

Les angles d'un quadrilatère

Daniel PERRIN

Table des matières

1	Rappels sur les angles	2
2	Classification des quadrilatères	7
3	Les quadrilatères, les similitudes directes et les angles orientés	16
4	Les quadrilatères modulo le groupe de toutes les similitudes	24
5	Paramétrer les quadrilatères convexes avec quatre angles ?	27
6	L'exercice difficile	39
7	La question sur la méridienne	41
8	Annexe 1 : à propos des quotients	43
9	Annexe 2 : la version originale de l'exercice difficile	48

Je regroupe ici quelques réflexions sur les angles des quadrilatères qui voient la convergence de trois thèmes : la question des invariants telle qu'elle apparaît dans mon livre (voir [5] Ch. 7), un exercice, réputé très difficile, que m'avait soumis Guy Henniart il y a quelque temps déjà et une question rencontrée dans l'étude de la mesure de la méridienne.

Introduction

L'objectif de ce texte est l'étude des quadrilatères du plan modulo similitude ou modulo similitude directe. Dans un premier temps, on appelle

quadrilatère la donnée de quatre points A, B, C, D distincts, mais il est clair qu'il faudra faire des hypothèses (par exemple, que les points ne sont pas tous alignés, ou qu'ils sont **en position générale**, c'est-à-dire que trois quelconques sont non alignés, ou enfin que $ABCD$ est **convexe**). L'ensemble des quadrilatères est évidemment de dimension 8 (dans tous les cas évoqués, il contient un ouvert de $(\mathbf{R}^2)^4$) et il s'agit de décrire le quotient de cet ensemble modulo similitude. Comme le groupe des similitudes (directes ou non) est de dimension 4, on s'attend¹ à ce que le quotient soit aussi de dimension 4. Un quadrilatère modulo similitude doit donc être repéré par 4 invariants et ici les invariants les plus naturels² sous le groupe de toutes les similitudes (resp. des similitudes directes) sont les angles non orientés (resp. orientés). Attention, les quatre angles les plus immédiats, ceux que font les côtés en les sommets, ne suffisent évidemment pas (on pensera au cas des rectangles) et il faut prendre en compte les diagonales. Précisément, voir 2.8 ci-dessous, on va choisir comme invariants huit angles mettant en jeu³ A, B, C, D , en respectant les symétries combinatoires du problème. Comme le quotient est de dimension 4 il y aura des relations entre ces angles, celles exprimant que la somme des angles de certains triangles vaut π , évidemment, mais aussi d'autres un peu plus cachées.

1 Rappels sur les angles

On travaille dans le plan affine euclidien orienté \mathcal{P} (on note $(\vec{u}|\vec{v})$ le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v}) et on note $\text{Sim } \mathcal{P}$ (resp. $\text{Sim}^+ \mathcal{P}$) le groupe des similitudes (resp. des similitudes directes) de \mathcal{P} . Le groupe $\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ est un sous-groupe distingué d'indice 2 de $\text{Sim } \mathcal{P}$ et, en utilisant les réflexions, on a une décomposition en produit semi-direct $\text{Sim } \mathcal{P} \simeq \text{Sim}^+ \mathcal{P} \rtimes \{1, -1\}$.

1. En général il faut prendre garde aux stabilisateurs. Par exemple, l'espace des cercles du plan est de dimension 3, comme le groupe des isométries, mais le quotient par ce groupe est de dimension 1, repéré par le rayon, à cause de l'invariance d'un cercle par le groupe des rotations autour de son centre.

2. Il y a aussi les rapports de longueurs qui peuvent être plus pertinents pour l'étude des cas dégénérés où des points viennent à coïncider, voir l'annexe 1 §8.

3. Il y a six droites définies par les quatre points et elles ont trois autres points d'intersection : $E = (AB) \cap (CD)$, $F = (AC) \cap (BD)$ et $G = (AD) \cap (BC)$, mais les angles en E, F, G peuvent être éliminés en utilisant la somme des angles de certains triangles.

1.1 Rappels sur les angles orientés

1.1.1 Définition

Les invariants associés aux similitudes directes sont les angles orientés de vecteurs⁴ pour lesquels nous renvoyons le lecteur à [3]. Rappelons que l'angle de deux vecteurs non nuls, noté (\vec{u}, \vec{v}) , est l'élément θ de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ qui est tel que la rotation vectorielle d'angle θ envoie $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ sur $\vec{v}/\|\vec{v}\|$. Le plus souvent on choisira un représentant (dit canonique) de θ dans $] -\pi, +\pi]$. On identifie $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ au groupe \mathbf{U} des nombres complexes de module 1 *via* l'exponentielle : $\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Un angle orienté est donc défini par son cosinus et son sinus.

Les angles orientés sont invariants par les similitudes directes et changés en leurs opposés par les indirectes. Une autre propriété essentielle des angles orientés est la relation de Chasles :

1.1 Proposition. *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs non nuls. On a la relation $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$.*

1.1.2 Signes

Comme on a choisi une orientation du plan (par exemple en fixant une base orthonormée directe \vec{i}, \vec{j}) on a une notion de signe d'un angle orienté $\alpha = (\vec{u}, \vec{v}) \neq 0, \pi$ (voir [3] 3.4), qui est le signe de $\sin \alpha$ ou encore celui de $\det_{\vec{i}, \vec{j}}(\vec{u}, \vec{v})$ ou encore le signe du représentant canonique de α dans $] -\pi, \pi[$.

1.1.3 Quelques résultats

Voici d'abord un résultat bien naturel sur les signes :

1.2 Proposition. *Soient A, B deux points distincts et C, D deux points situés du même côté de (AB) (resp. de part et d'autre). Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ sont de même signe (resp. de signes contraires).*

Démonstration. Voir [3] 3.4.4. C'est facile en utilisant un repère orthonormé direct \vec{i}, \vec{j} avec \vec{i} porté par \overrightarrow{AB} et \vec{j} dans le demi-plan contenant C .

Rappelons aussi la version orientée de la somme des angles d'un triangle :

1.3 Proposition. *Soient A, B, C trois points distincts. On a la formule $\sigma := (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$.*

4. Ou de demi-droites.

Démonstration. On utilise l'invariance par symétrie centrale qui donne $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$, puis la relation de Chasles, et on obtient $\sigma = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) = \pi$.

Notons ensuite deux lemmes qui précisent les questions de signes :

1.4 Lemme. Soit ABC un triangle⁵. Les trois angles $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ sont de même signe.

Démonstration. Voir [3] 3.4.5. Comme on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ on a $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et le résultat.

Voici maintenant un critère d'intersection employant les angles orientés :

1.5 Lemme. Soient A, B deux points distincts et $[Ax), [By)$ deux demi-droites non portées par (AB) . On pose $\theta = ([AB), [Ax))$ et $\varphi = ([By), [BA))$. Alors les demi-droites $[Ax)$ et $[By)$ se coupent en un point C si et seulement si θ, φ et $\theta + \varphi$ sont distincts de $0, \pi$ et de même signe. Dans le cas $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$, on a $C = \left(\frac{\sin \varphi \cos \theta}{\sin(\theta + \varphi)}, \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\sin(\theta + \varphi)} \right)$.

Démonstration. Si les demi-droites se coupent en C on conclut par le lemme précédent. Inversement, si θ et φ sont de même signe les demi-droites sont dans le même demi-plan limité par (AB) . Comme $\theta + \varphi$ est différent de π les droites (Ax) et (By) se coupent en C . Si C était dans l'autre demi-plan, par le sens direct, les angles $\pi - \theta, \pi - \varphi$ et $2\pi - \theta - \varphi = -\theta - \varphi$ seraient de même signe et c'est absurde.

Comme on a $C = (AC \cos \theta, AC \sin \theta)$, la version explicite résulte de la formule des sinus, voir ci-dessous 1.14.

1.2 Rappels sur les secteurs et les angles non orientés

1.2.1 Définition

On s'intéresse maintenant aux angles non orientés. On a la définition suivante :

1.6 Proposition-Définition. Soient A, B, C trois points distincts. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} / \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} / \|\overrightarrow{AC}\|$ les vecteurs unitaires associés. L'angle \widehat{ABC} est le réel de $[0, \pi]$ défini par la formule $(\vec{u} | \vec{v}) = \cos \widehat{ABC}$. C'est aussi la valeur absolue du représentant canonique de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

5. C'est-à-dire trois points non alignés.

1.7 Remarques. 1) Si les points sont alignés, l'angle est égal à π si B est entre A et C et nul sinon.

2) Les angles non orientés sont invariants par les similitudes directes et indirectes.

3) L'ensemble des angles est paramétré, au choix, soit par un nombre $\alpha \in [0, \pi]$, soit par $\cos \alpha \in [0, 1]$, soit encore par le couple $(\cos \alpha, \sin \alpha) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ vérifiant $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. En effet, l'application donnée par cosinus et sinus est une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ sur le demi-cercle et c'est même un difféomorphisme de l'intervalle $]0, \pi[$ sur le demi-cercle ouvert.

1.2.2 Angles et secteurs

Rappelons que le secteur saillant défini par les points A, B, C distincts est l'intersection des demi-plans fermés limité par (AB) et contenant C et (AC) contenant B . Il est noté $[\widehat{ABC}]$. Si les points sont alignés, on dit que le secteur est plat si B est entre A et C et nul sinon.

1.8 Proposition. Soient A, B, C des points distincts, $[\widehat{ABC}]$ le secteur qu'ils déterminent et Γ l'arc intersection de ce secteur et du cercle de centre A et de rayon 1. L'angle \widehat{ABC} est égal à la longueur de Γ .

Démonstration. Voir [3] Annexe 3, Th. 4.1 ou :

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Coursangles.pdf>

Sur les secteurs, le lemme essentiel est le suivant (voir [2]) :

1.9 Lemme. Soit $[\widehat{AOB}]$ un secteur saillant et soit C un point de ce secteur, non situé sur les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. Alors, les points A et B sont situés de part et d'autre de la droite (OC) et, plus précisément, le segment $[AB]$ coupe la demi-droite $[OC)$.

1.2.3 La relation de Chasles géométrique

C'est le résultat suivant pour lequel on renvoie à :

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Coursangles.pdf>

1.10 Proposition. Soient $[\widehat{AOB}]$ un secteur saillant et C un point du plan, distinct de O . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) On a la relation de Chasles géométrique : $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$.
- 2) Le point C est dans le secteur $[\widehat{AOB}]$.
- 3) Les points A et B sont de part et d'autre de (OC) et on a $\widehat{AOC} + \widehat{COB} \leq \pi$.

1.2.4 Somme des angles d'un triangle

1.11 Proposition. Soit ABC un triangle. On a $\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = \pi$.

Démonstration. Cela résulte de 1.3 et 1.4.

1.2.5 Un critère d'intersection

Le lemme suivant est une variante⁶ non orientée de 1.5 :

1.12 Lemme. Soient A, B deux points distincts et $[Ax)$ et $[By)$ deux demi-droites situées dans un même demi-plan ouvert limité par (AB) . Alors ces demi-droites se coupent en un point C si et seulement si on a $\widehat{xAB} + \widehat{yBA} < \pi$.

Démonstration. La nécessité de la condition provient de la somme des angles du triangle ABC . Pour voir qu'elle est suffisante, posons $\theta = \widehat{xAB}$ et $\varphi = \widehat{yBA}$. Comme on a $\theta + \varphi < \pi$ les droites (Ax) et (By) ne sont pas parallèles, donc se coupent en C . Si C était dans l'autre demi-plan, les angles en A, B de ABC seraient $\pi - \theta$ et $\pi - \varphi$ et leur somme serait $< \pi$. On aurait donc $\theta + \varphi > \pi$ et c'est absurde.

1.2.6 La relation des sinus

La relation suivante est bien connue :

1.13 Proposition. Soient A, B, C trois points non alignés. On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$. On a la relation $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$.

Démonstration. Cela résulte des formules donnant l'aire du triangle comme : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \alpha$ qui elles-mêmes viennent de la formule $base \times hauteur/2$.

On a une variante orientée de la relation :

1.14 Proposition. Soient A, B, C trois points non alignés. On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On a la relation $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$.

Démonstration. Cela résulte de la formule de 1.13 en notant que les trois angles ont même signe (voir 1.4).

6. Et on peut aussi le prouver en utilisant 1.5.

2 Classification des quadrilatères

2.1 Quadruplets ou quadrilatères

2.1.1 Distinguer les deux notions

Les objets que nous étudions principalement ici sont les quadruplets $X = (A, B, C, D)$ de points de \mathcal{P} . Deux groupes opèrent naturellement sur ces objets : le groupe des similitudes $\text{Sim } \mathcal{P}$ et le groupe symétrique \mathfrak{S}_4 . Lorsqu'on a un quadruplet $X = (A, B, C, D)$, on définit ses côtés qui sont les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et ses diagonales qui sont $[AC]$ et $[BD]$. Considérer le quadrilatère associé à ce quadruplet consiste à confondre les quadruplets obtenus en parcourant les points A, B, C, D soit en respectant l'ordre mais en changeant de point de départ, soit en utilisant l'ordre inverse, opérations qui respectent côtés et diagonales. La proposition suivante précise les permutations qui vérifient cette propriété et permet de formaliser la définition des quadrilatères :

2.1 Proposition-Définition. *Soit $X := (A, B, C, D)$ un quadruplet de points de \mathcal{P} , $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ et $\sigma(X) = (\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D))$ l'image de X par σ .*

Le sous-groupe de \mathfrak{S}_4 des permutations de A, B, C, D qui transforment respectivement côtés et diagonales de X en côtés et diagonales de $\sigma(X)$ est le groupe diédral \mathbf{D}_4 , formé de l'identité, des permutations circulaires $(ABCD)$ et $(ADCB)$, de leur carré $(AC)(BD)$, des transpositions (AC) et (BD) et des deux doubles transpositions $(AD)(BC)$ et $(AB)(CD)$.

*On dit que X et $\sigma(X)$ définissent le même quadrilatère si les ensembles de leurs côtés et de leurs diagonales sont égaux ou, ce qui revient au même, si σ est dans \mathbf{D}_4 . Un **quadrilatère** est donc un élément de l'ensemble quotient⁷ de \mathcal{P}^4 par \mathbf{D}_4 . On note $ABCD$ le quadrilatère associé à (A, B, C, D) . Les points A, B, C, D sont ses **sommets**.*

Démonstration. Il est clair que ces permutations conservent côtés et diagonales (il suffit d'avoir l'image du carré pour s'en convaincre). Inversement, si G est le groupe qui conserve, c'est un sous-groupe de \mathfrak{S}_4 contenant \mathbf{D}_4 , donc de cardinal multiple de 8 et diviseur de 24, l'unique solution autre que \mathbf{D}_4 est \mathfrak{S}_4 lui-même. Mais on voit que la transposition (AB) change le côté $[BC]$ en la diagonale $[AC]$ donc n'est pas dans le groupe.

2.2 Définition. *On appelle \mathbf{D}_4^+ le sous-groupe des "rotations"⁸ engendré*

7. En fait, on réservera le mot quadrilatère au cas où les points sont en position générale, voir 2.4.

8. Ce mot fait évidemment référence à la représentation de \mathbf{D}_4 comme groupe des isométries du carré.

par $(ABCD)$.

2.3 Remarques. 1) Comme quadrilatère, $ABCD$ est donc égal à $BCDA$ (et ses permutés circulaires), ainsi qu'à $ADCB$ (et ses permutés circulaires), c'est-à-dire $ABCD$ parcouru dans l'ordre inverse.

2) Le quotient $\mathfrak{S}_4/\mathbf{D}_4$ est formé des images de l'identité et des transpositions (AB) et (BC) . À partir d'un quadrilatère $ABCD$ on obtient donc par permutation trois quadrilatères : $ABCD$, $BACD$ et $ACBD$.

2.1.2 Les trois types de quadrilatères

Commençons par préciser quelques définitions et notations :

2.4 Définition. 1) On dit que A, B, C, D sont **en position générale** si trois quelconques d'entre eux sont non alignés. Cette propriété est invariante sous l'action du groupe \mathfrak{S}_4 .

2) On dit que $ABCD$ est un quadrilatère⁹ convexe¹⁰ si A, B, C, D sont en position générale et si les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent.

3) On dit qu'un quadrilatère $ABCD$ est **concave** si A, B, C, D sont en position générale et si l'un des sommets est dans l'enveloppe convexe des autres (i.e. à l'intérieur du triangle formé par les trois autres).

4) On dit qu'un quadrilatère $ABCD$ est **croisé** si A, B, C, D sont en position générale et si deux des côtés ont une intersection autre qu'un sommet.

2.5 Proposition. Soient A, B, C, D quatre points en position générale. On a les possibilités suivantes :

1) Quitte à permuter les sommets on peut supposer le quadrilatère $ABCD$ convexe. Dans ce cas les deux autres $BACD$ et $ACBD$ sont croisés.

2) L'un des sommets est dans l'enveloppe convexe des trois autres. Dans ce cas les trois quadrilatères $ABCD$, $BACD$ et $ACBD$ sont concaves.

Démonstration. Voir [6] Ch. 5 Rem. 1.12 et les figures 1 et 2 ci-dessous.

2.6 Remarque. Si $ABCD$ est croisé, il y a deux cas :

- Si les côtés $[AD]$ et $[BC]$ se coupent, c'est $BACD$ qui est convexe.
- Si les côtés $[AB]$ et $[CD]$ se coupent, c'est $ACBD$ qui est convexe.

