Les réciproques en géométrie

Daniel PERRIN

1 Le principe

Lorsqu'on pratique la géométrie, on se rend compte très vite que les réciproques y sont, en général, très faciles. Il suffit en effet d'un raisonnement par l'absurde et d'une application du sens direct pour les établir. J'essaie ici de dégager [1] les propriétés qui justifient ce fait.

1.1 La question et une réponse triviale

Rappelons que lorsqu'on a un ensemble X, une propriété $\mathcal{P}$ des éléments de X n'est rien d'autre qu'une partie $\mathcal{P} \subset X$, celle formée des éléments qui vérifient $\mathcal{P}$. Les expressions suivantes sont donc synonymes : $x \in \mathcal{P}$, x vérifie $\mathcal{P}$, on a la propriété $\mathcal{P}(x)$.

Le problème est alors le suivant :

1.1 Question. *Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. On considère deux propriétés, l'une $\mathcal{P} \subset X$, l'autre $\mathcal{Q} \subset Y$. On suppose qu'on a prouvé l'implication $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{Q}$, c'est-à-dire, en termes de propriétés, $\forall x \in X,\ \mathcal{P}(x) \Longrightarrow \mathcal{Q}(f(x))$. La question est celle de la réciproque : $f^{-1}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{P}$, ou encore $\forall y \in Y$, $\forall x \in X$ tel que $f(x) = y$, $\mathcal{Q}(y) \Longrightarrow \mathcal{P}(x)$?*

1.2 Commentaire. Il faut comprendre ici l'application f comme un procédé permettant de passer d'une situation à une autre, par exemple, une construction géométrique. Voici un exemple type : on se donne un triangle ABC et un point B' de $[AB]$. L'ensemble X est formé des droites d passant par B' (non parallèles à (AC)), l'ensemble Y est la droite (AC) et l'application f associe à d son intersection C' avec (AC). La question est de comparer les propriétés de d et celles de C'.

1.3 *Remarque.* Attention, ce qui est évident à partir de $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{Q}$ c'est $\mathcal{P} \subset f^{-1}(\mathcal{Q})$. Le théorème (évident) suivant donne des conditions pour que l'autre inclusion soit vraie.

1. Le lecteur a le droit de trouver que ce qui suit est inutilement pédant.

1.4 Théorème. *La réponse à la question 1.1 est positive dans les deux cas suivants :*

1) Si f est injective et si l'on a $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ (par exemple f injective et $\mathcal{Q} = \{q\}$ avec $q = f(p)$, donc $\mathcal{P} = \{p\}$).

2) S'il existe des involutions σ et τ de X et Y, compatibles à f (i.e. $f(\sigma(x)) = \tau(f(x))$) telles que $x \in \mathcal{P} \iff \sigma(x) \in X - \mathcal{P}$ et de même sur Y.

Démonstration. 1) Soit $x \in X$ tel que $f(x) \in \mathcal{Q}$. Comme on a $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$ il existe $x' \in \mathcal{P}$ tel que $f(x') = f(x)$ et comme f est injective on a $x = x' \in \mathcal{P}$.

2) Soit $x \in f^{-1}(\mathcal{Q})$, i.e. $f(x) \in \mathcal{Q}$. Si x n'est pas dans $\mathcal{P}$ c'est que $\sigma(x) \in \mathcal{P}$, donc $f(\sigma(x)) = \tau(f(x)) \in \mathcal{Q}$ et donc $f(x) \notin \mathcal{Q}$ et c'est absurde.

1.2 Vérification des conditions

Voici quelques exemples de propriétés réduites à un singleton :

• X est un segment et $\mathcal{P}$ le milieu du segment.

• X est l'ensemble des droites passant par un point et $\mathcal{P}$ celles qui sont parallèles à une droite donnée.

• $X = [Ax)$ est une demi-droite, et $\mathcal{P}$ les points de X à une distance donnée de A.

• $X = (AB)$ est une droite (resp. une demi-droite $[AB)$), k est un réel (resp. positif) et $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points tels que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$ (resp. $\dfrac{MA}{MB} = k$).

• $[BC]$ est un segment donné, $X =]Bx)$ une demi-droite, $\alpha \in [0, \pi]$ et M est l'ensemble des points $A \in X$ tels que $\widehat{BAC} = \alpha$.

2 Les applications

Attention, dans les exemples ci-dessous, on a des théorèmes qui prennent la forme d'une équivalence et je ne me préoccupe pas de les prouver, mais seulement de montrer que si l'on a l'une des implications, on a l'autre.

2.1 La droite des milieux

2.1 Proposition. *Soit ABC un triangle et soit B' le milieu de $[AB]$. Soit d une droite passant par B' et non parallèle à (AC) qui coupe (AC) en C'. Alors on a : d parallèle à $(BC) \iff C'$ est milieu de $[AC]$.*

Le principe 1.4 s'applique avec les deux ensembles suivants : X est l'ensemble des droites passant par B' et non parallèles à (AC), Y est l'ensemble des points de (AC). L'application bijective $f : X \to Y$ associe à d son intersection C' avec (AC). La propriété $\mathcal{P}$ est : d est parallèle à (BC) et la propriété $\mathcal{Q}$ est : C' est milieu de $[AC]$. Toutes deux étant des singletons, si l'on a l'un des sens du théorème on a aussi l'autre.

