *Exemple.* La proposition précédente permet de décrire la composante du schéma des points de degré 12 et spécialité 1 avec la résolution $5^3, 7 \to 4^4, 6$. Dans ce cas, on a d'abord un schéma Z défini par $M : 5^3 \to 4^4$, qui est formé de 6 points génériques, puis l'intersection de $V(f)$ (degré 6) et de $V(g)$ (degré 1), donc 6 points alignés.

4 Formulation avec le caractère

Le lecteur montrera la proposition suivante :

4.1 Proposition. *Avec les notations précédentes, la condition $m_j > n_j$ pour tout $j = 1, \dots, r$ se traduit en termes du caractère γ_Z de Z en disant que γ est positif, ce qui signifie que l'on a $\gamma(n) = 0$ pour $n < 0$, $\gamma(n) = -1$ pour $n = 0, \dots, n_0 - 1$, et $\gamma(n) \geq 0$ pour $n \geq n_0$.*

4.2 *Remarque.* On vérifie que la condition de connexité du caractère (si on a $p \leq n \leq q$ avec $\gamma(p) > 0$ et $\gamma(q) > 0$ on a aussi $\gamma(n) > 0$) est équivalente à la condition $m_j > n_{j+1}$ pour tout $j = 1, \dots, r-1$.