9. La propriété est invariante sous l'action du groupe \mathbf{D}_4 et c'est donc bien une propriété du quadrilatère $ABCD$.

10. On se reportera à [6] 1.7 pour d'autres caractérisations de la convexité.

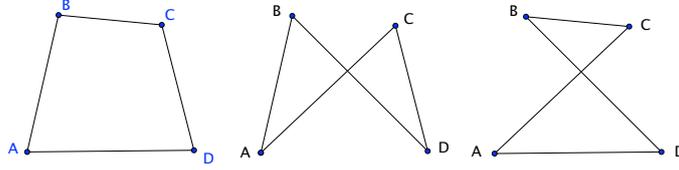


FIGURE 1 – Les trois quadrilatères du cas convexe-croisé

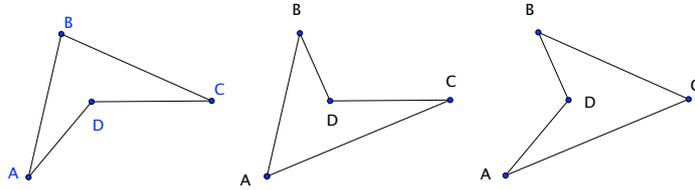


FIGURE 2 – Les trois quadrilatères du cas concave

2.7 Notations. 1) On note \mathcal{Q}_{00} l'ensemble des quadruplets de points distincts de \mathcal{P} .

2) On note \mathcal{Q}_0 l'ensemble des quadruplets de points de \mathcal{P} non tous alignés.

3) On note \mathcal{Q}_g l'ensemble des quadruplets de points de \mathcal{P} , en position générale et $\overline{\mathcal{Q}}_g$ l'ensemble des quadrilatères correspondants.

4) On note \mathcal{Q} l'ensemble des quadruplets (A, B, C, D) tels que $ABCD$ soit convexe et $\overline{\mathcal{Q}}$ l'ensemble des quadrilatères convexes. On note de même \mathcal{Q}_v (resp. \mathcal{Q}_r) les quadruplets donnant naissance à des quadrilatères concaves (resp. croisés).

2.2 Les angles d'un quadruplet

2.2.1 Notations

Pour éviter la profusion de notations, nous noterons de la même manière les angles orientés ou non orientés d'un quadruplet :

2.8 Notations. Soient A, B, C, D quatre points distincts.

1) Dans le cas orienté, on pose $\alpha = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$, $\alpha' = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, $\beta = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$, $\beta' = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$, $\gamma = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$, $\gamma' = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$, $\delta = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})$ et $\delta' = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$. On notera $\vec{q}(A, B, C, D)$ l'octuplet $(\alpha, \alpha', \beta, \dots, \delta')$.

2) Dans le cas non orienté, on pose $\alpha = \widehat{CAD}$, $\alpha' = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{DBA}$, $\beta' = \widehat{CBD}$, $\gamma = \widehat{ACB}$, $\gamma' = \widehat{DCA}$, $\delta = \widehat{BDC}$ et $\delta' = \widehat{ADB}$. On notera $q(A, B, C, D)$ l'octuplet $(\alpha, \alpha', \beta, \dots, \delta')$.

2.9 Remarque. Lorsqu'il y aura un risque de confusion nous préciserons dans quel cadre nous travaillons (orienté ou non orienté). Lorsque les deux types d'angles apparaissent en même temps nous noterons $|\alpha|$, $|\alpha'|$, etc. les angles non orientés associés aux angles orientés α , α' , etc. et $|\vec{q}|$ l'octuplet non orienté associé à \vec{q} .

Dans la figure de gauche ci-dessous, les angles orientés sont tous positifs (l'orientation est choisie pour que le sens trigonométrique soit positif). Dans celle de droite les angles coloriés en vert sont positifs et ceux en orange sont négatifs.

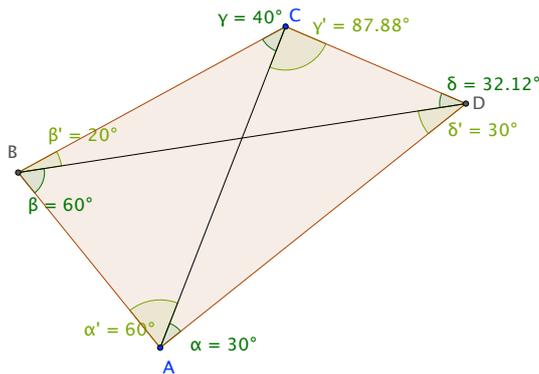


FIGURE 3 – Un cas convexe

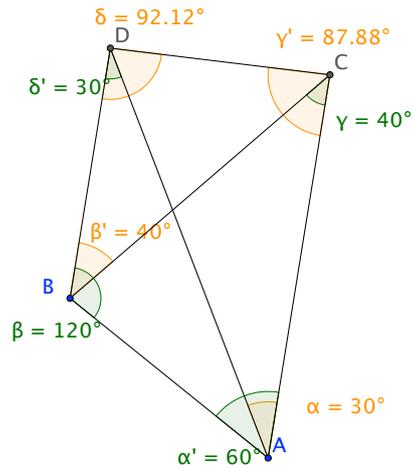


FIGURE 4 – Un cas non convexe

2.2.2 Angles d'un quadrilatère

On reprend les notations de 2.8 et on explicite le comportement des angles sous l'action du groupe \mathbf{D}_4 :

2.10 Lemme. *Un angle orienté $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$ est transformé de la manière suivante par un élément $\sigma \in \mathbf{D}_4$:*

1) *Le nom de l'angle est transformé comme l'indique l'action de σ sur les sommets.*

2) L'accentuation (prime ou non) est conservée si σ est dans \mathbf{D}_4^+ et changée sinon.

3) Le signe de l'angle est conservé si σ est dans \mathbf{D}_4^+ et changé sinon.

Démonstration. C'est une simple vérification. Par exemple $\alpha = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ devient $\beta = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$ par $\sigma = (ABCD)$ mais par $\sigma = (AC)$ il devient $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = -\gamma'$.

2.11 Remarque. Considérer le quadrilatère $ABCD$ revient à identifier les quadruplets qui sont dans une même orbite sous \mathbf{D}_4 . Du côté des angles, cela signifie qu'on identifie $(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta')$ à $(\beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta', \alpha, \alpha')$ et à ses permutés circulaires, mais aussi à $(-\alpha', -\alpha, -\delta', -\delta, -\gamma', -\gamma, -\beta', -\beta)$ (qui correspond au parcours des sommets dans l'ordre inverse A, D, C, B) et à ses permutés circulaires.

La situation est la même dans le cas non orienté, mais sans question de signe :

2.12 Lemme. Un angle non orienté $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$ est transformé de la manière suivante par un élément $\sigma \in \mathbf{D}_4$:

1) Le nom de l'angle est transformé comme l'indique l'action de σ sur les sommets.

2) L'accentuation (prime ou non) est conservée si σ est dans \mathbf{D}_4^+ et changée sinon.

2.3 Caractérisation des divers types de quadrilatères en termes d'angles orientés

L'alignement de trois points se traduisant par le fait que les angles (orientés ou non) qu'ils définissent sont égaux à 0 ou π , on a le lemme suivant :

2.13 Lemme. Soient A, B, C, D quatre points distincts de \mathcal{P} et $(\alpha, \alpha', \dots, \delta')$ les angles associés (orientés ou non).

1) Les points A, B, C, D sont tous alignés si et seulement si les angles sont tous égaux à 0 ou π .

2) Les points A, B, C, D sont en position générale si et seulement si aucun angle n'est égal à 0 ou π .

Voici ensuite un résultat important qui concerne les signes :

2.14 Proposition. Si A, B, C, D sont quatre points en position générale, les angles orientés $\beta', \gamma + \gamma', \delta$, (resp. $\gamma', \delta + \delta', \alpha$, resp. $\delta', \alpha + \alpha', \beta$, resp. $\alpha', \beta + \beta', \gamma$) sont distincts de 0, π et de même signe. Ces conditions sont notées respectivement $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$ et \mathcal{S}_D .

Démonstration. Cela résulte de 1.4 appliqué aux triangles BCD , CDA , DAB et ABC .

Voici maintenant une caractérisation des divers types de quadrilatères en termes de signes des angles orientés :

2.15 Proposition. *Soient A, B, C, D quatre points de \mathcal{P} en position générale et soient $(\alpha, \alpha', \dots, \delta')$ les angles orientés associés (qui sont $\neq 0, \pi$ en vertu de 2.13). On note ϵ l'un des signes $+$ ou $-$.*

1) *Le quadrilatère $ABCD$ est convexe si et seulement si les angles sont tous de même signe.*

2) *Le quadrilatère $ABCD$ est concave si et seulement si deux des angles sont de signe ϵ et les six autres de signe $-\epsilon$.*

3) *Le quadrilatère $ABCD$ est croisé si et seulement si quatre des angles sont de signe ϵ et les quatre autres de signe $-\epsilon$.*

Démonstration. Comme les trois cas recouvrent toutes les possibilités, il suffit de prouver les assertions dans le sens direct.

1) Comme $ABCD$ est convexe, les points B et D sont de part et d'autre de (AC) , de sorte que les angles α et α' sont de même signe en vertu de 1.2. Comme les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en un point E , l'application de 1.4 au triangle ABE montre que α' et β sont de même signe. La répétition de l'argument donne le résultat.

2) Si $ABCD$ est concave avec, disons, D intérieur au triangle ABC , le lemme 1.9 montre que A et C (resp. B et C) sont de part et d'autre de (BD) (resp. (AD)). Le lemme 1.2 montre alors que les angles $\delta = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})$, $\delta' = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$ et $-\delta - \delta' = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ sont de même signe, disons ϵ . Avec 1.4 appliqué dans ABD et BCD on en déduit que β et β' sont de signe ϵ et ce signe est aussi celui de $\beta + \beta'$ par 1.2, donc celui de α' et γ par 2.14. En revanche, α et γ' , qui sont du signe de $\delta + \delta' = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, sont de signe $-\epsilon$ et on a le résultat annoncé. On notera que $\alpha + \alpha'$ et $\gamma + \gamma'$ sont de signe ϵ .

3) Si $ABCD$ est croisé et si, disons, $[AB]$ et $[CD]$ se coupent, le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1 = ACBD$ est convexe et ses angles sont de même signe, disons ϵ . Or ces angles sont $\alpha + \alpha'$, $-\alpha'$, γ' , $-\gamma - \gamma'$, $-\beta - \beta'$, β , $-\delta$ et $\delta + \delta'$. Avec 2.14 on en déduit que les angles $\alpha, \beta, \gamma', \delta'$ sont de signe ϵ tandis que $\alpha', \beta', \gamma, \delta$ sont de signe $-\epsilon$.

2.16 Remarque. Au passage, on a montré un résultat sur les sommes du type $\alpha + \alpha'$ qui représentent les angles de $ABCD$ en ses sommets : elles sont toutes de même signe dans le cas convexe, trois sont de signe ϵ et une de signe $-\epsilon$ dans le cas concave et deux sont de chaque signe dans le cas croisé.

2.4 Les relations entre les angles dans le cas orienté

Les premières relations proviennent directement de la somme des angles des triangles 1.3 appliquée dans les triangles BCD , CDA , DAB , ABC :

2.17 Proposition. *Soient A, B, C, D quatre points distincts. On a les relations $\mathcal{R}_A : \beta' + \gamma + \gamma' + \delta = \pi$, $\mathcal{R}_B : \gamma' + \delta + \delta' + \alpha = \pi$, $\mathcal{R}_C : \delta' + \alpha + \alpha' + \beta = \pi$ et enfin $\mathcal{R}_D : \alpha' + \beta + \beta' + \gamma = \pi$.*

2.18 Remarques. 1) Les relations ci-dessus ne sont pas indépendantes, on a $\mathcal{R}_A + \mathcal{R}_C = \mathcal{R}_B + \mathcal{R}_D$ (la somme de tous les angles est égale à 2π). En termes matriciels, la matrice des relations $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B, \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_D$ sur $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta'$

est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et elle est de rang 3.

2) Il y a d'autres relations, conséquences des quatre précédentes, par exemple $\mathcal{R}_5 : \beta + \alpha' = \delta + \gamma'$ (obtenue en écrivant $\mathcal{R}_C - \mathcal{R}_B$) et $\mathcal{R}_6 : \gamma + \beta' = \alpha + \delta'$ (obtenue en écrivant $\mathcal{R}_A - \mathcal{R}_B$), évidentes aussi en utilisant le point central. Un petit programme montre que les six quadruplets ainsi trouvés sont les seuls qui donnent des matrices 4×4 de rang < 3 .

On a d'autres relations, moins évidentes, issues de la formule des sinus, voici la plus spectaculaire :

2.19 Proposition. (La formule magique) *Soient A, B, C, D quatre points distincts. On a, avec les notations de 2.8, la relation \mathcal{R}_P :*

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta = \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' \sin \delta'.$$

Démonstration. Le résultat est évident si trois des points sont alignés. En effet, si par exemple A, B, C sont alignés α' et γ sont égaux à 0 ou π et l'égalité est évidente. Sinon, on applique la relation des sinus 1.14 dans les triangles ABC , BCD , CDA et DAB . On obtient :

$$\frac{\sin \alpha'}{BC} = \frac{\sin \gamma}{AB}, \quad \frac{\sin \beta'}{CD} = \frac{\sin \delta}{BC}, \quad \frac{\sin \gamma'}{DA} = \frac{\sin \alpha}{CD}, \quad \frac{\sin \delta'}{AB} = \frac{\sin \beta}{DA}$$

et le résultat est évident en multipliant ces relations.

En fait, il y a d'autres relations que l'on obtient à partir de \mathcal{R}_P en permutant les points A, B, C, D . On note d'abord que, le groupe \mathbf{D}_4 (voir 2.1) conserve \mathcal{R}_P . En effet, c'est clair pour $(ABCD)$ qui permute α, \dots, δ et α', \dots, δ' et c'est vrai aussi pour (AC) qui échange α et $-\gamma'$, β et $-\beta'$, γ et $-\alpha'$ et δ et $-\delta'$. il suffit donc de regarder l'effet des transpositions (BC) et (AB) .

2.20 Proposition. Soient A, B, C, D quatre points distincts. On a, avec les notations de 2.8, les relations suivantes :

$$(\mathcal{R}_P^1) \sin(\alpha + \alpha') \sin(\beta + \beta') \sin \gamma' \sin \delta = \sin \alpha' \sin \beta \sin(\gamma + \gamma') \sin(\delta + \delta')$$

$$(\mathcal{R}_P^2) \sin(\alpha + \alpha') \sin \beta' \sin \gamma \sin(\delta + \delta') = \sin \alpha \sin(\beta + \beta') \sin(\gamma + \gamma') \sin \delta'.$$

Démonstration. La première est la relation \mathcal{R}_P appliquée à $A_1 = A, B_1 = C, C_1 = B$ et $D_1 = D$. Voici les traductions $\alpha_1 = \alpha + \alpha', \alpha'_1 = -\alpha', \beta_1 = \gamma', \beta'_1 = -\gamma - \gamma', \gamma_1 = -\beta - \beta', \gamma'_1 = \beta, \delta_1 = -\delta, \delta'_1 = \delta + \delta'$. L'autre s'obtient en permutant A et B .

On peut aussi les obtenir en écrivant les relations des sinus dans les triangles ABC , etc. avec les paires de côtés non utilisées dans \mathcal{R}_P .

2.21 Remarque. Nous verrons en 3.6 qu'en général, la relation \mathcal{R}_P n'implique pas les autres.

2.5 Caractérisation des divers types de quadrilatères en termes d'angles non orientés

Nous pouvons maintenant montrer l'analogie de 2.15 avec les angles non orientés. Le résultat n'est pas tout à fait évident :

2.22 Proposition. Soient A, B, C, D quatre points de \mathcal{P} en position générale et soient $(\alpha, \alpha', \dots, \delta')$ les angles non orientés associés (qui sont dans $]0, \pi[$ en vertu de 2.13).

1) Le quadrilatère $ABCD$ est convexe si et seulement si les sommes de trois angles consécutifs : $\delta' + \alpha + \alpha', \alpha + \alpha' + \beta$ et les sommes analogues obtenues par permutation circulaire, sont toutes $< \pi$.

2) Le quadrilatère $ABCD$ est concave si l'une des sommes du type $\delta' + \alpha + \alpha'$ est $> \pi$ et si l'on a la paire d'inégalités $\gamma > \gamma'$ et $\alpha' > \alpha$ ou l'une des paires obtenues par permutation circulaire.

3) Le quadrilatère $ABCD$ est croisé si et seulement si l'une des sommes du type $\delta' + \alpha + \alpha'$ est $> \pi$ et si aucune des paires d'inégalités précédentes n'est vérifiée.

Démonstration. Comme pour 2.15, il suffit de montrer les sens directs.

1) Si $ABCD$ est convexe, ses angles orientés sont tous de même signe, disons positifs, et le résultat est alors conséquence des relations de type \mathcal{R}_A .

2) Si $ABCD$ est concave et si D est le sommet contenu dans le triangle des trois autres, on a $\delta + \delta' = 2\pi - \widehat{ADC} > \pi$, donc *a fortiori* $\alpha + \delta + \delta' > \pi$.

