Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski

Daniel PERRIN

1 Introduction

Ce texte reprend le thème d'un TER (Travail d'Étude et de Recherche de maîtrise) plusieurs fois posé à Orsay. Je me suis notamment appuyé sur les rédactions de Véronique Brusset, Nicolas Cons, Elsa Tavernier et Hélène Vaillant que je remercie.

2 Problématique

2.1 Quelques références

Le texte qui suit est consacré au paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski, mais il peut être intéressant de le replacer dans une problématique plus générale. On pourra pour cela consulter sur ma page web le texte d'une conférence pour les IPR donnée en 2006 sur les aires et les volumes :

`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/IPRDP1.pdf`

ou encore, sur le site *Images des mathématiques*, les deux textes que j'ai écrits sur le même sujet :

`http://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et,847`
`http://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et-725`

2.2 Aires et volumes

Tout ce qui suit tourne autour de la notion de mesure des aires et des volumes. Rappelons-en une définition (voir [10]) :

2.1 Définition. *On appelle mesure des aires si $d = 2$, des volumes si $d = 3$, une application μ non nulle, définie sur une partie $\mathcal{Q}$ de l'ensemble des parties bornées de $\mathbf{R}^d$, qui vérifie les conditions suivantes :*
1) **Additivité simple.** *Si on a une partition $E = A \cup B$ avec $E, A, B \in \mathcal{Q}$, on a $\mu(E) = \mu(A) + \mu(B)$.*
2) **Invariance par isométrie.** *Si A est dans $\mathcal{Q}$ et si g est une isométrie, alors $g(A)$ est dans $\mathcal{Q}$ et on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$.*
Il revient au même de dire que μ est invariante par découpage et recollement (avec des morceaux dans $\mathcal{Q}$).

On notera qu'on ne s'intéresse ici qu'à des mesures simplement additives, c'est-à-dire qui respectent les unions finies. On n'impose donc pas la condition de σ-additivité (comme on le fait pour la mesure de Lebesgue).

On peut résumer les problématiques les plus courantes sur le sujet en deux questions [1] :

2.2 Question. (Problème de Banach) *L'ensemble $\mathcal{Q}$ des parties que l'on peut mesurer peut-il être l'ensemble de* **toutes** *les parties bornées de $\mathbf{R}^d$ (on dit alors que μ est une mesure* **universelle***) ?*

2.3 Question. (Problème de Bolyai-Hilbert-Tarski) *Par définition d'une mesure, deux parties bornées équivalentes par découpage et recollement ont même aire ou même volume. La réciproque est-elle vraie ? Est-elle vraie au moins pour certaines parties particulières (les polygones ou les polyèdres, par exemple) ? Autrement dit, si deux parties ont même aire (resp. même volume), peut-on produire un puzzle pour passer de l'une à l'autre ?*

Il y a beaucoup de résultats concernant ces questions, par exemple le théorème de Bolyai (1830) sur le découpage des polygones, voir [10], le troisième problème de Hilbert (1900) et la réponse de Dehn sur le découpage des polyèdres, voir [3] ou [12], les résultats récents de Laczkovich sur le découpage du cercle et du carré, voir [7], [8], etc.

2.3 Notre point de départ

Le point de départ de ce texte est le difficile théorème de Banach (1923) qui répond à la question 2.2 en montrant l'existence d'une mesure universelle des parties (bornées) **du plan** :

2.4 Théorème. *Il existe une application non nulle μ simplement additive et invariante par déplacement, définie sur l'ensemble de toutes les parties bornées du* **plan** *euclidien et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$.*

Voir [1], [5] ou [13].

L'objectif de ce texte est de montrer le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski c'est-à-dire le théorème suivant :

2.5 Théorème. *Soient A et B deux parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^3$. Alors, il existe une partition de A (resp. B) en $A_1, \dots, A_n$ (resp. $B_1, \dots, B_n$) et, pour chaque i, un déplacement g_i tel que $B_i = g_i(A_i)$.*

1. Les appellations ne sont pas canoniques, mais reflètent, à mon avis, l'origine des principaux résultats.

2.6 *Remarques.* 1) Autrement dit, on peut découper A en un nombre fini [2] de morceaux (certainement pas simples !), les déplacer, et reconstituer B avec ces morceaux. Pour comprendre tout le sel de ce résultat, on pensera aux cas suivants : A est une pomme et B est la lune, A est un pain et B un millier de pains, A est une grenouille et B est un bœuf !

2) Historiquement, la preuve de ce théorème a été donnée en deux étapes. Hausdorff a démontré en 1913 le paradoxe de la sphère 3.1, voir [6], puis Banach et Tarski ont montré en 1924 le paradoxe sous la forme frappante énoncée ci-dessus, voir [2], [5] ou [14]. Eu égard à la perfection de l'énoncé de [2], certains auteurs (Guinot par exemple, voir [5]) omettent le nom de Hausdorff dans le paradoxe. Cela me semble très injuste car, à mon avis, l'idée la plus profonde lui est due.

3) Une conséquence de ce paradoxe est que l'analogue du théorème de Banach est faux dans $\mathbf{R}^3$. En effet, s'il existait une mesure universelle, les parties A_i et B_i auraient même mesure, donc aussi A et B. Autrement dit, deux parties bornées auraient toujours même mesure. Mais cela impliquerait que cette mesure est nulle. En effet, si A est une partie bornée et B la réunion disjointe de A et d'un translaté de A, on aurait $\mu(A) = \mu(B) = 2\mu(A)$, donc $\mu(A) = 0$.