Bien entendu cela fonctionne aussi avec Thalès. On remplace B' par un point quelconque de (AB), X et Y sont les mêmes, ainsi que f et $\mathcal{P}$, tandis que $\mathcal{Q}$ devient $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'C}} = \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'B}}$ (en mesures algébriques).

2.2 Commentaire. Cet exemple est particulièrement simple car les espaces X, Y sont naturels et les propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont naturellement des singletons. Dans la suite ce ne sera plus le cas et il faudra se restreindre (souvent à une demi-droite) pour être en posture favorable.

2.2 Le triangle rectangle et le demi-cercle

2.3 Proposition. *Soit ABC un triangle, O le milieu de $[BC]$. On a l'équivalence $\widehat{BAC} = \pi/2 \iff OA = OB = OC$.*

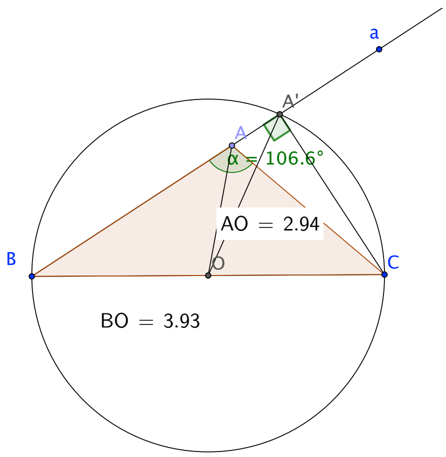

Figure 1 –

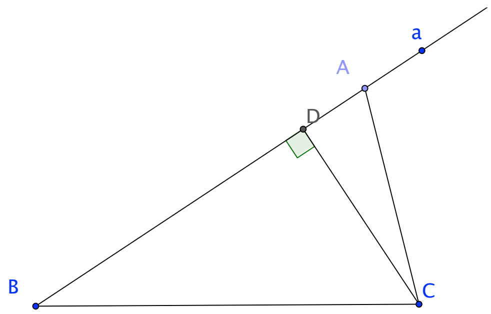

Figure 2 –

Démonstration. On se donne $[BC]$ et son milieu O. Les deux propriétés concernées sont le fait que l'angle $\widehat{BAC}$ soit droit et le fait que OA soit égal à OB et OC. La difficulté ici c'est d'avoir une bijection. On l'obtient en astreignant A à se déplacer sur une demi-droite $[Ba)$ quelconque issue de B. On considère alors $X = Y = [Ba)$ et on prend pour f l'identité. Les deux propriétés $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$, pour un $A \in [Ba)$ sont $\widehat{BAC} = \pi/2$ et $OA = OB = OC$. Ce sont bien des singletons et on a le résultat.

(Ici, si l'on veut ergoter, il faut démontrer qu'on a bien des singletons. On voit qu'il y une condition pour que le point A existe vérifiant $\mathcal{P}$ c'est que $\widehat{CBa}$ soit un angle aigu. Alors, l'unique point A vérifiant $\mathcal{P}$ est le projeté orthogonal de C sur $[Ba)$, l'unique A vérifiant $\mathcal{Q}$ est l'intersection (autre que B) du cercle de centre O et de rayon OB avec la demi-droite, voir Fig. 1.)

Bien entendu, on n'a montré l'équivalence que pour les points de $[Ba)$, mais comme cette demi-droite est arbitraire on l'a pour tous.

2.3 Le théorème de Pythagore

2.4 Proposition. (Pythagore et sa réciproque) *Soit ABC un triangle. On a l'équivalence $\widehat{BAC} = \pi/2 \iff BC^2 = AB^2 + AC^2$.*

Démonstration. Ici, je suppose qu'on a montré Pythagore, c'est-à-dire le sens $\Longrightarrow$. La preuve est analogue, avec là encore $X = Y = [Ba)$ et la même propriété $\mathcal{P}$. Cette fois la propriété $\mathcal{Q}$ c'est $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et toute la difficulté est de montrer que $\mathcal{Q}$ est un singleton, voir Fig. 2. Si on a A sur $[Ba$ avec $AB^2 + AC^2 = BC^2$, on considère D projeté de C sur $[Ab)$ et supposons par exemple que D est dans $[BA]$, l'autre cas est analogue. Par le sens direct de Pythagore on a $BD^2 = BC^2 - CD^2$ et $AC^2 = AD^2 + CD^2$. On a aussi $AB = BD + AD$ et on obtient $AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2AD^2 + 2AD.BD$ et on voit que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ impose $AD = 0$ donc $A = D$.