De plus, comme D est dans le secteur saillant $[\widehat{BAC}]$, on a $\widehat{BAC} = \alpha' = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{BAD} + \alpha$ en vertu de la relation de Chasles géométrique 1.10 et donc $\alpha < \alpha'$. On procède de même pour les angles en C .

3) Si le quadrilatère est croisé, par exemple si $[AB]$ et $[CD]$ se coupent, c'est le quadrilatère $ACBD$ qui est convexe, avec comme angles en les sommets $\alpha, \gamma, \beta', \delta'$. Comme la somme de ces angles est égale à 2π , on peut supposer, par exemple, qu'on a $\beta' + \gamma \geq \pi$. Mais alors, on a $\beta + \beta' + \gamma > \pi$. De plus, les angles de $ACBD$ en A et C sont $\widehat{CAD} = \alpha$ et $\widehat{ACB} = \gamma$ et, en vertu de 1.10, on a $\alpha > \alpha'$ et $\gamma > \gamma'$. Cela empêche d'avoir à la fois les relations $\alpha < \alpha'$ et $\gamma' < \gamma$ ou leurs opposées. Le raisonnement est identique en B et D où les angles de $ACBD$ sont β' et δ' .

2.23 Remarques. 1) Dans le cas concave, on peut préciser quel est le point intérieur au triangle formé par les autres. Si, par exemple, c'est D , on a la relation $\delta + \delta' = \pi + \alpha + \gamma'$ tandis que les relations obtenues par permutation circulaire ne sont pas vérifiées. En effet, on a $\delta + \delta' + \widehat{ADC} = 2\pi$ et, avec la somme des angles du triangle ACD , on a $\delta + \delta' = \pi + \alpha + \gamma'$. En revanche, les autres relations ne sont pas vraies. C'est évident pour $\beta + \beta'$ qui est égal à \widehat{ABC} . On a aussi, dans BCD , $\gamma - \gamma' + \beta' + \delta = \pi$ donc $\delta + \beta' + \pi = 2\pi + \gamma' - \gamma$ et cette quantité ne peut être égale à $\gamma + \gamma'$ sinon γ serait égal à π .

2) Dans le cas croisé on peut préciser quel est le quadrilatère obtenu par permutation qui est convexe : c'est $BACD$ si l'on a les inégalités $\alpha < \alpha'$, $\beta' < \beta$, $\gamma < \gamma'$ et $\delta' < \delta$ et c'est $ACBD$ si l'on a les inégalités inverses.

2.24 Remarque. On ne peut distinguer entre les cas concave et croisé ni avec les sommes de deux angles, ni avec les sommes du type $\delta' + \alpha + \alpha'$. Ainsi, dans le cas concave, le nombre de ces dernières sommes qui sont plus grandes que π peut valoir : 2, 3, 4, 5 tandis que dans le cas croisé le nombre de sommes $> \pi$ peut valoir : 3, 4, 5, 6.

2.6 Les relations entre les angles dans le cas non orienté

Les relations obtenues ci-dessus dans le cas orienté se traduisent dans le cas non orienté en tenant compte du signe des angles. Dans le cas convexe, on peut supposer que tous les angles orientés sont positifs et, vu 2.22, les relations entre les angles non orientés sont exactement les mêmes que celles du cas orienté :

2.25 Proposition. *Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Il vérifie les relations $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B, \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_D, \mathcal{R}_P, \mathcal{R}_P^1$ et \mathcal{R}_P^2 .*

2.26 Remarque. Dans le cas convexe, les relations \mathcal{R}_P^i sont conséquences des relations $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B, \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_D$ et \mathcal{R}_P , voir 3.7 ci-dessous ou 4.4.

Pour les cas concave et croisé, les résultats sont les suivants :

2.27 Proposition. 1) Soit $ABCD$ un quadrilatère concave et supposons, par exemple, le point D intérieur au triangle ABC . On peut alors supposer que les angles orientés α et γ' sont négatifs et tous les autres positifs et, sur les angles non orientés, les relations de type \mathcal{R}_A deviennent alors $\beta' + \gamma - \gamma' + \delta = \pi$, $-\gamma' + \delta + \delta' - \alpha = \pi$, $\delta' - \alpha + \alpha' + \beta = \pi$ et $\alpha' + \beta + \beta' + \gamma = \pi$. La relation \mathcal{R}_P est inchangée et les relations \mathcal{R}_P^1 et \mathcal{R}_P^2 du cas orienté donnent deux relations qui s'obtiennent en changeant α et γ' en $-\alpha$ et $-\gamma'$.

On obtient par permutation circulaire des relations analogues dans le cas où ce sont les points A, B, C qui sont intérieurs au triangle formé par les autres.

2) Soit $ABCD$ un quadrilatère croisé et supposons, par exemple, que les côtés $[AB]$ et $[CD]$ se coupent. On peut supposer les angles $\alpha, \beta, \gamma', \delta'$ positifs et les autres négatifs. On obtient les relations entre les angles non orientés : $\beta' + \gamma - \gamma' + \delta = \pi$, $\gamma' - \delta + \delta' + \alpha = \pi$, $\delta' + \alpha - \alpha' + \beta = \pi$ et $\alpha' - \beta + \beta' + \gamma = \pi$, \mathcal{R}_P est inchangée et les autres s'obtiennent en changeant les signes des angles négatifs.

3 Les quadrilatères, les similitudes directes et les angles orientés

Le groupe $\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ des similitudes directes opère sur les quadruplets de points distincts du plan en conservant les angles orientés. Cela donne une application du quotient dans \mathbf{U}^8 que nous étudions maintenant.

3.1 L'application Φ^+ : définition et injectivité

Rappelons que \mathcal{Q}_{00} (resp. \mathcal{Q}_0) désigne l'ensemble des quadruplets de points distincts (resp. non tous alignés).

3.1 Théorème. 1) L'application $\Phi^+ : \mathcal{Q}_{00} \rightarrow \mathbf{U}^8$ qui à (A, B, C, D) associe $\vec{q} := (\alpha, \alpha', \dots, \delta')$ (il s'agit des angles orientés) se factorise en $\bar{\Phi}^+ : \mathcal{Q}_{00}/\text{Sim}^+ \mathcal{P} \rightarrow [0, \pi]^8$.

2) L'ensemble \mathcal{Q}_0 est stable par similitude directe et la restriction de $\bar{\Phi}^+$ à $\mathcal{Q}_0/\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ est injective.

Démonstration. Le point 1) est clair. Pour 2), supposons que deux quadruplets (A, B, C, D) et (A_1, B_1, C_1, D_1) admettent les mêmes angles orientés : $(\alpha, \alpha', \dots, \delta') = (\alpha_1, \alpha'_1, \dots, \delta'_1)$. Il s'agit de montrer qu'ils sont équivalents sous $\text{Sim}^+ \mathcal{P}$. Comme ce groupe est doublement transitif sur \mathcal{P} on peut supposer $A = A_1$ et $B = B_1$ et il reste à montrer $C = C_1$ et $D = D_1$. Comme les points ne sont pas tous alignés, on peut supposer $D \notin (AB)$. On a alors $D_1 \notin (AB)$ (l'alignement se voit avec les angles égaux à 0 ou π). Les égalités $\beta = \beta_1$ et $\alpha + \alpha' = \alpha_1 + \alpha'_1$ montrent l'égalité des demi-droites $[BD) = [BD_1)$ et $[AD) = [AD_1)$ et il en résulte qu'on a $D = D_1$.

Si C n'est pas sur (AB) , C_1 non plus et on conclut de la même manière à l'égalité $C = C_1$. Si C est sur $[AB)$, C_1 aussi et l'égalité $\alpha' = \alpha'_1$ montre qu'on a $[AC) = [AC_1)$. Mais on a aussi $[DC) = [DC_1)$ avec $\delta = \delta_1$, donc $C = C_1$.

3.2 Remarque. Attention, le point 2) du théorème est en défaut pour les quadruplets alignés. En effet, dans ce cas, les angles (qui valent tous 0 ou π) ne suffisent pas à déterminer A, B, C, D modulo similitude.

3.2 L'image de \mathcal{Q}_g par Φ^+

Dans ce paragraphe on détermine l'image par l'application "angles" $\overline{\Phi^+} : \mathcal{Q}_g/\text{Sim}^+ \rightarrow \mathbf{U}^8$ de l'ensemble \mathcal{Q}_g des quadruplets en position générale, dans le cas orienté. Bien entendu, l'espace des quadrilatères modulo similitude $\mathcal{Q}_g/\text{Sim}^+$ étant réputé de dimension 4, son image n'est pas \mathbf{U}^8 tout entier qui est de dimension 8, il y a des relations entre les angles et nous en avons vu au paragraphe 2.4. Le théorème suivant assure qu'il n'y en a pas d'autres :

3.3 Théorème. *Un octuplet d'angles orientés $\vec{q} = (\alpha, \alpha', \dots, \delta') \in \mathbf{U}^8$ est dans l'image de \mathcal{Q}_g par Φ^+ si et seulement si il vérifie les relations $\mathcal{R}_A, \dots, \mathcal{R}_D$ (cf. 2.17), les trois relations $\mathcal{R}_P, \mathcal{R}_P^1$ et \mathcal{R}_P^2 (cf. 2.19 et 2.20) et les conditions de signe $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$ et \mathcal{S}_D (cf. 2.14).*

3.4 Notation. On note \mathcal{V}^+ le sous-ensemble de \mathbf{U}^8 vérifiant les relations $\mathcal{R}_A, \dots, \mathcal{R}_D, \mathcal{R}_P, \mathcal{R}_P^1, \mathcal{R}_P^2$ et les conditions de signe $\mathcal{S}_A, \dots, \mathcal{S}_D$. On a donc $\Phi^+(\mathcal{Q}_g) = \mathcal{V}^+$.

3.5 Remarque. Attention, dans le cas où certains angles sont nuls, les relations de type \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_P ne suffisent pas à assurer que \vec{q} est dans l'image de l'ensemble \mathcal{Q}_{00} des quadruplets de points distincts. Supposons par exemple $\alpha = \alpha' = 0$. Si q provient d'un quadruplet A, B, C, D , les quatre points sont nécessairement alignés, de sorte que tous les angles valent 0 ou π . Pourtant, si l'on prend β, γ, δ arbitraires et $\beta' = \pi - \beta - \gamma$, $\gamma' = \beta - \delta$ et $\delta' = \pi - \beta$, on vérifie que toutes les relations sont satisfaites.

Cet exemple montre aussi que si l'on suppose $\alpha' = 0$, donc A, B, C alignés, les relations n'impliquent pas $\gamma = 0$ ou π , ce que la géométrie imposerait à un quadruplet.

Démonstration. (de 3.3) Les conditions sont nécessaires en vertu de 2.17, 2.19, 2.20 et 2.14.

Inversement, supposons \vec{q} donné vérifiant les conditions ci-dessus. Modulo similitude on peut imposer deux points A et B quelconques. On considère alors les demi-droites $[Ac)$ et $[Bc)$ définies par les égalités d'angles orientés $([Ac), [AB)) = \alpha'$ et $([BA), [Bc)) = \beta + \beta'$. En vertu de 1.5, les conditions de signe montrent qu'elles se coupent en un point qu'on appelle C et qui vérifie donc $(\vec{AC}, \vec{AB}) = \alpha'$ et $(\vec{BA}, \vec{BC}) = \beta + \beta'$. On montre de même l'existence de D tel que $(\vec{AD}, \vec{AB}) = \alpha + \alpha'$ et $(\vec{BA}, \vec{BD}) = \beta$. On a donc construit un quadrilatère $ABCD$ et il reste à voir que ses angles sont bien égaux à $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$. C'est le cas, par construction, pour α' et β .

Par Chasles on a $(\vec{AD}, \vec{AC}) = (\vec{AD}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{AC}) = \alpha + \alpha' - \alpha' = \alpha$ et on montre de même $(\vec{BD}, \vec{BC}) = \beta'$. On a ensuite $(\vec{DB}, \vec{DA}) = (\vec{DB}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{AD}) + (\vec{AD}, \vec{DA}) = -\beta - (\alpha + \alpha') + \pi = \delta'$ en vertu de \mathcal{R}_C et on montre de même $(\vec{CB}, \vec{CA}) = \gamma$.

Il reste le cas de δ et γ' . Appelons $\delta_0 = (\vec{DC}, \vec{DB})$ et $\gamma'_0 = (\vec{CA}, \vec{CD})$ les angles du quadrilatère construit. Avec \mathcal{R}_B et \mathcal{R}_C on montre qu'on a $\gamma' + \delta = \alpha' + \beta = \gamma'_0 + \delta_0$. En écrivant la relation \mathcal{R}_P on voit que δ et δ_0 vérifient l'équation (*) en $x : u \cos x + v \sin x = 0$, avec :

$$u = -\sin \alpha' \sin \beta' \sin(\alpha' + \beta) \sin(\alpha + \alpha' + \beta) \text{ et}$$

$$v = \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha' + \beta + \beta') + \sin \alpha' \sin \beta' \cos(\alpha' + \beta) \sin(\alpha + \alpha' + \beta).$$

Pour montrer que l'on a $\delta = \delta_0$, il suffit donc de voir que (*) a une unique solution vérifiant les conditions du théorème. On note que u est non nul, sauf si $\alpha' + \beta$ vaut 0 ou π . En effet, les conditions de signe assurent que α', β' sont distincts de 0, π et il en est de même de $\alpha + \alpha' + \beta = \pi - \delta'$. Si u est non nul, l'équation (*) admet deux solutions, δ et $\delta + \pi$, mais la condition \mathcal{S}_A assure que δ, δ_0 et β' sont de même signe ce qui ne laisse qu'une possibilité. On a donc $\delta = \delta_0$ et, par suite, $\gamma' = \gamma'_0$.

Il reste le cas $\alpha' = -\beta + k\pi$. On vérifie que l'équation (*) devient $0 = 0$ et on doit utiliser les équations provenant des relations \mathcal{R}_P^i . Celle associée à \mathcal{R}_P^2 est de la forme $r \cos x + s \sin x = 0$ avec, dans le cas¹¹ $\alpha' = -\beta + k\pi$:

$$r = \sin \alpha \sin \beta \sin \beta' \sin(\alpha + \beta') \text{ et } s = \sin^2 \alpha \cos \beta' \sin(\beta + \beta') + \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \sin^2 \beta'.$$

11. Le lecteur vérifiera que l'ajout de π à α' ne change pas les équations.

On voit que r est non nul sauf si $\beta' = -\alpha + k\pi$. Si r est non nul on conclut comme précédemment. Si $\beta' = -\alpha + k\pi$, la seconde équation s'évanouit aussi.

Dans ce cas, on utilise l'équation associée à \mathcal{R}_P^1 qui donne :

$$\sin^2(\alpha - \beta) \sin^2 x = \sin^2 \beta \sin^2(x - \alpha).$$

Comme $\alpha - \beta$ est égal à $\alpha + \alpha'$, il est du signe de β en vertu de \mathcal{S}_C . Comme $x - \alpha$ est égal à $\pi - (\gamma + \gamma')$, il est du signe de $\delta = x$ en vertu de \mathcal{S}_A . L'équation se résume donc à $\sin(\alpha - \beta) \sin x = \sin \beta \sin(x - \alpha)$. Elle est encore de la forme $p \cos x + q \sin x = 0$ avec $p = \sin \alpha \sin \beta \neq 0$ et n'a donc qu'une solution x du signe de β' .

3.6 Exemples. 1) Voici un exemple où la relation \mathcal{R}_P n'implique pas les autres. On prend $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = -60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\beta' = -110^\circ$, $\gamma = -70^\circ$, γ' quelconque, $\delta = -\gamma'$, $\delta' = 60^\circ$. On a les relations de type \mathcal{R}_A , la relation \mathcal{R}_P , mais pas en général \mathcal{R}_P^1 ni \mathcal{R}_P^2 . La relation \mathcal{R}_P^2 donne l'équation en $x = \delta$:

$$\sqrt{3} \sin 70 (\sin 70 - \sin 50) \cos x + (\sin^2 70 - \sqrt{3} \sin 50 \cos 70) \sin x = 0$$

qui admet les deux solutions $x = -33.3637^\circ$ et $x + 180^\circ = 146.6363^\circ$, la seconde devant être rejetée à cause de la condition de signe \mathcal{S}_A .

On notera que, dans ce cas, la relation \mathcal{R}_P^1 donne l'équation :

$$3 \sin 70 \cos^2 x + (\sqrt{3} \sin 70 + 3 \cos 70) \sin x \cos x + (\sqrt{3} \cos 70 - 4 \sin 50) \sin^2 x = 0$$

qui admet quatre solutions : $x = -33.3637^\circ$, 146.6363° , -120° et 60° .

2) Voici un exemple où les trois équations \mathcal{R}_P sont nécessaires. On prend $\alpha = 120^\circ$, $\alpha' = -60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\beta' = -120^\circ$, on en déduit $\gamma = -60^\circ$ et $\delta' = 60^\circ$, ainsi que $\gamma' = -\delta$. Les équations provenant de \mathcal{R}_P et \mathcal{R}_P^2 sont toutes deux triviales. Celle provenant de \mathcal{R}_P^1 donne deux solutions $\delta = -30^\circ$ et $\delta = -120^\circ$ et on élimine la seconde grâce à la condition de signe sur $\alpha, \gamma', \delta + \delta'$ (ce que la géométrie confirme clairement : il s'agit de la figure formée de deux triangles équilatéraux accolés).