3 Hausdorff ou le paradoxe de la sphère

On se place dans $\mathbf{R}^3$ muni de la métrique euclidienne usuelle pour laquelle la base $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ est orthonormée. On note $0 = (0, 0, 0)$ l'origine de $\mathbf{R}^3$ et $O^+(3) = O^+(3, \mathbf{R})$ le groupe orthogonal direct (groupes des matrices orthogonales de déterminant 1, isomorphe au groupe des rotations vectorielles de $\mathbf{R}^3$, cf. [P]). On note Id l'application identique. Le groupe $O^+(3)$ opère sur $\mathbf{R}^3$ et on notera indifféremment, pour $g \in O^+(3)$ et $x \in \mathbf{R}^3$, gx ou $g(x)$ l'image de x par g et, de même, gX ou $g(X)$ l'image d'une partie X de $\mathbf{R}^3$ par g.

3.1 Théorème. (Hausdorff, 1913) *Soit S la* **sphère** [3] *unité de* $\mathbf{R}^3$. *Il existe deux rotations a et b fixant* 0, *d'angles respectifs π et $2\pi/3$ et une partition de S en quatre ensembles X, Y, Z, T tels que :*
1) T est dénombrable,
2) on a $Y = bX$, $Z = bY = b^2X$ et $X = a(Y \cup Z)$.

2. On montre même que pour passer d'une boule de rayon 1 à deux boules de rayon 1 il suffit de 5 morceaux, voir [11] !

3. Attention, on dit bien la sphère, pas la boule.

Autrement dit X est à la fois isométrique à Y, à Z et à $Y \cup Z$, donc à son double !

La démonstration de ce théorème comporte plusieurs étapes et occupe toute cette section.

3.1 Le paradoxe de Galilée et l'axiome du choix

3.1.1 Le paradoxe de Galilée

L'idée – toute bête mais terriblement efficace – qui servira à la fois pour prouver le théorème de Hausdorff et les améliorations de Banach-Tarski est le fait que $\mathbf{N}$ est en bijection avec $\mathbf{N} - \{0\}$ par $n \mapsto n + 1$.

3.2 *Remarque.* J'appelle paradoxe de Galilée cette remarque. Ce n'est pas tout à fait exact. En fait, ce que Galilée a noté, c'est qu'il y a autant de carrés d'entiers que d'entiers, et c'est un paradoxe puisque les carrés ne sont qu'une petite partie des entiers. Mais on voit bien que c'est le même genre de paradoxe apparent, comme on en rencontre beaucoup dans la théorie des cardinaux infinis.

3.1.2 L'axiome du choix

Cet axiome d'apparence anodine va se révéler décisif ici. Voici la forme qui nous sera utile :

3.3 Axiome. *Soit S un ensemble, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(S)$ un ensemble de parties non vides de S. Alors, il existe une application $f : \mathcal{I} \to S$ qui associe à chaque $A \in \mathcal{I}$ un élément de A.*

Autrement dit, si l'on a un ensemble de parties non vides de S, on peut **choisir** dans chaque partie A un élément $f(A)$.

3.4 Commentaire. Les débats autour de l'axiome du choix ont été très vifs entre les mathématiciens [4] du début du XX-ième siècle, notamment en raison du paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski qui défie vraiment l'imagination. On peut d'ailleurs tout à fait faire des mathématiques sans cet axiome. Le lecteur méditera cependant le résultat suivant de Dougherty et Foreman (cf. [4]), qui ne nécessite pas l'axiome du choix : *Si A et B sont deux ouverts bornés non vides de $\mathbf{R}^3$, ils sont "presque équivalents" au sens suivant : il existe des ouverts disjoints $A_1, \dots, A_n$ (resp. $B_1, \dots, B_n$) de A (resp. de B) et des isométries u_i de A_i sur B_i tels que $A_1 \cup \dots \cup A_n$ (resp. $B_1 \cup \dots \cup B_n$)*

4. Les intuitionnistes, Brouwer par exemple, refusaient cet axiome.

soit partout dense dans A (resp. dans B). Pour reprendre la métaphore de la pomme et de la lune, on peut trouver un découpage qui passe de l'une à l'autre en ne laissant dans chacune qu'un trognon d'intérieur vide !

3.2 Les rotations

Voilà les rotations a et b proposées par Hausdorff :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3.5 Proposition. *Les applications a et b sont des rotations vectorielles de $\mathbf{R}^3$. La rotation a est d'axe $e_1 + e_2$ et d'angle π, donc d'ordre 2. La rotation b est d'axe e_1 et d'angle $-2\pi/3$, donc d'ordre 3.*

Démonstration. Le résultat est évident pour b. Comme a échange e_1 et e_2 et change e_3 en son opposé, elle transforme la base canonique en une base orthonormée. C'est donc une isométrie, de déterminant 1, donc une rotation. Comme elle est involutive, c'est un demi-tour et son axe est $e_1 + e_2$ (car il est fixe par a).

3.3 Le groupe

On considère le sous-groupe $G \subset O^+(3)$ engendré par a et b. On montre le lemme crucial suivant :

3.6 Lemme. *Tout élément r de G, distinct de* Id *et de a s'écrit, de manière unique, sous la forme canonique suivante :*

$$r = a^{\epsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \cdots a b^{n_{k-1}} a b^{n_k} a^{\epsilon_2}$$

avec $k \in \mathbf{N}^*$, $\epsilon_i = 0$ ou 1 et $n_j = 1$ ou 2. Autrement dit, tout élément de G s'écrit de manière unique comme un **mot**[5] *écrit avec l'alphabet a, b et les relations $a^2 = b^3 = \mathrm{Id}$.*

3.7 *Remarque.* On peut faire rentrer Id et a dans l'écriture canonique en autorisant k à valoir 0 et en imposant $\epsilon_2 = 0$ dans ce cas, de sorte qu'il ne reste que a^{ϵ_1} avec $\epsilon_1 = 0$ ou 1. On appelle alors **longueur** du mot le nombre de monômes non triviaux, c'est-à-dire 0 pour Id, 1 pour a et $2k - 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2$ si $k \geq 1$.