2.4 Caractérisation des triangles isocèles

2.5 Proposition. *Soit ABC un triangle. On a l'équivalence $AB = AC \iff \widehat{B} = \widehat{C}$.*

Démonstration. Supposons qu'on ait prouvé $\Longrightarrow$ et montrons $\Longleftarrow$. Je fais d'abord la démonstration puis je montre comment elle rentre dans le schéma précédent. On a un triangle ABC avec $\widehat{B} = \widehat{C}$. On raisonne par l'absurde en supposant $AB \neq AC$ et, disons $AB < AC$. Alors, il existe $A' \in]AC[$ tel que $A'C = A'B$. Par le sens direct on a $\widehat{A'BC} = \widehat{A'CB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$, mais c'est absurde car A' est strictement entre A et C donc $\widehat{A'BC} < \widehat{ABC}$.

Pour retrouver le cadre de 1.4, on prend pour X et Y une demi-droite $[Ca)$ et $f = \mathrm{Id}$. La propriété $\mathcal{P}$ d'un point A de cette demi-droite $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ et la propriété $\mathcal{Q}$ c'est $AB = AC$. Ce qu'il faut vérifier c'est que $\mathcal{Q}$ est un singleton[2] : il y a un unique point $A \in [Ca)$ tel que $AB = AC$. C'est le petit lemme suivant :

2.6 Lemme. *Avec les notation précédentes, la fonction $\varphi : M \mapsto MB - MC$, de $[Ca)$ dans $\mathbf{R}^+$ décroît strictement quand M va de C à l'infini.*

Démonstration.

Soient $M, N \in [Ca)$ avec $M \in [CN[$. On a $NC = NM + MC$ d'où $NB - NC = NB - NM - MC < MB - MC$ car $NB < NM + MC$ par l'inégalité triangulaire.

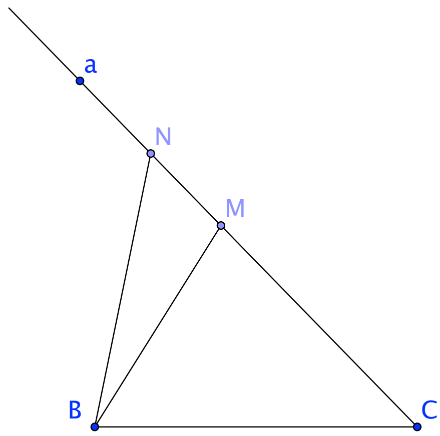

FIGURE 3 –

Ce lemme prouve qu'il y a au plus un point tel que $AB = AC$ sur la demi-droite et il y en a un parce que φ vaut $BC > 0$ en C et devient < 0 quand M tend vers l'infini.

2.5 L'angle inscrit

Cette fois, il s'agit du résultat suivant :

2.7 Théorème. *Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit D un point contenu dans le demi-plan P^+ limité par (BC) et contenant A. On a l'équivalence : $D \in \Gamma \iff \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$.*

Démonstration. Supposons qu'on ait prouvé $\Longrightarrow$ et passons à $\Longleftarrow$. On choisit une demi-droite ouverte $]Bd)$, dans le demi-plan P^+ et non tangente à Γ. Les ensembles X et Y de 1.4 sont tous deux égaux à $]Bd)$ et f est l'identité. La propriété $\mathcal{P}$ est $]Bd) \cap \Gamma$, réduite à un point. La propriété $\mathcal{Q}$ c'est $\widehat{BDC} =$

2. Évidemment, si l'on connaît la médiatrice on a le résultat sans peine, mais j'essaie de faire les choses à l'économie.

$\widehat{BAC}$. Le seul point à prouver c'est que $\mathcal{Q}$ est un singleton. Mais, si l'on a $D, E \in]Bd[$ avec $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$, et si $D \neq E$, les angles en D et E du triangle DEC sont supplémentaires et c'est absurde.

2.6 L'ordre des côtés et des angles

Le dernier exemple concerne le théorème suivant :

2.8 Théorème. *Soit ABC un triangle non isocèle. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les longueurs des côtés et $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les angles. Alors on a $a < b < c \Longleftrightarrow \widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$.*

Démonstration. On peut se limiter à l'équivalence $b < c \Longleftrightarrow \widehat{B} < \widehat{C}$. Supposons que l'on a montré $\Longleftarrow$, par exemple. On raisonne par l'absurde en supposant qu'on a $b < c$ et $\widehat{C} < \widehat{B}$. Par le sens direct on a $c < b$, contradiction.

Cette fois c'est la version de 1.4 avec les involutions. On se donne un segment $[BC]$ et on considère l'un des demi-plans qu'il limite. L'ensemble X ce sont les couples d'angles, l'ensemble Y les couples de longueurs et on associe à un couple d'angle (β, γ) le point A tel que $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \gamma$ puis le couple de longueurs $c := AB$ et $b := AC$. Les propriétés $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ce sont les ordres $\beta < \gamma$ et $b < c$. Les involutions sur X, Y sont simplement les échanges de β, γ et de b, c.