3) Les conditions algébriques du type \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_P ne suffisent pas à assurer qu'un octuplet $\vec{q} = (\alpha, \alpha', \dots, \delta') \in \mathbf{U}^8$ est dans l'image de Φ^+ , les conditions de signe sont nécessaires comme le montre l'exemple :

$$\vec{q} = (120^\circ, -60^\circ, 60^\circ, -120^\circ, -60^\circ, 120^\circ, -120^\circ, 60^\circ).$$

3.7 Remarque. En revanche, dans le cas convexe, les relations \mathcal{R}_P^i sont conséquences des relations $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B, \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_D$ et \mathcal{R}_P . En effet, on peut encore choisir comme variables $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \delta$ et on calcule $\gamma = \pi - \alpha' - \beta - \beta'$,

$\delta' = \pi - \alpha - \alpha' - \beta$ et $\gamma' = \alpha' + \beta - \delta$. La relation \mathcal{R}_P donne l'équation (*) vue ci-dessus, $u \cos \delta + v \sin \delta = 0$, avec

$$u = -\sin \alpha' \sin \beta' \sin(\alpha' + \beta) \sin(\alpha + \alpha' + \beta).$$

Comme $\alpha', \beta', \alpha' + \beta$ et $\alpha + \alpha' + \beta$ sont de même signe, disons dans $]0, \pi[$, u est non nul et on a $\cotan \delta = -\frac{v}{u}$. Par ailleurs, la relation \mathcal{R}_P^1 s'écrit sous la forme $a \cos^2 \delta + b \cos \delta \sin \delta + c \sin^2 \delta = 0$ avec :

$$a = \sin \alpha' \sin \beta \sin \beta' \sin(\alpha + \alpha' + \beta),$$

$$b = -\sin(\alpha + \alpha') \sin(\beta + \beta') \sin(\alpha' + \beta)$$

$$+ \sin \alpha' \sin \beta (\cos \beta' \sin(\alpha + \alpha' + \beta) - \sin \beta' \cos(\alpha + \alpha' + \beta)),$$

$$c = \sin(\alpha + \alpha') \sin(\beta + \beta') \cos(\alpha' + \beta) - \sin \alpha' \sin \beta \cos \beta' \cos(\alpha + \alpha' + \beta).$$

On vérifie alors¹² qu'on a $av^2 - buv + cu^2 = 0$, ce qui montre que \mathcal{R}_P implique \mathcal{R}_P^1 . Le calcul est analogue pour \mathcal{R}_P^2 .

3.3 La structure de variété de \mathcal{V}^+

Nous étudions maintenant l'ensemble \mathcal{V}^+ introduit ci-dessus :

3.8 Théorème. *L'ensemble \mathcal{V}^+ défini en 3.4 ci-dessus est une sous-variété analytique de dimension 4 de \mathbf{U}^8 .*

Démonstration. Les conditions du type \mathcal{S}_A étant clairement ouvertes, il suffit de montrer qu'en chaque point de \mathcal{V}^+ la matrice $N(q)$ des dérivées partielles des relations¹³ $\mathcal{R}_A, \dots, \mathcal{R}_D, \mathcal{R}_P, \mathcal{R}_P^1$ et \mathcal{R}_P^2 par rapport aux variables de $\vec{q} = (\alpha, \alpha', \beta, \dots, \delta')$ est de rang 4, voir par exemple [1] 2.1.2. Si l'on se limite aux relations $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B, \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_D$, on a vu que la matrice est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice des dérivées partielles de la relation \mathcal{R}_P est le produit par $p = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta = \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' \sin \delta'$ de la matrice ligne :

$$\cotan \alpha, -\cotan \alpha', \cotan \beta, -\cotan \beta', \cotan \gamma, -\cotan \gamma', \cotan \delta, -\cotan \delta'.$$

12. Avec un logiciel de calcul formel!

13. Par rapport à 2.19 et 2.20 on les met sous la forme premier membre moins second membre.

Si l'on considère la matrice extraite de $N(q)$ obtenue en ne gardant que les lignes 1, 2, 3, 5 et les quatre premières colonnes, le mineur ainsi obtenu vaut (au signe près) $p(\cotan \alpha' + \cotan \beta)$. Comme \vec{q} est dans \mathcal{V}^+ , les angles sont distincts de 0 et π , de sorte que p est non nul et le mineur n'est nul que si l'on a $\alpha' + \beta = k\pi$. Si cette condition n'est pas réalisée, la matrice est de rang 4.

Mais on a $\alpha' = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ et $\beta = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB})$. La condition $\alpha' + \beta \equiv 0 \pmod{\pi}$ équivaut donc à $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = 0 \pmod{\pi}$, autrement dit au fait que les droites (AC) et (DB) ont parallèles.

Mais, comme la relation \mathcal{R}_P^1 (resp. \mathcal{R}_P^2) est obtenue à partir de \mathcal{R}_P en échangeant B et C (resp. A et B), la condition analogue se traduit par le parallélisme de (AB) et (DC) (resp. (BC) et (AD)). Si la matrice $N(q)$ n'est pas de rang 4 on voit que $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales sont parallèles, ce qui est absurde!

Nous précisons maintenant les liens entre le quotient $\mathcal{Q}_g/\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ et la variété analytique \mathcal{V}^+ .

3.9 Lemme. *Il existe une section analytique s de $\Phi^+ : \mathcal{Q}_g \rightarrow \mathcal{V}^+$.*

Démonstration. Soit $\vec{q} = (\alpha, \dots, \delta') \in \mathcal{V}^+$. On lui associe d'abord le quadruplet $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$. On impose ensuite $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$. Les points C et D sont obtenus comme intersection de demi-droites (voir la démonstration de 3.3), donc donnés par les formules de 1.5 :

$$C = \left(\frac{\sin(\beta + \beta') \cos \alpha'}{\sin(\alpha' + \beta + \beta')}, \frac{-\sin(\beta + \beta') \sin \alpha'}{\sin(\alpha' + \beta + \beta')} \right) \text{ et}$$

$$D = \left(\frac{\sin \beta \cos(\alpha + \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha' + \beta)}, \frac{-\sin \beta \sin(\alpha + \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha' + \beta)} \right).$$

Comme les sommes $\alpha' + \beta + \beta' = \pi - \gamma$ et $\alpha + \alpha' + \beta = \pi - \delta'$ sont distinctes de 0 et π , l'application s qui à \vec{q} associe (A, B, C, D) est analytique et c'est une section de Φ^+ en vertu de 3.3.

3.10 Corollaire. *L'application $\overline{\Phi}^+$ est un homéomorphisme de $\mathcal{Q}_g/\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ (muni de la topologie quotient) sur \mathcal{V}^+ .*

Démonstration. En effet, l'application est continue par définition de la topologie quotient, bijective et bicontinue car $(\overline{\Phi}^+)^{-1}$ est égale à $\psi \circ s$ où ψ désigne la projection canonique de \mathcal{Q}_g sur le quotient.

3.11 Corollaire. *La variété \mathcal{V}^+ est isomorphe au quotient $\mathcal{Q}_g/\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ dans la catégorie des variétés analytiques. Ce quotient est donc une variété analytique de dimension 4.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si l'on a une application analytique f de \mathcal{Q}_g dans une variété analytique U , invariante par $\text{Sim}^+ \mathcal{P}$, elle se factorise par Φ^+ , c'est-à-dire qu'il existe $g : \mathcal{V}^+ \rightarrow U$ telle que $g \circ \Phi^+ = f$. Posons $g = f \circ s$ et soit Q un quadrilatère. Il s'agit de montrer qu'on a $f \circ s \circ \Phi^+(Q) = f(Q)$. Mais, si $Q' = s \circ \Phi^+(Q)$, on a $\Phi^+(Q') = \Phi^+(Q)$ (car s est une section de Φ^+). Vu l'injectivité de $\overline{\Phi}^+$, cela signifie que Q et Q' sont semblables et ils ont alors même image par f .

3.4 Les composantes connexes de \mathcal{V}^+

3.4.1 Description de \mathcal{V}^+ avec quatre paramètres

Maintenant que nous avons identifié le quotient $\mathcal{Q}_g/\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ à la variété analytique \mathcal{V}^+ , il s'agit de la décrire et la première question naturelle est celle de ses composantes connexes. Pour cela, nous allons donner une représentation plus simple de \mathcal{V}^+ qui n'utilise que quatre paramètres (autant que sa dimension). On pose $\mathbf{U}^* =] - \pi, 0[\cup] 0, \pi[$.

3.12 Proposition. *L'application $p : \mathcal{V}^+ \rightarrow (\mathbf{U}^*)^4$ qui associe à α, \dots, δ' le quadruplet $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ est un isomorphisme analytique de \mathcal{V}^+ sur l'ouvert \mathcal{W}^+ de $(\mathbf{U}^*)^4$ formé des quadruplets tels que $\alpha + \alpha', \beta, \alpha + \alpha' + \beta$ soient de même signe, ainsi que $\alpha', \beta + \beta', \alpha' + \beta + \beta'$.*

Démonstration. On reprend la preuve de 3.3. On considère deux points A et B distincts quelconques. Les conditions de la proposition montrent l'existence d'un point C vérifiant $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \alpha'$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \beta + \beta'$ et d'un point D vérifiant $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \alpha + \alpha'$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \beta$. Comme α', β et β' ne sont ni nuls ni égaux à π , les quatre points sont distincts, de sorte qu'on a toutes les relations de type \mathcal{R}_A ou \mathcal{R}_P . Si les points sont en position générale, on a gagné car $\vec{q}(A, B, C, D)$, qui est dans \mathcal{V}^+ , se projette sur $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$. Il suffit donc de montrer que les angles de $ABCD$ sont distincts de $0, \pi$. C'est évident pour $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ et facile pour γ et δ' avec les relations de type \mathcal{R}_A . Pour δ et γ' , la relation \mathcal{R}_P montre que leurs sinus sont nuls en même temps. La relation \mathcal{R}_P^1 montre que s'ils sont nuls, $\sin(\gamma + \gamma')$ ou $\sin(\delta + \delta')$ l'est aussi et \mathcal{R}_P^2 montre alors que tous deux le sont. Mais cela implique que $\sin \gamma$ et $\sin \delta'$ sont nuls et c'est absurde.

On voit ainsi que $p(\mathcal{V}^+)$ est bien en bijection avec l'ensemble indiqué. L'analyticité de la réciproque résulte des relations vues dans la preuve de 3.3. Par exemple, si l'on pose $x = \delta$, on a la relation $(*) : u \cos x + v \sin x = 0$ et, si $\alpha' + \beta \neq k\pi$, on a $u \neq 0$, donc $x = \text{Arctan} \left(-\frac{v}{u} \right)$. Comme u, v sont analytiques, x aussi. Le raisonnement est analogue dans le cas $\alpha' + \beta = k\pi$ en utilisant les relations \mathcal{R}_P^i .

3.4.2 Les composantes connexes

Pour désigner commodément les composantes de $\mathcal{Q}_g/\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ nous introduisons la notion de quadrilatère direct. Attention, si cette notion est naturelle dans le cas des quadrilatères convexes et concaves, elle est beaucoup plus arbitraire dans le cas des quadrilatères croisés. Le lecteur prouvera la proposition suivante :

3.13 Proposition-Définition. 1) Un quadrilatère convexe $ABCD$ est dit **direct** si le lacet obtenu en parcourant les côtés dans l'ordre A, B, C, D, A est direct¹⁴. C'est le cas si et seulement si les angles α, \dots, δ' sont tous négatifs.

2) Un quadrilatère concave $ABCD$ est dit **direct** si le lacet obtenu en parcourant les côtés dans l'ordre A, B, C, D, A est direct. C'est le cas si et seulement si six des angles α, \dots, δ' sont négatifs et deux positifs.

3) Un quadrilatère croisé $ABCD$ est dit **direct** si le quadrilatère convexe associé le plus petit dans l'ordre lexicographique¹⁵ l'est. C'est le cas si et seulement si l'angle α est négatif.

Une isométrie positive (resp. négative) conserve les quadrilatères directs (resp. les change en quadrilatères indirects).

3.14 Corollaire. L'espace $\mathcal{Q}_g/\text{Sim}^+ \mathcal{P}$ des quadrilatères modulo similitude directe possède 14 composantes connexes dont voici la liste.

- 1) Les quadrilatères convexes directs (resp. indirects) (deux composantes).
- 2) Les quadrilatères concaves directs (resp. indirects) avec A (resp. B, C, D) intérieur au triangle formé par les trois autres (huit composantes).
- 3) Les quadrilatères croisés directs (resp. indirects) avec $[AB]$ et $[CD]$ (resp. $[AD]$ et $[BC]$) qui se coupent (quatre composantes).

Démonstration. Il suffit de traduire ces conditions sur \mathcal{V}^+ voire \mathcal{W}^+ . Sur les angles le passage de direct à indirect se fait en changeant tous les signes. On peut donc supposer, par exemple, $\alpha' > 0$. Les divers cas correspondent alors à $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ tous positifs (cas convexe), α', β, β' positifs et $\alpha < 0$ (cas concave avec D intérieur, voir 2.15) et α, β positifs et α', β' négatifs (cas croisé avec $[AB]$ et $[CD]$ qui se coupent) ou $\alpha', \beta > 0$ et $\alpha, \beta' < 0$ (cas où $[AD]$ et $[BC]$ se coupent). Comme il y a seize possibilités de signes pour $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, le lemme suivant montre qu'on a ainsi toutes les possibilités :

3.15 Lemme. Il n'y a pas de point $(\alpha, \alpha', \beta, \beta') \in \mathcal{W}^+$ avec $\alpha, \alpha' > 0$ et $\beta, \beta' < 0$ ou l'inverse.

14. Cela signifie qu'il "tourne dans le sens trigonométrique", savamment, que l'indice d'un point intérieur à $ABCD$ par rapport à ce chemin vaut 1.

15. Il s'agit de $ABDC$ (resp. $ACBD$) si $[AD]$ et $[BC]$ (resp. $[AB]$ et $[CD]$) se coupent.

Démonstration. Posons $\beta = -b$ et $\beta' = -b'$ avec $\alpha, \alpha', b, b' \in]0, \pi[$. Vu les requêtes de signes on doit avoir $\alpha + \alpha' > \pi$, $b + b' > \pi$ et, pour les signes de $\alpha' + \beta + \beta'$ et $\alpha + \alpha' + \beta$, $b + b' > \pi + \alpha'$ et $\alpha + \alpha' > \pi + b$, d'où $b + b' + \alpha > 2\pi + b$ soit $b' + \alpha > 2\pi$ ce qui est impossible.

Il est clair qu'on obtient ainsi quatorze ouverts disjoints et non vides de \mathbf{R}^4 définis par ces conditions de signe et il reste à montrer qu'ils sont connexes. En fait, ils sont même convexes puisque définis comme intersections de demi-espaces. Par exemple, pour le cas (convexe) où α, α', β et β' sont tous positifs, la composante est l'ensemble défini par les inégalités $0 < \alpha, \alpha', \beta, \beta' < \pi$, ainsi que par $\alpha + \beta + \beta' < \pi$ et $\alpha' + \beta + \beta' < \pi$.

4 Les quadrilatères modulo le groupe de toutes les similitudes

Nous étudions maintenant l'espace des quadrilatères modulo le groupe $\text{Sim } \mathcal{P}$ tout entier. Comme ce groupe conserve les angles non orientés, nous allons décrire le quotient comme un sous-ensemble de $[0, \pi]^8$.

4.1 Le cas non orienté : injectivité

On a un résultat analogue à 3.1 dans le cas non orienté :

4.1 Théorème. 1) L'application $\Phi : \mathcal{Q}_{00} \rightarrow [0, \pi]^8$ qui à (A, B, C, D) associe $q := (\alpha, \alpha', \dots, \delta')$ (il s'agit cette fois des angles non orientés) se factorise en $\bar{\Phi} : \mathcal{Q}_0 / \text{Sim } \mathcal{P} \rightarrow [0, \pi]^8$.

2) L'ensemble \mathcal{Q}_0 est stable par similitude et la restriction de $\bar{\Phi}$ à $\mathcal{Q}_0 / \text{Sim } \mathcal{P}$ est injective.

Démonstration. 1) La conservation des angles non orientés par similitude assure l'existence de $\bar{\Phi}$.

2) Il faut voir que q détermine A, B, C, D modulo similitude. La démonstration consiste à se ramener au cas orienté 3.1.

Nous traitons seulement le cas où les points en position générale, le lecteur se chargera du cas où certains points sont alignés, ou se reportera au paragraphe suivant. Lorsque les points sont en position générale, la donnée des angles non orientés permet de savoir si $ABCD$ est convexe, concave ou croisé en vertu de 2.22. S'il est convexe, tous les angles orientés sont de même signe et, quitte à faire une réflexion, on peut les supposer tous positifs, donc égaux aux angles non orientés. Le quadrilatère est alors déterminé en vertu de 3.1.

Supposons maintenant $ABCD$ concave. On a vu en 2.23.1 que la connaissance des angles non orientés permet de savoir quel est le point qui est intérieur au triangle formé par les autres. Si c'est, disons, D , on sait par 2.15 que les angles orientés sont tous de même signe (disons positifs) sauf α et δ' . On connaît donc les angles orientés et on conclut par 3.1.