Démonstration. Comme on a $a^2 = b^3 = \mathrm{Id}$, les éléments de G (autres que l'identité) sont des produits de a, b, b^2. Il en résulte que G contient tous les éléments cités.

5. Éventuellement vide ou réduit à a.

3.3.1 Existence

Comme G est le plus petit sous-groupe de $O^+(3)$ contenant a et b, on aura prouvé l'existence de l'écriture si l'on montre que les mots du type annoncé forment un groupe. Pour cela on considère deux mots r, r' et il s'agit de montrer que rr' et r^{-1} sont encore des mots. Le cas où r ou r' est égal à Id ou a est évident et on peut supposer qu'on a :

$$r = a^{\epsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \cdots a b^{n_{k-1}} a b^{n_k} a^{\epsilon_2} \text{ et } r' = a^{\epsilon'_1} b^{n'_1} a b^{n'_2} a \cdots a b^{n'_{k'-1}} a b^{n'_{k'}} a^{\epsilon'_2}$$

avec $k, k' \geq 1$ et il faut montrer que le produit rr' et l'inverse r^{-1} sont de la même forme.

Pour l'inverse c'est évident car on a $r^{-1} = a^{\epsilon_2} b^{2n_k} a b^{2n_{k-1}} a \cdots a b^{2n_2} a b^{2n_1} a^{\epsilon_1}$ où les $2n_i$ sont pris modulo 3, et cet élément est bien de la même forme. Pour le composé, le résultat est clair si ϵ_2 et ϵ'_1 sont distincts car le produit est le mot obtenu en mettant bout à bout les deux autres. S'ils sont égaux, il y a une difficulté car le produit $a^{\epsilon_2} a^{\epsilon'_1}$ donne Id et il y a simplification de certains termes. Supposons par exemple $k \leq k'$. Il y a deux cas :

• Ou bien il existe $i \in [0, k-1]$ tel que $n_{k-i} + n'_{i+1} \not\equiv 0 \pmod 3$. Si i est le plus grand entier vérifiant cela, on a :

$$rr' = a^{\epsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \cdots a b^{n_{k-i-1}} a b^{n_{k-i} + n'_{i+1}} a b^{n'_{i+2}} a \cdots b^{n'_k} a^{\epsilon'_2}$$

qui est de la forme voulue.

• Ou bien on a $n_{k-i} + n'_{i+1} \equiv 0 \pmod 3$ pour tout $i \in [0, k-1]$. Il reste alors :

$$rr' = a^{\epsilon_1} a b^{n'_{k+1}} a \cdots b^{n'_{k'}} a^{\epsilon'_2}$$

et l'élément est encore de la forme voulue.

3.3.2 Unicité

Pour prouver l'unicité, on aura besoin du lemme suivant :

3.8 Lemme. *Tout produit $c = b^{n_1} a \cdots b^{n_k} a$ avec $k \geq 1$ et $n_i = 1$ ou 2 est de la forme :*

$$c = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3\sqrt{3} \\ q_1 & p_4 & q_2\sqrt{3} \\ q_3\sqrt{3} & p_5\sqrt{3} & q_4 \end{pmatrix}$$

avec $p_i, q_i \in \mathbf{Z}$, p_i pair et q_i impair. Un tel c ne peut être égal à Id *ou a.*

Démonstration. (du lemme) On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$ on a bien :

$$ba = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b^2a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'hérédité de la propriété se montre en multipliant un terme de type c relatif à k par ba ou b^2a. C'est un calcul sans malice.

On voit qu'à cause du terme $q_3\sqrt{3}$, avec q_3 impair, un tel c ne peut être égal ni à a ni à Id.

On peut maintenant prouver l'unicité. Supposons qu'il existe un élément $r \in G$ avec deux écritures distinctes (que l'on prend sous la forme généralisée évoquée dans 3.7) :

$$r = a^{\epsilon_1}b^{n_1}ab^{n_2}a\cdots ab^{n_{k-1}}ab^{n_k}a^{\epsilon_2} = a^{\epsilon'_1}b^{n'_1}ab^{n'_2}a\cdots ab^{n'_{k'-1}}ab^{n'_{k'}}a^{\epsilon'_2}.$$

On peut supposer $k \leq k'$ et on prend un tel r de longueur l minimale au sens de 3.7. Si $l = 0$ on a $r = \mathrm{Id}$. Si k' est ≥ 1, on a une contradiction avec 3.8. Si $k' = 0$, on a $\epsilon'_2 = 0$ par convention et alors ϵ'_1 est nul lui aussi. Si $l \geq 1$, l'hypothèse de minimalité impose $\epsilon_2 \neq \epsilon'_2$, donc $\epsilon_2 + \epsilon'_2 = 1$ et donc

$$\mathrm{Id} = rr^{-1} = a^{\epsilon_1}b^{n_1}ab^{n_2}a\cdots ab^{n_{k-1}}ab^{n_k}a^{\epsilon_2+\epsilon'_2}b^{2n'_{k'}}a\cdots ab^{2n'_1}a^{\epsilon'_1}$$

ou encore :

$$b^{n_1}ab^{n_2}a\cdots ab^{n_{k-1}}ab^{n_k}a^{\epsilon_2+\epsilon'_2}b^{2n'_{k'}}a\cdots ab^{2n'_1}a = a^{\epsilon_1+\epsilon'_1+1}$$

et ce produit vaut donc a ou Id. Mais cela contredit encore le lemme 3.8.

3.9 Corollaire. *Le groupe G est dénombrable.*

Démonstration. Il s'agit d'envoyer G dans $\mathbf{N}$ par une application injective Φ. Pour cela on note 2, 3, $p_1 = 5$, $p_2 = 7$, ..., p_k, ... les nombres premiers et on définit $\Phi(\mathrm{Id}) = 0$, $\Phi(a) = 1$ et, pour $k \geq 1$:

$$\Phi(a^{\epsilon_1}b^{n_1}ab^{n_2}a\cdots ab^{n_{k-1}}ab^{n_k}a^{\epsilon_2}) = 2^{\epsilon_1}3^{\epsilon_2}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}.$$

L'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans $\mathbf{N}$ montre que Φ est injective.

3.4 Le découpage du groupe

C'est le point essentiel de la preuve du théorème de Hausdorff. L'objectif est de partager G en trois parties **disjointes** : $G = A \cup B \cup C$ vérifiant $B = bA$, $C = bB = b^2A$ et $A = a(B \cup C)$.

Pour cela, on écrit G comme union **disjointe** : $G = A_0 \cup B_0 \cup C_0 \cup \{\mathrm{Id}\}$ où A_0 est la partie formée par les mots commençant par a (c'est-à-dire a ou les mots vérifiant $\epsilon_1 = 1$), B_0 celle formée par les mots commençant par b (donc vérifiant $\epsilon_1 = 0$ et $n_1 = 1$) et C_0 celle formée par les mots commençant par b^2 (donc vérifiant $\epsilon_1 = 0$ et $n_1 = 2$).

On vérifie sans peine le lemme suivant :

3.10 Lemme. *On a les formules suivantes :* $C_0 = bB_0$, $B_0 = b^2C_0$, $bA_0 = B_0 - \{b\}$, $b^2A_0 = C_0 - \{b^2\}$, $a(B_0 \cup C_0) = A_0 - \{a\}$.

Cela ressemble beaucoup à ce qu'on cherche, mais il y a quelques éléments récalcitrants : a, b, b^2, Id qu'il faut faire rentrer dans le rang. L'idée fondamentale pour cela est d'utiliser le paradoxe de Galilée 3.1.1 qui permet de rajouter un élément à un ensemble infini sans en changer le cardinal.

Pour appliquer ce paradoxe, il faut disposer dans G d'un ensemble qui ressemble à $\mathbf{N}$ et il suffit pour cela de trouver un élément d'ordre infini. Le plus simple est b^2a (c'est une conséquence du lemme 3.8). On appelle alors N (comme $\mathbf{N}$!) le "monoïde" engendré :

$$N = \{\mathrm{Id}, b^2a, (b^2a)^2, (b^2a)^3, \dots, (b^2a)^n, \dots\}.$$

On commence par placer N par rapport à A_0, B_0, C_0 : on voit que $N - \{\mathrm{Id}\}$ est contenu dans C_0, aN dans A_0 et baN dans B_0, ce qui prouve que ces ensembles sont disjoints. Les autres produits obtenus à partir de N sont presque égaux à ceux-là, à ceci près qu'ils permettent de rajouter des éléments selon l'idée vue ci-dessus. Précisément, le paradoxe de Galilée donne $b^2aN = N - \{\mathrm{Id}\}$ ou, inversement, $ab(N - \{\mathrm{Id}\}) = N$: voilà comment rajouter Id à $N - \{\mathrm{Id}\}$. De même, pour ajouter b on note que l'on a $bN = aN \cup \{b\}$ et pour ajouter b^2 que l'on a $b^2N = baN \cup \{b^2\}$.

Pour mettre en œuvre cette idée, on commence par enlever les sous-ensembles $N - \{\mathrm{Id}\}, aN$ et baN à A_0, B_0, C_0 : on pose $A' = A_0 - aN$, $B' = B_0 - baN$ et $C' = C_0 - b^2aN = C_0 - (N - \{\mathrm{Id}\})$, avec l'idée de les redistribuer autrement. Par exemple, on a $bA' = B' - \{b\}$, de sorte qu'il manque toujours b dans bA'. Pour le rajouter, on voudrait utiliser la formule $bN = aN \cup \{b\}$, mais pour cela, il faut avoir mis N dans A et aN dans B. Cela nous conduit à poser :

$$A = A' \cup N, \quad B = B' \cup aN, \quad \text{et} \quad C = C' \cup baN$$

(toutes ces unions sont disjointes car A_0, B_0 et C_0 le sont) et la proposition suivante montre qu'on a gagné :

3.11 Proposition. *Les parties A, B, C forment une partition de G et l'on a $B = bA$, $C = bB = b^2A$ et $A = a(B \cup C)$.*

Démonstration. On vérifie aussitôt qu'on a bien une partition. Pour le reste, il suffit d'appliquer les formules précédentes en notant que si g est dans le groupe et si X, Y en sont des parties, comme la multiplication par g est bijective, les formules $g(X - Y) = gX - gY$ et $g(X \cup Y) = gX \cup gY$ sont valides.