Il reste le cas où $ABCD$ est croisé. Dans ce cas 2.23.2 indique quel est le quadrilatère associé qui est convexe. On connaît alors les signes des angles orientés par 2.15 et on conclut encore par 3.1.

4.2 Remarques. 1) Comme dans le cas orienté, le point 2) du théorème est en défaut pour les quadruplets alignés. Dans ce cas, si les points sont distincts, on peut utiliser les rapports de longueurs, voir Annexe 1 §.

2) Il reste à préciser l'image de Φ . On a évidemment $\Phi = v \circ \Phi^+$ où $v : \mathbf{U}^8 \rightarrow [0, \pi]^8$ désigne l'application valeur absolue : $v(\alpha, \dots, \delta') = (|\alpha|, \dots, |\delta'|)$. Cela montre que l'image de Φ est l'image par v de celle de Φ^+ mais il n'est pas évident d'explicitier cette image. Le cas des quadrilatères convexes est étudié en 4.4.

4.2 Une autre preuve de 4.1.2

Nous donnons ici une preuve directe de 4.1.2 (c'est-à-dire qui ne passe pas par les angles orientés).

Il faut voir que q détermine A, B, C, D modulo similitude. Supposons par exemple que A, B, C ne sont pas alignés¹⁶. Comme on travaille modulo similitude, on peut fixer A et B et imposer que C soit dans l'un des demi-plans limités par (AB) . La demi-droite $[BC)$ est alors bien déterminée par l'angle \widehat{ABC} . Le lemme crucial est le suivant :

4.3 Lemme. *On reprend les notations précédentes, on note $[BA')$ et $[BC')$ les demi-droites opposées à $[BA)$ et $[BC)$ et on pose $\widehat{B} = \widehat{ABC}$. On a les possibilités suivantes pour le point D :*

1) $D \in [BA)$. Ce cas est caractérisé par $\beta = 0$ et on a alors $\widehat{B} = \beta' = \beta + \beta'$.

2) $D \in [\widehat{ABC}]$. Ce cas est caractérisé par $\beta + \beta' + \alpha' + \gamma = \pi$ et on a alors $\widehat{B} = \beta + \beta'$.

3) $D \in [BC)$. Ce cas est caractérisé par $\beta' = 0$ et on a alors $\widehat{B} = \beta = \beta + \beta'$.

4) $D \in [\widehat{CBA'})$. Ce cas est caractérisé par $\beta - \beta' + \alpha' + \gamma = \pi$ et on a alors $\widehat{B} = \beta - \beta'$.

16. Sur les angles cela se repère en notant par exemple que α' n'est égal ni à 0 ni à π .

- 5) $D \in [BA')$. Ce cas est caractérisé par $\beta = \pi$ et on a alors $\widehat{B} = \beta - \beta'$.
- 6) $D \in [A'BC')$. Ce cas est caractérisé par $\beta + \beta' - \alpha' - \gamma = \pi$ et on a alors $\widehat{B} = 2\pi - \beta - \beta'$.
- 7) $D \in [BC')$. Ce cas est caractérisé par $\beta' = \pi$ et on a alors $\widehat{B} = \beta' - \beta$.
- 8) $D \in [ABC')$. Ce cas est caractérisé par $\beta' - \beta + \alpha' + \gamma = \pi$ et on a alors $\widehat{B} = \beta' - \beta$.

Démonstration. C'est une conséquence de la relation de Chasles géométrique jointe à la somme des angles du triangle ABC . Montrons par exemple le point 4). Le point crucial est de montrer que C est dans le secteur $[\widehat{ABD}]$. En effet, on a alors $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD}$, soit $\beta = \widehat{B} + \beta'$. Pour cela, on note que C, D sont dans le même demi-plan limité par (AB) . De plus, comme D est dans $[A'BC]$, A' et C sont de part et d'autre de (BD) en vertu de 1.9, donc C et A sont du même côté et on a le résultat.

On peut maintenant prouver le théorème. Le lemme montre d'abord que \widehat{B} est déterminé par q , donc le triangle ABC est déterminé en vertu du second cas d'égalité des triangles puisqu'on a AB et les angles \widehat{B} et $\widehat{A} = \alpha'$. Par ailleurs, en vertu du lemme, la position de la demi-droite $[BD)$ par rapport aux zones limitées par les droites (BA) et (BC) est elle aussi déterminée par q et cette demi-droite est alors déterminée grâce à $\beta = \widehat{ABD}$ par exemple. Le point D est donc dans l'un des demi-plans V^+ limités par la droite (AB) . Comme on a $\widehat{BDA} = \delta'$, le point D est sur l'arc capable limité par $[AB]$, correspondant à cet angle, et situé dans V^+ . Il est donc déterminé par cet arc et la demi-droite $[BD)$.

4.3 L'image de Φ dans le cas convexe

Dans le cas convexe, on peut préciser l'image de Φ et on obtient une description de l'ensemble des quadrilatères convexes modulo similitude :

4.4 Théorème. *On reprend les notations de 4.1. L'application $\overline{\Phi} : \overline{\mathcal{Q}} := \mathcal{Q}/\text{Sim } \mathcal{P} \rightarrow]0, \pi[^8$ est une bijection de $\overline{\mathcal{Q}}$ sur l'ensemble des octuplets qui vérifient les relations $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B, \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_D, \mathcal{R}_P$. Un tel octuplet sera appelé **quadrilatère virtuel** (sous-entendu convexe).*

Démonstration. L'injectivité de $\overline{\Phi}$ résulte de 4.1 et les points de l'image vérifient les relations en vertu de 2.25. Pour voir que l'image est exactement donnée par les relations, on considère un octuplet $q = (\alpha, \alpha', \dots, \delta')$ vérifiant les relations prescrites et il s'agit de montrer qu'il provient d'un quadrilatère convexe $ABCD$. La preuve est analogue à celle de 3.3 mais un peu plus simple. On choisit deux points distincts A, B quelconques et l'un

des demi-plans limités par (AB) . On considère, dans ce demi-plan, les demi-droites $[Ax)$ et $[By]$ vérifiant $\widehat{xAB} = \alpha'$ et $\widehat{yBA} = \beta + \beta' < \pi$. Comme les angles vérifient \mathcal{R}_D , on a $\alpha' + \beta + \beta' < \pi$ ce qui, en vertu du critère d'intersection 1.12, assure l'existence de C . On montre de même celle de D avec les angles β et $\alpha + \alpha'$.

Montrons que le point D est dans le secteur $[\widehat{ABC}]$. En effet, il est du même côté que C par rapport à (AB) et s'il était de l'autre côté de A par rapport à (BC) c'est C qui serait dans $[\widehat{ABD}]$. Mais alors, par la relation de Chasles géométrique 1.10 on aurait $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD}$ et c'est contradictoire avec les égalités $\widehat{ABD} = \beta$ et $\widehat{ABC} = \beta + \beta'$. On en déduit que la demi-droite $[BD)$ coupe $[AC)$ en vertu de 1.9. On montre de même que $[AC)$ coupe $[BD)$ de sorte que les segments $[AC)$ et $[BD)$ se coupent, ce qui assure que $ABCD$ est convexe.

Le quadrilatère admet les angles $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ par construction et il reste à montrer que les angles $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$ sont les bons. C'est clair pour γ et δ' grâce à \mathcal{R}_D et \mathcal{R}_C et à la somme des angles de ABC et ABD . Pour γ' et δ il suffit de montrer l'unicité des angles vérifiant les relations données. Mais \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B donnent la somme $\gamma' + \delta = \alpha' + \beta$. Si l'on tire de là γ' en fonction de δ , la relation des sinus donne l'équation (*) déjà rencontrée dans la preuve de 3.3 : $u \cos \delta + v \sin \delta = 0$ avec $u = -\sin \alpha' \sin \beta' \sin(\alpha' + \beta) \sin(\alpha + \beta + \alpha')$. Il s'agit de trouver l'intersection du cercle unité avec une droite passant par l'origine et il y a une et une seule solution dans le demi-plan supérieur si u est non nul. Mais, comme les angles sont différents de 0 et π et que la relation \mathcal{R}_C impose $\alpha' + \beta < \alpha + \alpha' + \beta < \pi$, on a le résultat.

En fait, la preuve précédente montre plus précisément :

4.5 Corollaire. *L'application de \mathcal{Q} dans $]0, \pi[^4$ qui à $ABCD$ associe $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ induit une bijection $\overline{\Psi}$ de $\overline{\mathcal{Q}}$ sur la partie de $]0, \pi[^4$ qui vérifie $\alpha + \alpha' + \beta < \pi$ et $\alpha' + \beta + \beta' < \pi$.*

4.6 Remarque. Le lecteur curieux pourra essayer de traiter le cas des quadrilatères concaves et croisés à l'aide de la proposition 2.27.

5 Paramétrer les quadrilatères convexes avec quatre angles ?

La question est de décrire l'espace $\overline{\mathcal{Q}}$ des quadrilatères convexes modulo similitude au moyen d'angles, en nombre minimum. On notera que, dans le cas convexe, comme les angles orientés sont tous de même signe, on peut les

supposer positifs, donc égaux aux angles non orientés et il n'y a plus lieu de distinguer entre les deux sortes d'angles. Le corollaire 4.5 montre que $\overline{\mathcal{Q}}$ est de dimension 4 et qu'il peut être paramétré par les angles $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. On analyse maintenant les autres possibilités.

5.1 Le théorème local

La matrice $N(q)$ ci-dessous est la matrice des dérivées partielles des cinq relations $\mathcal{R}_A, \dots, \mathcal{R}_D$ et \mathcal{R}_P par rapport aux variables de $q = (\alpha, \alpha', \beta, \dots, \delta')$ (la dernière ligne a été divisée par $p = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta$ encore égal à $\sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' \sin \delta'$ et non nul) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cotan \alpha & -\cotan \alpha' & \cotan \beta & -\cotan \beta' & \cotan \gamma & -\cotan \gamma' & \cotan \delta & -\cotan \delta' \end{pmatrix}$$

5.1 Théorème. *Si dans un quadrilatère convexe on choisit un quadruplet x', y', z', t' parmi celles de $q = (\alpha, \alpha', \dots, \delta')$, il est déterminé (localement) par les autres si et seulement si la matrice extraite de $N(q)$ qui correspond aux colonnes x', y', z', t' est de rang 4.*

Reformulons ce résultat de manière plus précise :

5.2 Théorème. *Soit $q_0 = (\alpha_0, \dots, \delta'_0)$ un quadrilatère (convexe) virtuel au sens de 4.4. Soient x, y, z, t quatre variables parmi $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$ et notons x', y', z', t' les autres. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *La matrice extraite de $N(q_0)$ qui correspond aux colonnes x', y', z', t' est de rang 4.*

2) *Il existe une fonction analytique f , définie au voisinage de (x_0, y_0, z_0, t_0) dans \mathbf{R}^4 et à valeurs dans \mathbf{R}^4 , qui est telle qu'un octuplet $q = (x, \dots, t')$ voisin de q_0 est un quadrilatère virtuel si et seulement si on a $(x', y', z', t') = f(x, y, z, t)$.*

Démonstration. C'est le théorème des fonctions implicites.

5.3 Remarques. 0) Vu la relation $\mathcal{R}_A + \mathcal{R}_C = \mathcal{R}_B + \mathcal{R}_D$, pour calculer les rangs, il suffit de calculer les mineurs de la matrice obtenue en supprimant l'une des quatre premières lignes.

1) Avec la paramétrisation en $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$, $\overline{\mathcal{Q}}$ apparaît comme une variété analytique (les premières relations sont affines et la relation des sinus est analytique). Précisément, localement, c'est une hypersurface analytique dans

un espace affine de dimension 5. C'est donc une variété de dimension 4. En particulier elle ne peut se paramétrer par moins de quatre variables.

2) En revanche, si l'on utilise la paramétrisation par les fonctions circulaires, on a 16 variables, soumises à $8 + 8 + 1 = 17$ relations qui sont polynomiales de degré 2. En effet, la relation $\mathcal{R}_A : \beta' + \gamma + \gamma' + \delta = \pi$ équivaut à $\beta' + \gamma = \pi - (\gamma' + \delta)$ et se traduit en écrivant que les sinus et cosinus de ces deux quantités sont les mêmes : $\cos \beta' \cos \gamma - \sin \beta' \sin \gamma = \sin \gamma' \sin \delta - \cos \gamma' \cos \delta$ et $\sin \beta' \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta' = \sin \gamma' \cos \delta + \sin \delta \cos \gamma'$. On voit ainsi que $\overline{\mathcal{Q}}$ est une variété algébrique.

3) Maintenant qu'on a un objet géométrique, on peut se poser les questions rituelles à son sujet : est-il connexe, irréductible, lisse et quelle est sa dimension ? La réponse est dans le corollaire suivant qui précise 4.5 :

5.4 Corollaire. *L'application de \mathcal{Q} dans $]0, \pi[^4$ qui à $ABCD$ associe $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ induit un isomorphisme analytique $\overline{\Phi}$ de $\overline{\mathcal{Q}}$ sur l'ouvert de $]0, \pi[^4$ qui vérifie $\alpha + \alpha' + \beta < \pi$ et $\alpha' + \beta + \beta' < \pi$. La variété analytique $\overline{\mathcal{Q}}$ est irréductible, lisse, de dimension 4.*

Démonstration. On note que les mineurs de la matrice extraite correspondant aux colonnes $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$ sont tous égaux à $\cotan \delta + \cotan \gamma'$. Ils ne pourraient être nuls que si l'on avait $\gamma' = \pi - \delta$, donc $\gamma' + \delta = \pi$, condition qui ne peut être réalisée à cause de \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B . Dans ce cas, on a donc un difféomorphisme local donc aussi global en vertu de 4.5.

5.2 Classification combinatoire des quadruplets d'angles

5.2.1 Les stabilisateurs

Nous avons défini en 2.1 un quadrilatère comme un quadruplet modulo l'action de \mathbf{D}_4 et montré que cette opération induit des actions sur les angles, orientés ou non (voir 2.10 et 2.12). Il est clair que toute classification pertinente des angles ou des parties de l'ensemble des angles doit être invariante sous cette action. On s'intéresse ici aux parties à 4 éléments de l'ensemble des angles $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$ **non orientés**. Il y en a 70 et on regarde les orbites sous \mathbf{D}_4 . Leurs cardinaux sont donnés par ceux des stabilisateurs qui, *a priori*, sont égaux à 1, 2, 4 ou 8.

5.5 Exemples.

- Il n'y a pas de quadruplet invariant par \mathbf{D}_4 tout entier. En effet, l'invariance par les éléments de \mathbf{D}_4^- montre qu'il y aurait deux lettres accentuées et deux non. Mais alors l'invariance par les permutations circulaires est impossible (elles sont transitives sur les angles non accentués).

- Le stabilisateur de $\{\alpha', \beta, \gamma', \delta\}$ est le sous-groupe de Klein \mathbf{V}_4 formé de l'identité et des doubles transpositions $(AB)(CD)$, $(AC)(BD)$ et $(AD)(BC)$. L'orbite a donc deux éléments, l'autre étant $(\alpha, \beta', \gamma, \delta')$. On dira que ces éléments sont du type ${}^{17}\mathbf{V}_4^+$.

- Le stabilisateur de $\{\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'\}$ est le groupe \mathbf{V}_4 engendré par (AC) et (BD) . L'orbite a un autre élément qui est $\{\beta, \beta', \delta, \delta'\}$. On dira que ces éléments sont du type \mathbf{V}_4^- .

- Le stabilisateur de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ est le groupe des permutations circulaires $\mathbf{D}_4^+ \simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. L'autre élément de l'orbite est $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$. On dira que ces éléments sont du type \mathbf{D}_4^+ .

- Le stabilisateur de $\{\alpha, \alpha', \beta, \beta'\}$ est le groupe à 2 éléments engendré par $(AB)(CD)$. L'orbite contient 4 éléments correspondant aux 4 côtés du quadrilatère. On dira que ces éléments sont du type $(AB)(CD)$ (ou médiane).

- Le stabilisateur de $\{\alpha, \alpha', \beta, \delta'\}$ est le groupe à deux éléments engendré par (BD) . (On note que A est fixe.) L'orbite contient les quatre permutés circulaires de l'élément. On dira que ces éléments sont du type (BD) (ou diagonale).

Toutes ces orbites représentent 14 éléments.

- Le stabilisateur de $\{\alpha, \alpha', \beta, \gamma\}$ est réduit à l'identité. En effet, comme il y a deux angles de sommet A , seule une transformation conservant A peut laisser invariant le quadruplet. Mais, en dehors de Id , il n'y a que (BD) et elle transforme β en δ' . L'orbite contient 8 éléments, les quatre permutés circulaires ainsi que $\{\alpha, \alpha', \gamma', \delta'\}$ et ses permutés circulaires.

Plus généralement si le quadruplet fait intervenir trois points, l'un est double, au sens où il contient les deux angles de sommet ce point, et on peut supposer qu'il s'agit de A . Alors, comme le stabilisateur doit fixer A , la seule possibilité est (BD) . Il y a nécessairement un β ou un δ avec α, α' . Il doit donc y avoir les deux, et avec des accents différents. C'est le cas $\{\alpha, \alpha', \beta, \delta'\}$ vu ci-dessus et ses acolytes. Dans tous les autres cas, le stabilisateur est réduit à l'identité. C'est le cas si l'on a un γ (prime ou non).