On a d'abord $A = A_0 - aN \cup N$, donc $bA = bA_0 - baN \cup bN = B_0 - \{b\} - baN \cup aN \cup \{b\} = B' \cup aN = B$.

On a ensuite $bB = b(B_0 - baN \cup aN) = bB_0 - b^2aN \cup baN = C_0 - b^2aN \cup baN = C' \cup baN = C$.

On a enfin, $a(B \cup C) = a(B_0 - baN \cup aN \cup C_0 - (N - \{\mathrm{Id}\}) \cup baN) = aB_0 - abaN \cup N \cup aC_0 - (aN - \{a\}) \cup abaN$. En tenant compte de la formule donnant $a(B_0 \cup C_0)$ et des simplifications des termes $abaN$ et $\{a\}$, on trouve $a(B \cup C) = A_0 - aN \cup N = A$ comme attendu.

3.5 Le découpage de la sphère

Il est maintenant facile de prouver 3.1. On fait opérer le groupe G sur la sphère S. Il y a deux sortes de points $x \in S$. Ceux (disons de type 1) qui sont sur les axes des éléments $g \in G - \{\mathrm{Id}\}$. Comme une rotation non triviale a deux points de la sphère sur son axe, ces points sont en nombre dénombrable (car G est dénombrable) : on appelle T cet ensemble. Les autres (de type 2) vérifient donc $g(x) \neq x$ pour tout $g \in G - \{\mathrm{Id}\}$. L'orbite de x, $\omega(x)$ est alors en bijection avec G par l'application $g \mapsto gx$. En effet, si l'on avait $gx = hx$ avec $g \neq h$, x serait sur l'axe de gh^{-1}. Les orbites des points de type 2 forment une partition de $S - T$. L'application de l'axiome du choix à l'ensemble $\mathcal{I}$ des orbites des points de type 2 permet de choisir ainsi un point dans chaque orbite, c'est-à-dire d'avoir une application $f : \mathcal{I} \to S$ qui à toute orbite associe un point de cette orbite. On appelle E l'image de f. C'est une partie de S qui contient un point et un seul de chaque orbite des points de type 2. Si on pose $X = AE = \{g(x) \mid g \in A \text{ et } x \in E\}$, et de même $Y = BE$, $Z = CE$, la proposition 3.11 montre qu'on a le découpage cherché. En effet, montrons par exemple $Y = bX$. Soit $x \in X$. Il s'écrit $x = ge$ avec $g \in A$ et $e \in E$, donc bx s'écrit bge et comme $bA = B$, bg est dans B, donc bge dans Y. Inversement, si y est dans Y, il s'écrit he avec $h \in B$ et $e \in E$. Mais, on a $B = bA$, donc h s'écrit $h = bg$ avec $g \in A$, de sorte que $y = b(ge)$ appartient à bX.

Les autres égalités sont tout aussi faciles à prouver.

4 Banach-Tarski, suite et fin

4.1 Généralités sur le découpage

4.1.1 Définition

4.1 Définition. *Soient X, Y deux parties de $\mathbf{R}^3$. On dit que X et Y sont* **équidécomposables** *(ou encore équivalentes par découpage et recollement) s'il existe des* **partitions** $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ *et* $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n$ *telles que, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe un déplacement f_i de $\mathbf{R}^3$ qui vérifie $f_i(X_i) = Y_i$. On note alors $X \sim Y$.*

Ce qu'affirme le paradoxe d'Hausdorff-Banach-Tarski c'est que deux parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^3$ sont équivalentes.

On prouve d'abord trois résultats préliminaires.

4.1.2 Relation d'équivalence

4.2 Proposition. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Seule la transitivité n'est pas évidente. On suppose qu'on a $X \sim Y$ et $Y \sim Z$ et il s'agit de montrer qu'on a $X \sim Z$. Pour cela on considère les découpages de X, Y : $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$ et $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_m$ avec X_i et Y_i directement isométriques par f_i et ceux de Y, Z : $Y = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ et $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$ avec T_j et Z_j directement isométriques par g_j. Il faut alors "découper[6] les découpages", et pour cela on pose $S_{ij} = Y_i \cap T_j$. Il est clair que Y est réunion disjointe des S_{ij}, X des $X_{ij} = f_i^{-1}(S_{ij})$ et Z des $Z_{ij} = g_j(S_{ij})$ et l'on passe de X_{ij} à Z_{ij} par $g_j \circ f_i$.

4.1.3 Additivité

La propriété suivante est évidente :

4.3 Proposition. *Si on a $X \sim X'$ et $Y \sim Y'$ avec X, Y (resp. X', Y') disjoints, on a $X \cup Y \sim X' \cup Y'$.*

6. Comme d'autres, jadis, parlaient de terroriser les terroristes.

4.1.4 La variante découpage de Cantor-Bernstein

En revanche, la propriété suivante est plus délicate :

4.4 Proposition. *Si on a $Y' \subset X$ et $X' \subset Y$ avec $X \sim X'$ et $Y \sim Y'$, on a aussi $X \sim Y$.*

Démonstration. Commençons par énoncer et démontrer le "vrai" théorème de Cantor-Bernstein.

4.5 Théorème. *Soient X, Y des ensembles et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ des applications injectives. Alors il existe une bijection de X sur Y.*

Démonstration. On pose $X' = f(X) \subset Y$ et $Y' = g(Y) \subset X$, de sorte que f et g induisent des bijections de X sur X' et de Y sur Y' respectivement [7].

On considère l'inverse de g sur Y', $g^{-1} : Y' \to Y$. On pose $A_0 = X - Y'$ (les points de X qui ne sont pas dans l'image de g) et, pour $n \geq 1$, $A_n = (g \circ f)^n(A_0)$, puis $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ et enfin $B = X - A$. On a donc $X = A \cup B$ (union disjointe) et on note que B ne rencontre pas $A_0 \subset A$, donc est contenu dans l'image Y' de g (de sorte que g^{-1} est définie sur B), et que A est stable par $g \circ f$.

On a alors le lemme suivant :

4.6 Lemme. *On a $Y = f(A) \cup g^{-1}(B)$ et cette union est disjointe.*

Démonstration. (du lemme) Montrons d'abord que $f(A) \cap g^{-1}(B)$ est vide. Sinon, on a $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f(a) = g^{-1}(b)$ donc $g \circ f(a) = b$. Mais, comme A est stable par $g \circ f$, cela impose que b est dans A et cela contredit le fait que A et B sont disjoints.

Montrons ensuite que l'union est égale à Y. Soit $y \in Y$ et posons $x = g(y)$. Si x est dans B, y est dans $g^{-1}(B)$ et on a fini. Sinon, x est dans A donc s'écrit $(g \circ f)^n(x_0)$ avec $x_0 \in A_0$ et $n \geq 1$ (car x, qui est dans l'image de g, n'est pas dans A_0). On en déduit, par l'injectivité de g, qu'on a $y = f(g \circ f)^{n-1}(x_0)$ et, comme $x' = (g \circ f)^{n-1}(x_0)$ est dans A en vertu de la stabilité de A par $g \circ f$, on voit que y est dans $f(A)$.

On obtient alors une bijection u de X sur Y en mettant ensemble les bijections f de A sur $f(A)$ et g^{-1} de B sur $g^{-1}(B)$.

Venons-en à la variante de découpage 4.4.

Les hypothèses permettent d'écrire $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ et $X' = \bigcup_{i=1}^{m} X'_i$ avec des parties disjointes et, pour chaque i, un déplacement f_i qui envoie X_i sur X'_i. De même, on a $Y = \bigcup_{j=1}^{n} Y_j$ et $Y' = \bigcup_{j=1}^{n} Y'_j$ et des déplacements g_j

7. On voit ici l'analogie avec 4.4.

qui envoient les Y_j sur les Y'_j. On appelle respectivement f et g les bijections de X sur X' et de Y sur Y' obtenues en mettant ensemble les f_i ou les g_j. On pose, comme dans la preuve de 4.5, $A_0 = X - Y'$ et, pour $n \geq 1$, $A_n = (g \circ f)^n(A_0)$, puis $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ et enfin $B = X - A$. On a encore les unions disjointes $X = A \cup B$ et $Y = f(A) \cup g(B)$ de 4.6 et les bijections f et g^{-1} donnent des équivalences $A \sim f(A)$ et $B \sim g^{-1}(B)$ (il suffit de considérer leurs restrictions aux traces sur A et B des X_i et des Y'_j respectivement). On conclut alors par 4.3.

4.2 Un découpage de Hausdorff pour la boule

Le découpage de Hausdorff s'étend sans difficulté à la boule en attachant les rayons aux points de la sphère. Il faut simplement regarder ce que devient l'ensemble dénombrable T. Je propose de l'imaginer comme un hérisson avec les piquants à l'intérieur !

4.7 Définition. *Soit S une sphère de centre o. On appelle* **hérisson** *de S une réunion dénombrable de segments semi-ouverts $]o, s]$, de même origine o et dont les extrémités sont situées sur S.*

4.8 Corollaire. *Soit B (resp. S) la* **boule** *(resp. la sphère) unité fermée de $\mathbf{R}^3$. Il existe deux rotations a et b fixant 0 et une partition de B en cinq ensembles $\{0\}, \widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}, \widehat{T}$ tels que :*
1) $\widehat{T}$ est un hérisson de S,
2) on a $\widehat{Y} = b\widehat{X}$, $\widehat{Z} = b\widehat{Y}$ et $\widehat{X} = a(\widehat{Y} \cup \widehat{Z})$.

La même propriété est vraie pour une boule fermée quelconque.

Démonstration. On reprend le découpage de Hausdorff avec X, Y, Z, T et on pose $\widehat{X} = \bigcup_{s \in X}]0, s]$, et de même pour $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ et $\widehat{T}$. Comme $g(]0, s]) =]0, g(s)]$ pour tout $g \in G$ et tout $s \in S$, on a évidemment le résultat.

Si B' est une boule fermée quelconque, de centre o, il existe une similitude directe σ qui envoie B sur B' en envoyant 0 sur o. Les images par σ du découpage de B fournissent le découpage de B' avec les rotations $a' = \sigma a \sigma^{-1}$ et $b' = \sigma b \sigma^{-1}$.

4.3 Trois boules ou presque

4.9 Corollaire. *Soient B, B', B'' trois boules fermées de même rayon, de centres o, o', o'' et S, S', S' les sphères associées. On suppose B' et B'' disjointes. Il existe des hérissons T, T', T'' de S, S', S'' respectivement tels que l'on ait $B - T - \{o\} \sim (B' - T' - \{o'\}) \cup (B'' - T'' - \{o''\})$.*

Démonstration. Le corollaire 4.8 fournit un découpage de B par des ensembles X, Y, Z, T où T est un hérisson : $B - T - \{o\} = X \cup Y \cup Z$ et ce découpage est relatif à des rotations a, b conservant B c'est-à-dire qu'on a $Y = bX$, $Z = bY$ et $X = a(Y \cup Z)$.