Comptons ces orbites distinctes. On peut supposer que le double est α, α' . Il y a celles avec un γ et on peut supposer que c'est γ (celles avec γ' se déduisent par (BD)). Il y en a quatre (avec β, β', δ ou δ'). Il y a ensuite celles sans γ et il faut supposer que β et δ sont de même accent. Il y a encore deux orbites, avec β, δ et β', δ' . En tout cela donne 6 orbites à 8 éléments portant sur trois points, donc 48 éléments. On dira que ces éléments sont du type 3-générique.

Il y a une autre orbite à 8 éléments, celle de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta'\}$. Elle n'est pas

17. Le signe + indique qu'il est formé de permutations paires. Attention, ce n'est pas le même + que dans \mathbf{D}_4^+ ...

invariante par les rotations à cause du prime, ni par les autres pour la même raison. On peut vérifier que c'est la seule orbite de ce type¹⁸ mais c'est évident car on a le compte : $70 = 14 + 48 + 8$. On dira que ces éléments sont du type 4-générique.

- On notera qu'il n'y a pas de stabilisateur à 2 éléments engendré par la symétrie centrale $(AC)(BD)$.

5.2.2 Orbites et paramétrisation

Il est clair que la question de paramétrer $\overline{\mathcal{Q}}$ à partir de quatre angles ne dépend que de l'orbite de ces angles sous \mathbf{D}_4 . On peut maintenant discuter de la difficulté de cette paramétrisation en termes d'orbites. La proposition suivante résume les résultats :

5.6 Proposition. *Soit r un quadruplet d'angles non orientés (c'est-à-dire d'éléments de $]0, \pi[$), dont les noms sont choisis parmi $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$. On suppose que ces angles vérifient les inégalités conséquences¹⁹ de celles de 2.22. La question est de savoir s'il existe un ou plusieurs quadrilatères convexes admettant les angles donnés par r .*

1) *Si r est de type \mathbf{V}_4^+ ou diagonale, les autres angles ne sont pas déterminés par r , il y a soit une infinité de quadrilatères admettant ces angles, soit aucun. On dit que r est dans le **mauvais** cas.*

2) *Si r est du type médiane ou de l'un des types génériques, les quatre autres angles sont déterminés à partir de l'un d'entre eux, disons x , en résolvant une équation linéaire homogène en $\sin x, \cos x$. Il y a un unique quadrilatère convexe admettant ces angles. On dit qu'on est dans un cas **facile**.*

3) *Si r est du type \mathbf{V}_4^- , les quatre autres angles sont encore déterminés à partir de l'un d'entre eux, disons x , en résolvant une équation linéaire homogène en $\sin x, \cos x$. Il y a un unique quadrilatère convexe admettant ces angles. On dit qu'on est dans le cas **intermédiaire**²⁰.*

4) *Si r est du type \mathbf{D}_4^+ , les quatre autres angles sont déterminés à partir de l'un d'entre eux, disons x , en résolvant une équation de degré 4 en $\sin x, \cos x$, non homogène. Il y a en général plusieurs quadrilatères convexes admettant ces angles. On dit qu'on est dans le cas **difficile**.*

18. On choisit si c'est de type (3, 1) ou (1, 3) et ensuite où l'on met l'isolé.

19. Par exemple, si l'on a α, α' dans r , on doit avoir $\alpha + \alpha' < \pi$, conséquence de la relation $\alpha + \alpha' + \beta < \pi$.

20. Cette appellation est justifiée par le fait que l'équation en question n'est pas évidente, mais aussi parce qu'il existe des quadruplets non nécessairement convexes avec ces angles.

Démonstration. 1) Dans le mauvais cas, les angles considérés vérifient une relation de type \mathcal{R}_5 ou \mathcal{R}_A et ils ne sont donc pas indépendants. On conclut avec la remarque 5.3.1.

Avant d'aller plus loin, examinons ce que donnent les conditions locales 5.2 dans les différents cas ci-dessus.

5.7 Lemme. *On choisit quatre variables x, y, z, t extraites de $q = (\alpha, \alpha', \dots, \delta')$ et on considère la matrice obtenue à partir de $N(q)$ en enlevant les colonnes correspondant à ces variables et ses mineurs 4×4 .*

1) *Dans les cas faciles les mineurs sont tous égaux à $\cotan \gamma' + \cotan \delta$ (à permutation près) et ils sont non nuls.*

2) *Dans le cas intermédiaire les mineurs sont tous égaux à $\cotan \beta + \cotan \delta + \cotan \beta' + \cotan \delta'$ (à permutation près) et ils sont non nuls.*

3) *Dans le cas difficile les mineurs sont tous égaux à $\cotan \alpha' - \cotan \beta' + \cotan \gamma' - \cotan \delta'$ (à permutation près).*

Démonstration. Les valeurs des déterminants s'obtiennent par un simple calcul (rappelons qu'on peut, par exemple, supprimer la première ligne de $N(q)$). La non nullité dans le cas facile a été vue en 5.4.

Dans le cas intermédiaire on a $\cotan \beta + \cotan \beta' = \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin \beta \sin \beta'}$ et cette quantité est > 0 car on a $\beta + \beta' < \pi$ (par exemple à cause de \mathcal{R}_D). Le raisonnement est identique avec δ, δ' .

Revenons alors à 5.6.

2) Dans le cas facile, traitons par exemple la situation d'une orbite à 8 éléments : $\{\alpha, \alpha', \beta, \gamma\}$, les autres étant analogues. On déduit des données β' avec \mathcal{R}_D et δ' avec \mathcal{R}_C . On est donc dans le cas (facile) où il y a seulement deux inconnues γ', δ la somme étant connue. Si l'on pose $x = \delta$ la relation \mathcal{R}_P donne une équation linéaire $a \cos x + b \sin x = 0$. Il s'agit de couper le cercle unité par la droite $aX + bY = 0$. Comme $a = \sin \alpha' \sin(\alpha' + \beta + \gamma) \sin(\alpha + \alpha' + \beta) \sin(\alpha' + \beta)$ est non nul, il y a une unique solution $x \in]0, \pi[$. Comme les mineurs correspondants de $N(q)$ sont non nuls, l'application qui à q associe $(\alpha, \alpha', \beta, \gamma)$ est un difféomorphisme.

3) Le cas intermédiaire est le plus intéressant. Supposons par exemple $r = (\alpha, \alpha', \gamma, \gamma')$, avec les conditions $\alpha + \alpha' < \pi$, $\gamma + \gamma' < \pi$, $\alpha' + \gamma < \pi$ et $\alpha + \gamma' < \pi$ (nécessaires en vertu des relations de type \mathcal{R}_A). Notons d'abord qu'il est clair géométriquement qu'il y a, à similitude près, un et un seul quadrilatère convexe admettant ces angles. En effet, modulo similitude, on peut imposer la diagonale $[AC]$. Les points B et D sont alors de part et d'autre de (AC) et les demi-droites $[AB)$, $[AD)$, $[CB)$, $[CD)$ sont déterminées, respectivement,

par α' , α , γ et γ' . Comme on a $\alpha' + \gamma < \pi$ et $\alpha + \gamma' < \pi$, ces demi-droites se coupent en vertu de 1.12 et déterminent les points B et D .

La traduction de cette propriété par le calcul est nettement moins évidente. On pose $\beta = x$ et on a les valeurs $\delta' = \pi - \alpha - \alpha' - x$, $\beta' = \pi - \alpha' - \gamma - x$ et $\delta = \alpha' - \gamma' + x$. En écrivant la relation des sinus, on obtient une relation de la forme $a \cos^2 x + b \cos x \sin x + c \sin^2 x = 0$, où a, b, c sont des polynômes en les lignes trigonométriques des angles donnés que voici :

$$a = \sin \alpha' \sin \gamma' \sin(\alpha' + \gamma) \sin(\alpha + \alpha'),$$

$$b = \sin \alpha' \sin \gamma' \sin(\alpha + 2\alpha' + \gamma) - \sin \alpha \sin \gamma \sin(\alpha' - \gamma'),$$

$$c = \sin \alpha' \sin \gamma' \cos(\alpha' + \gamma) \cos(\alpha + \alpha') - \sin \alpha \sin \gamma \cos(\alpha' - \gamma').$$

Le polynôme $aX^2 + bXY + cY^2$ se factorise en deux termes correspondant à des droites passant par l'origine et on trouve $\cos x$ et $\sin x$ en coupant le cercle unité par les droites en question²¹. On garde seulement les solutions correspondant à $x \in]0, \pi[$. Comme a est non nul, il y en a au moins une mais il y a un apparent paradoxe : pourquoi la géométrie affirme-t-elle qu'il y a seulement une solution alors que le calcul en donne *a priori* deux ?

La réponse c'est qu'il y a une solution évidente à l'équation en x , autre que β , qui est $\pi - \alpha'$. En effet, on a alors $\delta' = -\alpha$, $\beta' = -\gamma$ et $\delta = \pi - \gamma'$ et l'équation en sinus est satisfaite. Cette solution est évidemment à rejeter dans le cadre choisi d'un quadrilatère convexe car certains angles sont négatifs. De plus, **en général**, pour $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$ donnés, la solution $\beta = \pi - \alpha'$, $\beta' = -\gamma$, $\delta = \pi - \gamma'$, $\delta' = -\alpha$ ne correspond à aucun quadrilatère, même non convexe, même avec des angles orientés. En effet, ces données vérifient les équations de type \mathcal{R}_A et la relation \mathcal{R}_P , mais pas les relations \mathcal{R}_P^i .

Pour avoir un exemple de quatre angles $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$ qui donnent deux octuplets d'angles solutions, l'un correspondant à un quadrilatère convexe l'autre à un quadrilatère croisé, le plus simple est de partir de quatre angles $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, d'en déduire γ et δ' avec les relations \mathcal{R}_A et de calculer γ' et δ pour que \mathcal{R}_P soit vérifiée. Par exemple, si l'on prend $\alpha = 30^\circ$, $\alpha' = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\beta' = 20^\circ$, on a $\gamma = 40^\circ$, $\delta' = 30^\circ$, la valeur de γ' donnée par la relation des sinus est alors 87.8779871443° et on en déduit $\delta = 180^\circ - \gamma'$. Avec ces valeurs de $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$ on a un quadrilatère convexe, mais aussi, avec $\beta = 180^\circ - \alpha' = 120^\circ$ un quadrilatère croisé qui correspond à l'autre solution de l'équation ci-dessus, voir figures 5 et 6 (les angles en vert sont comptés dans le sens trigonométrique et ceux en orange dans le sens des aiguilles d'une montre).

21. Une autre méthode consiste à transformer l'équation en $(a - c) \cos 2x + b \sin 2x +$

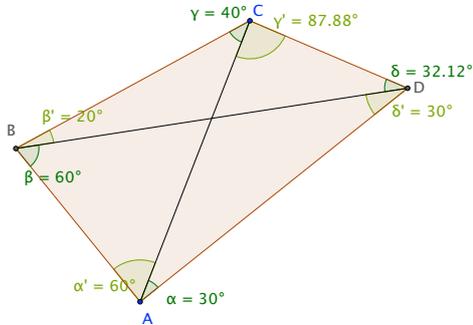


FIGURE 5 – Le cas convexe

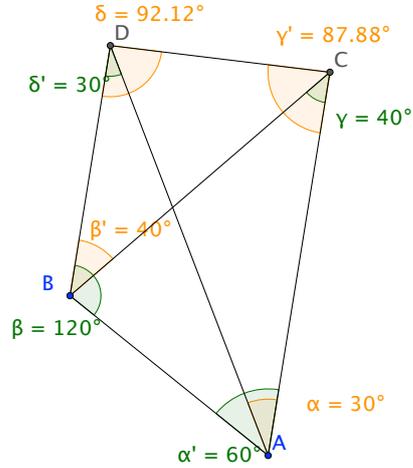


FIGURE 6 – Le cas non convexe

On peut préciser l'équation de degré 1 satisfaite par $\cos x$ et $\sin x$ (avec toujours $x = \beta$). En effet, on a l'équation $a + b \tan x + c \tan^2 x = 0$, dont les racines sont $\tan \beta$ et $-\tan \alpha'$, de sorte que a/c en est le produit, ce qui donne²² $a \cos \alpha' \cos x + c \sin \alpha' \sin x = 0$.

4) Dans le cas difficile, supposons $r = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. On pose $x = \alpha'$ et on en déduit $\beta' = \pi - \beta - \gamma - x$, $\delta' = \pi - \alpha - \beta - x$ et $\gamma' = \beta - \delta + x$. Quand on écrit la relation \mathcal{R}_P , il y a du sinus ou cosinus de x dans les quatre termes en primes. On obtient donc une équation dont le second membre est un polynôme du quatrième degré homogène en $\cos x$, $\sin x$ et dont le premier membre est $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta$. On trouvera des exemples de cette situation dans les paragraphes suivants.

5.3 Constructions à la règle et au compas

La question de déterminer les angles à partir de quatre d'entre eux peut être vue au sens géométrique : si l'on se donne quatre angles parmi $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$ peut-on construire, à la règle et au compas, les quatre autres. Le résultat est le suivant :

5.8 Théorème. *On suppose qu'on se donne un quadruplet r d'angles choisis parmi $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$ et on suppose que r est dans l'un des cas faciles ou*

$a + c = 0$. Cette équation admet deux solutions pour $2x$ donc quatre pour x , dont deux positives.

22. Je ne sais pas trouver directement cette équation et j'ignore s'il y en a une plus simple.

intermédiaire. Alors, on peut construire les autres angles à la règle et au compas à partir des données.

Démonstration. C'est clair car on se ramène à couper le cercle unité par des droites passant par l'origine et de coefficients constructibles.

Dans le cas difficile du type \mathbf{D}_4^+ , par exemple si l'on se donne les angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les autres angles ne sont pas nécessairement constructibles. Voici un contre-exemple très simple :

5.9 Proposition. *Il existe un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les angles sont $\alpha = 60^\circ, \beta = \gamma = \delta = 30^\circ, \alpha' = \gamma' = 20^\circ, \beta' = 100^\circ$ et $\delta' = 70^\circ$. les angles $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ ne sont pas constructibles à la règle et au compas à partir de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.*

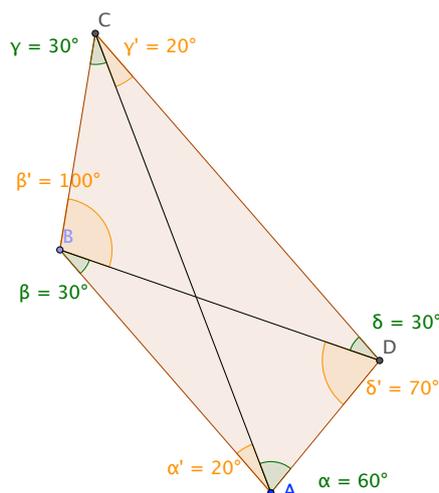


FIGURE 7 –

Démonstration. Si l'on admet l'existence de ce quadrilatère, le résultat est clair. En effet, si α' était constructible, on aurait réalisé la trisection de l'angle de 60° dont on sait qu'elle est impossible (voir par exemple [6] exercice 186).

Pour l'existence, il suffit de montrer la formule $\sin^2 20^\circ \times \sin 70^\circ \times \sin 100^\circ = \sin^3 30^\circ \sin 60^\circ$ soit encore $\sin^2 20^\circ \times \cos 20^\circ \times \sin 80^\circ = \sin^3 30^\circ \sin 60^\circ$. Si l'on note que $\sin 40^\circ = \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ$, c'est une conséquence immédiate de la mystérieuse formule suivante, que nous retrouverons au paragraphe suivant :

5.10 Lemme. *On a la formule : $\sin 20^\circ \times \sin 40^\circ \times \sin 80^\circ = \sin^2 30^\circ \times \sin 60^\circ$.*

Démonstration. On part de la formule de triplement du sinus, issue de Moivre : si $x = \sin \theta$, on a $4x^3 - 3x + \sin 3\theta = 0$. Ici, on note que l'on a $\sin(3 \times 20) = \sin 60 = \sin(3 \times 40) = \sin 120 = \sqrt{3}/2$ et $\sin(3 \times 80) = \sin 240 = -\sqrt{3}/2$. Les trois racines distinctes de l'équation $4x^3 - 3x - \sqrt{3}/2 = 0$ sont donc $-\sin 20$, $-\sin 40$ et $\sin 80$ et leur produit est égal à $\sqrt{3}/8$, ce qui prouve la formule.

5.11 Remarque. L'équation en $x = \alpha'$ est ici :

$$\sqrt{3} = 8 \sin^3 x \cos x + 8\sqrt{3} \sin^2 x \cos^2 x.$$

Elle a ici huit solutions (en degrés) : 20, 80, 140, 150, -160 , -100 , -40 et -30 . En fait, seules les deux premières sont pertinentes même en permettant des angles orientés (et elles donnent d'ailleurs des quadrilatères convexes). En effet, dans le cas orienté on a une condition de signe, voir 2.14, qui affirme que $\alpha, \gamma'; \beta, \delta'; \gamma, \alpha'$ et δ, β' sont de même signe. Comme γ est positif, cela élimine les quatre dernières solutions. De plus, $\alpha' = 140$ donne $\beta' = 180 - \beta - \gamma - \alpha' = 120 - \alpha' = -20$ et $\alpha' = 150$ donne $\beta' = -30$, de sorte que les solutions trois et quatre sont éliminées aussi.

5.4 Le cas particulier du parallélogramme

Si $ABCD$ est un parallélogramme (donc convexe), il est déterminé par le triangle ABC car le point D est le symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$. L'espace des parallélogrammes modulo similitude est ainsi isomorphe à celui des triangles, donc de dimension 2 et on peut le paramétrer, par exemple, en se donnant les angles $\alpha' = \widehat{BAC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$. Cependant, les choses sont plus délicates si l'on choisit d'autres données et cet exemple illustre bien la discussion précédente.

5.4.1 Les parallélogrammes paramétrés par α, β

C'est le cas où l'on se donne $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ avec $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$. Voici le résultat :

5.12 Proposition. *Soient α, β deux nombres positifs tels que $\alpha + \beta < \pi$. Il existe au plus deux quadrilatères convexes d'angles $(\alpha, \beta, \dots, \delta')$ qui vérifient $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$. Ils vérifient aussi $\alpha' = \gamma'$ et $\beta' = \delta'$. Ces quadrilatères sont des parallélogrammes et ils correspondent aux couples (α', β') et (β', α') vérifiant $\alpha' + \beta' = \pi - \alpha - \beta$ et $\sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha' \sin \beta'$. Précisément, si l'on pose $f(\alpha, \beta) = 2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$, il y a deux solutions distinctes (non semblables) si $f(\alpha, \beta) > -1$, une seule si $f(\alpha, \beta) = -1$ et aucune si $f(\alpha, \beta) < -1$. En d'autres termes, si \mathcal{P} désigne l'espace des*

parallélogrammes modulo similitude, l'application qui à un parallélogramme d'angles $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$ associe (α, β) fait de \mathcal{P} un revêtement de degré 2 du fermé $f(\alpha, \beta) \geq -1$, dont le lieu de ramification est donné par $f(\alpha, \beta) = -1$.

Démonstration. Comme le quadrilatère est convexe, les relations $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$ concernent les angles alternes-internes et obligent le quadrilatère à être un parallélogramme²³. On a alors aussi $\alpha' = \gamma'$ et $\beta' = \delta'$, soit par la géométrie, soit avec les relations $\mathcal{R}_A, \dots, \mathcal{R}_D$ et les quatre relations se réduisent à l'unique relation $\mathcal{R} : \alpha + \alpha' + \beta + \beta' = \pi$. On a, par ailleurs, l'équation des sinus qui, comme ils sont positifs, s'écrit $\sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha' \sin \beta'$. Comme ces relations sont symétriques en α', β' , si (α', β') est solution, (β', α') aussi. Pour calculer les valeurs on pose $x = \alpha'$. On a $\beta' = \pi - \alpha - \beta - x$, donc $\sin \beta' = \sin(\alpha + \beta + x)$ et, l'équation devient $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta + 2x)$, ce qui donne $\cos(\alpha + \beta + 2x) = \cos \alpha \cos \beta - 3 \sin \alpha \sin \beta = 2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$.

On note que $f(\alpha, \beta) := 2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$ est toujours < 1 . En effet, on peut supposer, par exemple, $\alpha \geq \beta$. On a alors $\cos(\alpha + \beta) < \cos(\alpha - \beta)$ par décroissance du cosinus dans $[0, \pi]$, donc $f(\alpha, \beta) < \cos(\alpha + \beta) < 1$. Il y a donc trois cas :

- Si $f(\alpha, \beta) < -1$, il n'y a pas de solution.
- Si $f(\alpha, \beta) = -1$ on a $\alpha + \beta + 2x = \pi + 2k\pi$, donc $x = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) + k\pi$ et il y a une seule solution dans $]0, \pi[$ qui correspond à $k = 0$.
- Si $f(\alpha, \beta) > -1$ on pose $\varphi = \text{Arccos } f(\alpha, \beta)$ et on a $x = \pm \frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + k\pi$. Comme on a $f(\alpha, \beta) < \cos(\alpha + \beta)$, on en déduit $\varphi > \alpha + \beta$ et il y a deux solutions pour x dans $]0, \pi[$ qui sont $\frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ (dans $]0, \pi/2[$) et $\pi - \frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$.

Par exemple avec $\alpha = 42^\circ$ et $\beta = 26^\circ$ on trouve $x = \alpha' = 17.1212^\circ$ et $\beta' = 94.8788^\circ$, ou l'inverse, voir figure ci-dessous.

5.13 Remarque. Les deux solutions sont dans $]0, \pi/2[$ si l'on a $3 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) < 0$. C'est le cas, par exemple, pour $\alpha = 30^\circ$ et $\beta = 50^\circ$ on a $\alpha' = 23.1636^\circ$ et $\beta' = 76.8363^\circ$.

5.4.2 Construction à la règle et au compas

Bien qu'on soit dans un cas du type \mathbf{D}_4^+ , il est clair qu'on peut construire α', β' à la règle et au compas à partir de α, β , voir figure ci-dessous.

23. Sinon cela peut être faux, voir le cas du trapèze isocèle $ACDB$ avec (AC) et (DB) parallèles et $AB = CD$ ($ABCD$ est alors croisé) mais les quatre égalités $\alpha = \gamma, \dots, \beta' = \delta'$ de 5.12 et les relations de type \mathcal{R}_A impliquent la convexité en vertu de 2.22.

Construction à la règle et au compas
d'un parallélogramme avec $\alpha=26^\circ$ et $\beta=42^\circ$.
(Deux solutions obtenues en échangeant α' et β' .)

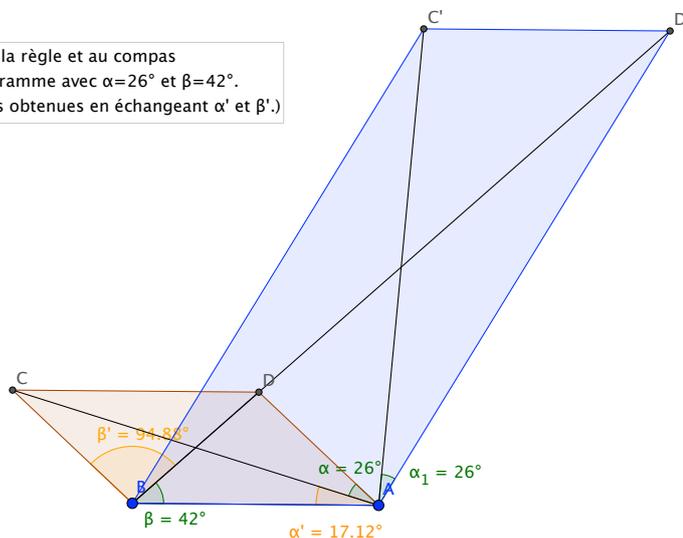


FIGURE 8 –

5.4.3 L'équation $f(\alpha, \beta) = -1$

Rappelons qu'il s'agit de l'équation $2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -1$ ou encore $\cos \alpha \cos \beta - 3 \sin \alpha \sin \beta = -1$. Utilisons cette forme en posant $x = \cos \alpha$ et $y = \cos \beta$. Comme les angles sont dans $[0, \pi]$ on a $\sin \alpha = \sqrt{1 - x^2}$ et $\sin \beta = \sqrt{1 - y^2}$ et l'équation devient $1 + xy = 3\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}$, équivalente à son élévation au carré qui donne : $y^2(8x^2 - 9) - 2xy + 8 - 9x^2 = 0$. Le discriminant de cette équation est un carré et on en déduit les solutions :

$$y_1(x) = \frac{x + 6\sqrt{2}(x^2 - 1)}{8x^2 - 9} \quad \text{et} \quad y_2(x) = \frac{x - 6\sqrt{2}(x^2 - 1)}{8x^2 - 9}.$$

La condition d'existence $f(\alpha, \beta) > -1$ est alors $y > y_1(x)$ ou $y < y_2(x)$. En réalité, la deuxième condition n'est pas pertinente. En effet, on doit avoir $\alpha + \beta < \pi$ ce qui se traduit en $y > -x$. Or, on vérifie que la fonction y_2 est toujours $\leq -x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Il reste donc seulement la condition $y > y_1(x)$ ou encore $\beta < \text{Arccos}(y_1(\cos \alpha))$.

5.14 Remarque. On peut montrer directement, dans le cas des parallélogrammes, l'équivalence des deux conditions de ramification $\alpha' = \beta'$ et $2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -1$. On note pour cela que $\alpha' = \beta'$ est équivalent à $2\alpha' = \pi - \alpha - \beta$ donc à $\cos 2\alpha' = -\cos(\alpha + \beta)$. Mais on a $\cos 2\alpha' = 1 - 2 \sin^2 \alpha' = 1 - 2 \sin \alpha \sin \beta$ et l'égalité est équivalente à $3 \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = -1$ c'est-à-dire l'autre condition de ramification.

5.5 Les quadrilatères convexes inscriptibles

Rappelons qu'il s'agit des quadrilatères $ABCD$ dont tous les sommets sont sur un cercle.

5.15 Proposition. *On considère quatre points A, B, C, D en position générale et on reprend les notations²⁴ de 2.8. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Le quadrilatère $ABCD$ est convexe et inscriptible.*
- 2) *Le quadrilatère est convexe et on a l'une des relations $\alpha = \beta'$, $\beta = \gamma'$, $\gamma = \delta'$ ou $\delta = \alpha'$.*
- 3) *On a les relations $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B, \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_D, \mathcal{R}_P$ et l'une des relations $\alpha = \beta'$, $\beta = \gamma'$, $\gamma = \delta'$ ou $\delta = \alpha'$.*
- 4) *On a $\alpha = \beta'$, $\beta = \gamma'$, $\gamma = \delta'$ et $\delta = \alpha'$ avec $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$.*

Démonstration. Le fait que 1) implique 2) vient du théorème de l'angle inscrit et l'implication 2) \implies 3) vient de 2.17 et 2.19. Montrons 3) \implies 4). Supposons par exemple $\alpha = \beta'$. Avec \mathcal{R}_C et \mathcal{R}_D on en déduit $\gamma = \delta'$ et avec \mathcal{R}_B et \mathcal{R}_D on obtient $\beta - \delta = \gamma' - \alpha'$. La relation \mathcal{R}_P donne $\sin \beta \sin \delta = \sin \alpha' \sin \gamma'$ et, avec $\beta - \delta = \gamma' - \alpha'$, on trouve aussi $\cos \beta \cos \delta = \cos \alpha' \cos \gamma'$, donc $\cos(\beta + \delta) = \cos(\gamma' + \alpha')$. On en déduit $\beta + \delta = \gamma' + \alpha'$ (la seule autre solution est $\beta + \delta = 2\pi - \alpha' - \gamma'$ et elle contredit la conjonction de \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_C). Avec $\beta - \delta = \gamma' - \alpha'$ on a finalement $\beta = \gamma'$ et $\delta = \alpha'$.

Enfin, l'implication 4) \implies 1) vient de 2.22 et de la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

5.16 Remarque. On notera que la formule magique est automatiquement satisfaite dans le cas inscriptible.

5.17 Corollaire. *L'espace des quadrilatères convexes inscriptibles est une variété analytique de dimension 3, paramétrée par les angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0, \pi[$ vérifiant $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, ou encore par $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.*

6 L'exercice difficile

Il s'agit d'un exercice ("le plus difficile de la géométrie élémentaire" (?)) qui m'a été posé jadis par Guy Henniart (qui le tenait je crois de Joseph Oesterlé). Le lecteur trouvera le texte original de l'exercice dans l'annexe 2 ci-dessous (voir §9).

Une reformulation immédiate de l'exercice le ramène à un cas particulier de la situation étudiée ci-dessus : on a un quadrilatère convexe $ABCD$ avec

24. *A priori* nous utilisons ici les angles non orientés, mais le résultat est valable aussi pour les angles orientés.

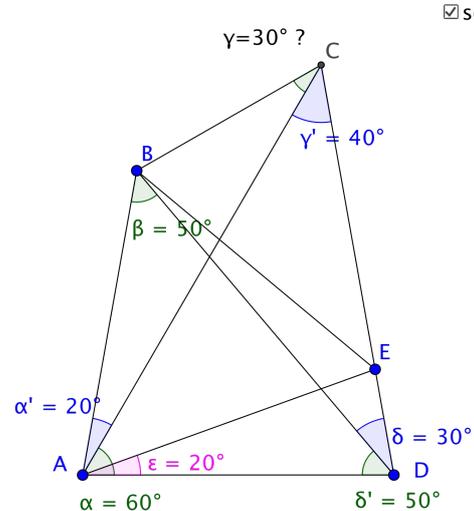
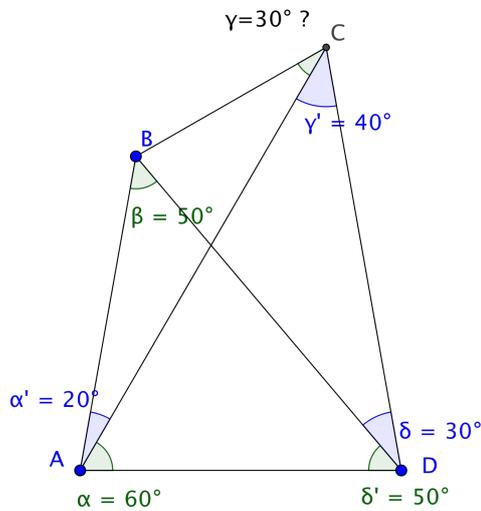
les angles $\alpha = 60^\circ$, $\alpha' = 20^\circ$, $\delta' = 50^\circ$ et $\delta = 30^\circ$ donnés. Il s'agit de montrer que γ vaut 30° . Selon la classification donnée ci-dessus, on est dans un cas "médiane", donc *a priori* facile. Déjà, la somme des angles dans ABD donne $\beta = 50^\circ$ et la somme des angles de ACD donne $\gamma' = 40^\circ$.

6.1 La preuve calculatoire

Le triangle ABD est isocèle en A et on pose $a = AD = AB$.

On calcule AC avec la formule des sinus dans ACD . On a $\frac{AC}{\sin 80} = \frac{AD}{\sin 40}$
d'où $AC = a \frac{\sin 80}{\sin 40} = 2a \cos 40 = 2a \sin 50$.

Soit $A'B'C'$ un triangle avec $A'B' = a$ et les angles $\widehat{A'} = 20^\circ$, $\widehat{B'} = 130^\circ$ et $\widehat{C'} = 30^\circ$. On a $\frac{A'B'}{\sin 30} = \frac{A'C'}{\sin 130}$, d'où $A'C' = 2a \sin 130 = 2a \sin 50 = AC$. Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont les côtés égaux $AB = A'B' = a$ et $AC = A'C'$, ainsi que les angles en A et A' . Ils sont donc isométriques et on a $\widehat{C} = \gamma = \widehat{C'} = 30^\circ$.



☑ solution

6.2 Et sa généralisation

On suppose qu'on s'est donné les angles α , α' , δ , δ' . On en déduit β , γ' . On cherche $x = \gamma$. On écrit la relation des sinus dans ABD , ACD et ABC . On

a $AD = \frac{AB \sin \beta}{\sin \delta'}$, $AC = \frac{AD \sin(\delta + \delta')}{\sin \gamma'}$ donc $AC = AB \frac{\sin \beta \sin(\delta + \delta')}{\sin \gamma' \sin \delta'}$ et $AC = AB \frac{\sin(x + \alpha')}{\sin x}$. On en déduit $\frac{\sin(x + \alpha')}{\sin x} = \frac{\sin \beta \sin(\delta + \delta')}{\sin \gamma' \sin \delta'} := r$.

Maintenant, il ne reste plus qu'à étudier la fonction $\varphi(x) = \frac{\sin(x + \alpha')}{\sin x}$ dont la dérivée vaut $\varphi'(x) = -\frac{\sin \alpha'}{\sin^2 x}$ et est donc négative. On en déduit que φ décroît de $+\infty$ à $-\infty$ quand x varie de 0 à π . Elle prend donc une fois et une seule la valeur r ci-dessus : on a $x = \varphi^{-1}(r)$.

6.3 La preuve astucieuse

On construit $E \in [CD]$ tel que $\epsilon = \widehat{DAE} = 20^\circ$. L'angle en E de ADE vaut 80° , de sorte que ce triangle est isocèle en A et on a donc $AE = AD = AB$. Comme $\widehat{DAB} = \alpha + \alpha'$ vaut 80° , on a $\widehat{EAB} = 60^\circ$ et le triangle isocèle ABE est équilatéral et $BE = a$.

Par ailleurs, on a $\widehat{EAC} = 40^\circ = \widehat{ECA} = \gamma'$, de sorte que AEC est isocèle en E et $CE = a$. On a donc $CE = a = BE$, donc BCE est isocèle en E . Comme l'angle \widehat{BEC} vaut $180^\circ - \widehat{AED} - \widehat{AEB} = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, les angles à la base de BEC valent 70° . En particulier $\widehat{BCE} = \gamma + \gamma'$ et on a $\gamma = 30^\circ$.