Il existe une translation t' (resp. t'') qui envoie B sur B' (resp. B''). On appelle X', Y', Z', T' (resp. X'', Y'', Z'', T'') les images de X, Y, Z, T par ces translations Alors, on a $Y' = b'X'$, $Z' = b'Y'$ et $a'(Y' \cup Z')$ avec $a' = t'at'^{-1}$ et $b' = t'bt'^{-1}$, et de même sur B''. Comme les translations envoient o sur o' et o'', les conjugués a' et b' sont bien des rotations conservant B'. De plus, T' et T'' sont des hérissons. On voit que les neuf ensembles $X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ sont directement isométriques et chacun est isométrique à la réunion de deux autres. Cela donne l'équivalence voulue : $X \sim (Y \cup Z) \sim (X' \cup X'')$ et de même $Y \sim Y' \cup Y''$ et $Z \sim Z' \cup Z''$, donc $X \cup Y \cup Z \sim (X' \cup Y' \cup Z') \cup (X'' \cup Y'' \cup Z'')$ par 4.3.

4.4 Élimination des hérissons

Le point fondamental est un tour de magie qui permet de faire disparaître un lapin, un hérisson (ou une partie d'un ensemble) et qui repose encore sur le paradoxe de Galilée 3.1.1, c'est-à-dire le fait que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N} - \{0\}$ c'est pareil.

4.10 Lemme. *Soit $B \in \mathbf{R}^3$ une partie et $M \subset B$. On suppose qu'il existe un déplacement r tel que $r(B) = B$ et tel que M ne rencontre aucun des $r^p(M)$ pour $p > 0$. Alors on a $B \sim B - M$.*

Démonstration. On pose $E = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} r^p(M)$. C'est une partie de B et on a $r(E) = \bigcup_{p \in \mathbf{N}^*} r^p(M)$. On a aussi $r(E) = E - M$. En effet, il est clair que $r(E)$ est inclus dans E et, par hypothèse il ne rencontre pas M. On a donc $r(E) \subset E - M$. Inversement, si x est dans $E - M$, c'est un $r^p(y)$ pour $y \in M$ et p est nécessairement positif puisque x n'est pas dans M, donc x est dans $r(E)$.

On écrit alors $B = (B - E) \cup E$ et $B - M = (B - E) \cup (E - M)$ et ces ensembles sont équivalents car on passe de $B - E$ à $B - E$ par l'identité et de E à $E - M = r(E)$ par le déplacement r.

4.11 Corollaire. *Soit B une boule fermée de centre o et de rayon > 0 et x un point de B. On a $B \sim B - \{x\}$.*

Démonstration. Soit S la sphère frontière de B et s un point de S. On montre d'abord qu'on a $B - \{s\} \sim B$. Pour cela, on choisit une rotation r d'axe passant par o mais pas par s et d'ordre infini. Alors, si l'on pose $M = \{s\}$, M ne rencontre pas les $r^p(M)$ pour $p > 0$. En effet, sinon, on aurait $s = r^p(s)$, donc s serait un point fixe de r^p, donc un point de l'axe de r^p (qui est aussi celui de r) et c'est exclu. Le résultat vient alors de 4.10.

Passons au cas général où x n'est pas sur S. On choisit $s \in S$ et on découpe $B - \{x\} = (B - \{x, s\}) \cup \{s\}$ et $B - \{s\} = (B - \{x, s\}) \cup \{x\}$. On en déduit que $B - \{x\}$ et $B - \{s\}$ sont équivalents et on conclut avec le premier cas et la transitivité 4.2.

4.12 Corollaire. *1) Soient B, B', B'' trois boules fermées de même rayon positif, avec B', B'' disjointes. Alors, on a $B \sim B' \cup B''$.*

2) Plus généralement, si $B, B_1, \dots, B_n$ sont des boules fermées de même rayon positif, et si $B_1, \dots, B_n$ sont disjointes, on a $B \sim B_1 \cup \dots \cup B_n$.

Démonstration. 1) En vertu de 4.9, il suffit de montrer qu'on a $B \sim B - T - \{o\}$. On sait déjà qu'on a $B \sim B - \{o\}$ d'après 4.11. Par ailleurs, on a le lemme suivant :

4.13 Lemme. *Si B est une boule fermée de centre o et si T est un hérisson de B, il existe une rotation r de centre o telle que T ne rencontre aucun des ensembles $r^p(T)$ pour $p > 0$.*

Démonstration. Notons S la sphère frontière de B. Comme r est de centre o, si les hérissons T et $r^p(T)$ se rencontrent, ils ont en commun tout un "piquant" du hérisson, donc un point de S. Il existe alors $x, y \in T \cap S$ tel que $y = r^p(x)$. Or, $T \cap S$ est dénombrable, ainsi que son symétrique U par rapport à o, et donc il existe un point $z \in S$ qui n'appartienne ni à $S \cap T$, ni à U. On considère alors l'ensemble (non dénombrable) R des rotations de centre o et d'axe défini par z. Ces rotations ne fixent aucun point de $S \cap T$. Pour $x, y \in S$ donnés et différents de z et de $\sigma_o(z)$, il y a au plus une rotation de R qui envoie x sur y. Comme $S \cap T$ est dénombrable, il y a en tout un nombre dénombrable de rotations de R qui envoient un point de $S \cap T$ sur un autre et leurs angles θ_n sont donc en nombre dénombrable, ainsi que les θ_n/p pour $p \in \mathbf{N}^*$. Si on choisit une rotation $r \in R$ dont l'angle est en dehors de cet ensemble dénombrable, on a la propriété annoncée dans le lemme.