6.4 Avec la formule mystérieuse 5.10

Comme il a été dit plus haut, selon la classification du §5.2.2, l'exercice est un cas facile où il y a unicité de la solution. Il suffit donc de montrer que $\gamma = 30^\circ$ est solution, autrement dit de montrer l'identité suivante, traduction de la relation \mathcal{R}_P (les angles sont en degrés) :

$$\sin 20 \times \sin 40 \times \sin 80 = \sin^2 30 \times \sin 60.$$

Mais c'est exactement la formule vue en 5.10.

7 La question sur la méridienne

On sait que la détermination de la longueur du méridien terrestre effectuée par Delambre et Méchain en 1792 repose essentiellement sur des méthodes de triangulation qui reviennent à calculer des longueurs à partir d'une seule longueur et de mesures d'angles. En étudiant cette question, nous avons été confrontés au problème suivant, qui est du type de ce qui précède.

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ et on reprend les notations 2.8. On suppose connus les angles α, α', γ et $\beta + \beta'$ soit encore $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$ et il s'agit de calculer les autres. On est dans la position dite \mathbf{V}_4^- de difficulté intermédiaire qui a été étudiée en 5.6 ci-dessus. On choisit $\beta = x$ comme inconnue et on a les valeurs $\delta' = \pi - \alpha - \alpha' - x$, $\beta' = \pi - \alpha' - \gamma - x$ et $\delta = \alpha' - \gamma' + x$. La relation des sinus donne une équation de la forme $a \cos^2 x + b \cos x \sin x + c \sin^2 x = 0$, voir 5.6. On a vu que cette équation se ramène à l'équation $a \cos \alpha' \cos x + c \sin \alpha' \sin x = 0$ que l'on sait résoudre et dont on sait construire les solutions à la règle et au compas. On notera qu'en remplaçant les termes en $\cos x, \sin x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\sin 2x$ on obtient : $(a - c) \cos 2x + b \sin 2x + a + c = 0$.

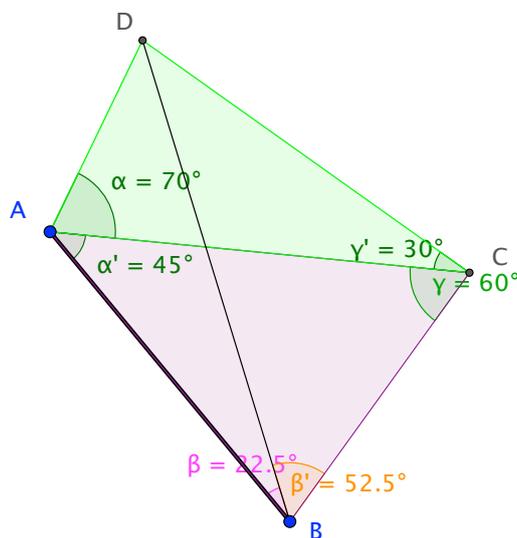


FIGURE 9 –

7.1 Exemple. L'exemple initial était donné par $\alpha = 70^\circ$, $\alpha' = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ et $\gamma' = 30^\circ$, voir figure ci-dessus. Voici les valeurs approchées des coefficients :

$$a = \sin 45 \sin 30 \sin 75 \sin 65 \sim 0.30951,$$

$$b = -\sin 45 \sin 30 \sin 40 - \sin 70 \sin 60 \sin 15 \sim -0.437886$$

$$\text{et } c = \sin 45 \sin 30 \cos 75 \cos 65 - \sin 70 \sin 60 \cos 15 \sim -0.747396.$$

La méthode générale vue ci-dessus donne $x = \beta \sim 22.495310143958^\circ$

En vérité, cet exemple est particulièrement simple car on a la relation $a + c = b$ que l'on constate sur les valeurs approchées et que l'on vérifie

aisément en appliquant quelques formules de trigonométrie. Cela permet de simplifier l'équation $(a - c) \cos 2x + b \sin 2x + a + c = 0$ obtenue ci-dessus, qui admet la solution évidente $2x = \pi/2$ et une autre solution donnée par $\cos 2x = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}$. Le calcul donne $\cos 2x \sim 0.70722252994$ et on retrouve $x \sim 22.495310143958^\circ$.

8 Annexe 1 : à propos des quotients

Dans cette annexe, on s'intéresse à la structure du quotient $\mathcal{P}^4/\text{Sim } \mathcal{P}$ de l'espace des quadruplets quelconques de points par le groupe des similitudes. On sait que, dans le cas général, ce type de question n'est pas évident. Le lecteur qui voudrait en avoir un aperçu pourra consulter le difficile livre de David Mumford [4]. Avant de regarder les quadrilatères, examinons déjà deux cas plus simples.

8.1 Retour aux sources

8.1.1 Le cas de deux points

Le quotient $\mathcal{P}^2/\text{Sim } \mathcal{P}$ a deux points, l'orbite générique des couples (A, B) avec $A \neq B$ et l'orbite diagonale des (A, A) . Le quotient est formé de deux points, l'un ouvert, l'autre fermé.

8.1.2 Le cas des triangles

On distingue quatre cas.

1) Il y a l'ouvert générique des triplets de points non alignés, dont le quotient est de dimension 2 isomorphe à la partie de $]0, \pi[^2$ formée des (α, β) vérifiant $\alpha + \beta < \pi$ (ou de la partie du cube $]0, \pi[^3$ formée des (α, β, γ) vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = \pi$). Un autre paramétrage, meilleur ici, est donné par les rapports de côtés $\lambda := AC/AB$ et $\mu := BC/AB$ avec les conditions $\lambda + \mu > 1$ et $|\lambda - \mu| < 1$. Dans le plan des (λ, μ) , on voit apparaître un "triangle" \mathcal{T} avec un sommet à l'infini. L'avantage de ce paramétrage est de se généraliser au cas suivant.

2) Il y a ensuite les triplets de points distincts alignés, déterminés à similitude près par les invariants $\lambda := AC/AB$ et $\mu := BC/AB$ vérifiant la relation $\lambda + \mu = 1$ si λ et μ sont < 1 et $|\lambda - \mu| = 1$ sinon. L'espace des triplets alignés est de dimension 5 (c'est un fermé de \mathcal{P}^3 défini par la nullité d'un déterminant) et le quotient de dimension 1. Le quotient apparaît comme la

réunion des côtés du triangle \mathcal{T} , sommets exclus, ces derniers correspondant aux cas de deux points confondus.

3) Le cas suivant est celui des triplets avec deux points égaux qui se répartissent en trois orbites²⁵ : (A, A, B) , (A, B, A) et (A, B, B) . Dans le “triangle” quotient \mathcal{T} , ces points correspondent aux sommets (∞, ∞) , $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

4) Enfin, les triplets de points confondus donnent un point fermé, adhérent à tout le monde.

On voit qu’on a décrit le quotient total $\mathbf{P}^3/\text{Sim } \mathcal{P}$, au point de pouvoir le dessiner (à l’exception du point correspondant à la diagonale).

8.1 Remarques. 1) On a un paramétrage plus symétrique en utilisant les trois longueurs $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Comme ces longueurs, modulo similitude, sont définies à multiplication près par un scalaire, on obtient une application de l’ouvert des triplets non confondus de $\mathcal{P}^3/\text{Sim } \mathcal{P}$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ qui à ABC associe (a, b, c) . L’image est l’ensemble des points qui vérifient $a, b, c \geq 0$, $a \leq b + c$ et les relations analogues obtenues par permutation.

2) Le paramétrage précédent est défini avec des fonctions racines carrées. On peut le rendre analytique en utilisant les carrés des longueurs $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$. Dans ce cas l’image est définie par $\Gamma_2^\sharp \leq 0$ ou Γ_2^\sharp est le déterminant de Cayley-Menger :

$$\Gamma_2^\sharp(x, y, z) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy.$$

Cela résulte de la factorisation :

$$-\Gamma_2^\sharp(x, y, z) = (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

Sur tous ces sujets on renvoie à [5] §5.5 et §6.3.

8.2 Quadrilatères : le cas générique

8.2.1 Stabilisateurs

Revenons à la structure du quotient $\mathcal{P}^4/\text{Sim } \mathcal{P}$ pour quatre points quelconques. On munit cet espace de la topologie quotient (et peut-être de structures additionnelles ...). On sait depuis [4] que cette question est intimement liée aux stabilisateurs²⁶. Le résultat les concernant est le suivant :

25. Attention, en général, les permutations de A, B, C ne proviennent pas de similitudes.

26. Voir la notion de points semi-stables.

8.2 Proposition. Soient $q := (A, B, C, D) \in \mathcal{P}^4$.

1) Si les quatre points ne sont pas alignés, le stabilisateur de q sous l'action de $\text{Sim } \mathcal{P}$ est réduit à l'identité.

2) Si les quatre points sont alignés sur une droite d mais non tous égaux, le stabilisateur est formé de l'identité et de la symétrie par rapport à d .

3) Si les quatre points sont confondus, le stabilisateur est isomorphe au groupe des similitudes vectorielles, de dimension 2.

Démonstration. C'est clair à partir du fait que le stabilisateur de deux points distincts est formé de l'identité et de la symétrie par rapport à la droite les joignant.

8.2.2 Le cas générique

Sur la structure du quotient, on se contente ici du cas générique où non seulement les quatre points ne sont pas alignés, mais où ils sont en position générale. Comme le dit David Mumford (voir [4]), construire un quotient dans le cas générique est un simple exercice, donc on devrait y arriver ...

8.3 Théorème. Soit \mathcal{Q}_g la partie de \mathcal{P}^4 formée des quadruplets de points en position générale (c'est-à-dire que trois quelconques des points sont non alignés). C'est un ouvert de \mathcal{P}^4 et le quotient $\mathcal{Q}_g/\text{Sim } \mathcal{P}$ est une variété analytique de dimension 4.

Démonstration. On donne simplement quelques indications sur la preuve de ce théorème, renvoyant à [5] pour des détails.

On considère l'application polynomiale Φ_0 de \mathcal{Q}_g dans \mathbf{R}^6 qui à A, B, C, D associe les carrés des longueurs $x = BC^2$, $y = CA^2$, $z = AB^2$, $X = AD^2$, $Y = BD^2$ et $Z = CD^2$. Les points étant en position générale, les six scalaires x, \dots, Z sont > 0 et on peut composer Φ_0 avec la projection canonique de $\mathbf{R}^6 - \{0\}$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^5(\mathbf{R})$. On obtient $\Phi : \mathcal{Q}_g \rightarrow \mathbf{P}^5(\mathbf{R})$ et on sait (voir [5] 5.5.6) que l'image de Φ est dans le fermé défini par l'annulation du déterminant de Cayley-Menger :

$$\Gamma(x, y, z, X, Y, Z) := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y & X \\ 1 & z & 0 & x & Y \\ 1 & y & x & 0 & Z \\ 1 & X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}.$$

Le polynôme Γ est homogène de degré 3 en les 6 variables et définit donc une hypersurface cubique V de \mathbf{P}^5 . L'application Φ est polynomiale, donc analytique et elle se factorise par le quotient $\overline{\mathcal{Q}}_g = \mathcal{Q}_g/\text{Sim } \mathcal{P}$. De fait, si

deux quadrilatères sont semblables, les carrés des longueurs des côtés et des diagonales sont proportionnels. On a donc une application $\bar{\Phi} : \bar{\mathcal{Q}}_g \rightarrow V$, qui est injective. En effet, si les images de deux quadrilatères sont égales dans le projectif, elles sont proportionnelles dans \mathbf{R}^6 et, quitte à faire une homothétie on peut supposer qu'elles sont égales et il résulte alors de [5] 7.1.2 que les quadrilatères sont isométriques.

8.4 Lemme. *L'image W de $\bar{\Phi}$ est un ouvert de V . C'est une variété analytique de dimension 4 qui admet deux composantes connexes formées des $ABCD$ tels que ABC et ABD aient même orientation (resp. des orientations distinctes).*

8.5 Remarque. Attention, le résultat ne subsiste pas si les points sont seulement supposés non alignés. Si l'on prend par exemple un triangle ABC et $D = A$ on a $X = 0$, $Y = z$ et $Z = y$ et $X^2 + Y^2 + z^2 - 2Yz - 2zX - 2XY = 0$. De toutes façons puisque ce quadrilatère a $X = 0$ il est nécessairement dans la frontière de W .

Démonstration. On connaît l'image de \mathcal{P}^4 par $\bar{\Phi}$ par [5] 7.1.7 et 7.1.9, voir aussi 7.5.2. C'est la partie de V vérifiant les relations :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy < 0, \quad X^2 + Y^2 + z^2 - 2Yz - 2zX - 2XY < 0$$

$$X^2 + y^2 + Z^2 - 2yZ - 2ZX - 2Xy < 0 \quad \text{et} \quad x^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ - 2Zx - 2xY < 0.$$

(Les polynômes en question sont des déterminants de Gram et les conditions sont simplement des traductions d'inégalités de Cauchy-Schwarz). On voit qu'on a bien un ouvert.

Pour voir qu'on a une variété analytique, on considère l'ouvert Ω de \mathbf{R}^5 formé des $\omega := (x, y, z, X, Y)$ vérifiant les deux premières inégalités ci-dessus. Le polynôme $\Gamma(x, y, z, X, Y, Z)$, vu comme polynôme en Z , est un polynôme du second degré, de coefficient dominant $-2z$ et de discriminant :

$$\Delta = 4(x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy)(X^2 + Y^2 + z^2 - 2Yz - 2zX - 2XY) > 0$$

de sorte que les racines sont distinctes. On a ainsi deux applications $Z = \psi_1(\omega)$ et $Z = \psi_2(\omega)$ de Ω dans W , leurs images sont disjointes, et W en est la réunion.

Comme V est une hypersurface de \mathbf{P}^5 il est de dimension 4, donc aussi W qui en est un ouvert.

8.6 Lemme. *L'application $\bar{\Phi} : \bar{\mathcal{Q}}_g \rightarrow W$ admet une section analytique, c'est-à-dire une application $s : W \rightarrow \bar{\mathcal{Q}}_g$ telle que $\bar{\Phi} \circ s = \text{Id}_{\bar{\mathcal{Q}}_g}$. L'application induite $\bar{\Phi} : \bar{\mathcal{Q}}_g \rightarrow W$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. On donne seulement des indications, voir [5] exercices 7.5.1 et 7.5.2. On connaît les carrés des longueurs x, \dots, Z et on cherche un quadrilatère qui leur corresponde, à similitude près. On peut donc imposer $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ et supposer que $C = (u, v)$ est dans le demi-plan $v > 0$. On a $u^2 + v^2 = y$ et $(u - 1)^2 + v^2 = x$, ce qui donne $u = \frac{1}{2}(y - x + 1)$, puis v comme racine positive de $y - u^2$. Pour trouver $D = (w, t)$, on utilise X et Y , qui donnent w comme ci-dessus. Il y a alors deux valeurs possibles de t qui donnent deux valeurs distinctes de Z , comme on l'a vu ci-dessus. On choisit alors celle des valeurs de t qui donne la racine Z .

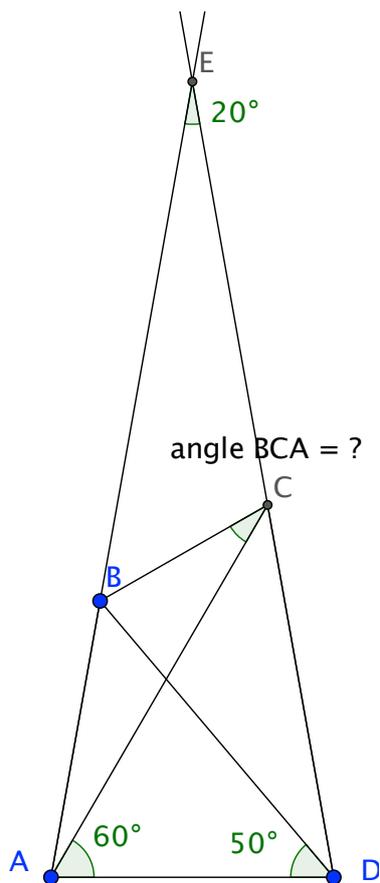
8.7 Lemme. *La variété W est le quotient de \mathcal{Q}_g par $\text{Sim } \mathcal{P}$ dans la catégorie des variétés analytiques.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si l'on a une application analytique f de \mathcal{Q}_g dans une variété analytique U , invariante par $\text{Sim } \mathcal{P}$, elle se factorise par Φ . Mais cela résulte de l'existence de la section s .

9 Annexe 2 : la version originale de l'exercice difficile

Le texte original de l'exercice :

Le triangle EAD est isocèle en E avec l'angle en E égal à 20° . On porte B sur $[AE]$ et C sur $[ED]$ avec $\widehat{CAD} = 60^\circ$ et $\widehat{BDA} = 50^\circ$. Quelle est la valeur de \widehat{BCA} ?



Références

- [1] Berger Marcel, Gostiaux Bernard, *Géométrie différentielle*, Armand Colin, collection U, 1972.
- [2] Cousin-Fauconnet Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.
- [3] David Marie-Claude, Haglund Frédéric, Perrin Daniel, *Géométrie affine euclidienne*, Polycopié CAPES Orsay, 2009.

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/GeometrieEuclidienne.pdf>

- [4] Mumford David, *Geometric invariant theory*, Springer, 1965.
- [5] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Partie V, La géométrie d'une forme quadratique, troisième épisode : la géométrie euclidienne*, 2014.
<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie5.pdf>
- [6] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.