On peut alors appliquer 4.10 avec $B - \{o\}$, T et r et on en déduit qu'on a $B - \{o\} \sim B - \{o\} - T$.

Le point 2) se prouve par récurrence sur n, l'initialisation au cas $n = 2$ étant le point 1). Pour passer de n à $n + 1$ on utilise encore le point 1) pour affirmer qu'on a $B_n \sim B_n \cup B_{n+1}$ et on conclut par 4.3.

4.5 Conclusion

On peut maintenant finir de prouver le théorème 2.5. Soient X, Y deux parties bornées d'intérieur non vide. On peut trouver deux boules fermées

$B_X \subset X$ et $B_Y \subset Y$, que l'on peut supposer de même rayon > 0. Grâce à la transitivité 4.2, il suffit de montrer que si B est une boule fermée de rayon R contenue dans X on a $B \sim X$. Pour cela on recouvre X par un nombre fini de boules fermées $B_1, \dots, B_n$ de rayon R (c'est possible car $\overline{X}$ est compact). On pose $X_1 = X \cap B_1$, $X_2 = (X \cap B_2) - X_1$, ..., $X_n = (X \cap B_n) - (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{n-1})$. On a alors $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ et cette union est disjointe. De plus, chaque X_i est contenu dans B_i. On considère ensuite n boules $B'_1, \dots, B'_n$, toujours de même rayon, mais disjointes. Pour chaque i on a une translation t_i de B_i sur B'_i et on pose $X'_i = t_i(X_i)$. Il est clair qu'on a $X = \bigcup_{i=1}^n X_i \sim X' := \bigcup_{i=1}^n X'_i \subset \bigcup_{i=1}^n B'_i := U$. Mais, on sait que B_X est équivalent à $U = \bigcup_{i=1}^n B'_i$ en vertu de 4.12. On a donc $B_X \subset X$ et $X' \subset U$ avec $B_X \sim U$ et $X \sim X'$. On en déduit $X \sim U$ par 4.4, donc aussi $B_X \sim X$ par transitivité.

4.6 Variante pour l'éradication des hérissons 4.13

On montre successivement les résultats suivants.

4.14 Lemme. *Soient (a_n, b_n) un nombre dénombrable de points de $\mathbf{R}^2$ distincts de l'origine. Il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a_n x + b_n y \neq 0$.*

Démonstration. Les intersections des droites $a_n x + b_n y = 0$ avec le cercle unité sont en nombre dénombrable, donc ne le recouvrent pas.

4.15 Lemme. *Soient (e_n) un nombre dénombrable de vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^3$. Il existe un vecteur non nul w qui ne soit orthogonal à aucun des e_n.*

Démonstration. Quitte à changer de repère on peut supposer qu'aucun des e_n n'est colinéaire à l'axe des z. On écrit alors $e_n = (a_n, b_n, c_n)$ avec $(a_n, b_n) \neq (0, 0)$. Le lemme précédent donne un (x, y) tels que $a_n x + b_n y \neq 0$ pour tout n et on pose $w = (x, y, 0)$.

4.16 Lemme. *Soient $x, y \in S$ (sphère de centre o). Si une rotation r de centre o et d'axe défini par $w \neq 0$ envoie x sur y on a $(x - y|w) = 0$.*

Démonstration. En effet, on a $(x|w) = (rx|rw) = (y|w)$.

On peut alors montrer que si T est une partie dénombrable de S il existe une rotation r telle que, pour tous $x, y \in T$ distincts et tout $n \in \mathbf{N}$, $r^n x \neq y$. Pour cela on considère les vecteurs non nuls $x - y$ pour $x, y \in T$. Ils sont en nombre dénombrable. On peut donc trouver un vecteur $w \in S$ qui n'est orthogonal à aucun d'eux en vertu de 4.15 et 4.16 montre alors qu'aucune rotation d'axe (ow) ne transforme un x en un y.

Références

[1] Banach S., *Sur le problème de la mesure*, Fond. Math. 4, 1923, p. 7-33, ou Banach, œuvres complètes.

[2] Banach S., Tarski A., *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fond. Math. 6, 1924, p. 244-277, ou Banach, œuvres complètes.

[3] Cartier P., *Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 1984-85, numéro 646.

[4] Dougherty R. et Foreman M., *The Banach-Tarski paradox using pieces with the property of Baire*, Proc. Nat. Acad. Sci. 89 (1992), p. 10726-28.

[5] Guinot M., *Le paradoxe de Banach-Tarski*, Aleas, Lyon (1991).

[6] Hausdorff F., *Bemerkung über den Inhalt den Punktmengen*, Math. Ann., 75, 1914, p. 23-28.

[7] Laczkovich M., *Equidecomposability and discrepancy ; a solution of Tarski's circle-squaring problem*, J. reine angew. Math. 404, 1990, p. 77-117.

[8] Laczkovich M., *Paradoxical Decompositions : A Survey of Recent Results*, European Congress of Mathematics, Vol. II, Progress in Math. 120, Birkhaüser, Basel, 1994.

[9] Perrin D., *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[10] Perrin D., *Mathématiques d'École*, Cassini, 2011.

[11] Robinson R.M., *On the decomposition of spheres*, Fund. Math. 34, 1947, p. 246-260.

[12] Sydler J.-P., *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment. Math. Helv., 40, 1965, p. 43-80.

[13] Von Neumann J., *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fund. Math. 13, 1929, p. 73-116.

[14] Wagon S., *The Banach-Tarski paradox*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 24, Cambridge, 1985.