Quelques exercices autour de la mesure de la méridienne

Daniel PERRIN

1 Position du problème

En 1792, donc à l'époque de la révolution française, il a été décidé d'unifier les diverses mesures, notamment de longueurs, en créant une unité valable pour la France entière (avec l'idée de l'étendre au monde entier) : le mètre. Pour que cette unité soit admise par tous, il fallait qu'elle soit reliée à une mesure indiscutable qui apparaissait dans la nature. Voici ce que dit un rapport de l'Académie des Sciences :

L'idée de rapporter toutes les mesures à une unité de longueur prise dans la nature, s'est présentée aux mathématiciens, dès l'instant où ils ont connu l'existence d'une telle unité et la possibilité de la déterminer. Ils ont vu que c'était le seul moyen d'exclure tout arbitraire du système des mesures et d'être sûr de conserver toujours le même ...

On a donc choisi une unité liée à la Terre. En effet, le kilomètre (c'est-à-dire $1000\,m$) correspond à la quarante millième partie de la circonférence terrestre C : on a $C = 40000\,km$.

Bien entendu, cela suppose que l'on ait mesuré le tour de la Terre, soit à l'équateur, soit le long d'un méridien. C'est cette dernière solution qui a été choisie et deux équipes d'astronomes (l'une dirigée par Delambre et l'autre par Méchain) ont mesuré le méridien qui passe par Paris, entre Dunkerque et Barcelone, en commençant par les extrémités et en se rejoignant à Rodez, environ au milieu.

Il y a de nombreux problèmes, à la fois théoriques et pratiques concernant cette mesure. Déjà, il faut être capable, lorsqu'on est en un point, de déterminer la direction du méridien. C'est assez facile car cette direction correspond à la direction de l'ombre d'un bâton lorsque celle-ci est la plus courte. Il faut ensuite mesurer les distances entre des points. Et cela, c'est difficile, voire quasiment impossible, car il faut franchir les collines ou les montagnes, les fleuves, les forêts, les villes, etc. et il est très difficile d'aller en ligne droite dès que le terrain est accidenté. C'est pourquoi ce que l'on fait est de mesurer **une seule distance** que l'on appelle la **base**. Elle est prise entre des points situés en plaine, sans constructions ni obstacles entre les deux et suffisamment longue pour diminuer l'effet des erreurs de mesure. Ensuite, on ne mesure plus aucune longueur, mais seulement des angles.

En effet, il est beaucoup plus facile de mesurer les angles. Pour cela on choisit des points de repère élevés : une tour, un château, une église, etc., on se place en un tel point, on en vise deux autres, et on mesure l'angle ainsi déterminé. Les outils utilisés pour cela sont le "quart de cercle" ou le "cercle de Borda". Ils sont munis de lunettes de visée orientables, voir les figures ci-dessous.

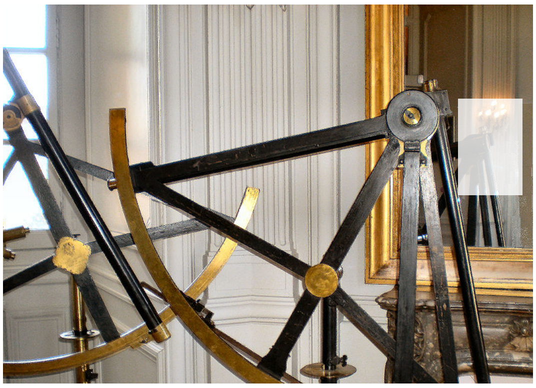

Figure 1 – Quart de cercle (Observatoire de Paris)

Figure 2 – Cercle de Borda

Dans les exercices proposés (voir 2.1, 2.2, 2.3) on explique comment on déduit de la longueur de la base et des angles les autres longueurs de la triangulation. Une fois mesurée la distance entre deux points d'un même méridien, il faut en déduire la longueur totale du méridien, et pour cela déterminer l'angle par rapport au centre de la Terre (c'est-à-dire la différence de latitude entre les deux points). Voir l'exercice 2.5 pour une solution.

Pour plus de détails sur le sujet, on consultera `https://fr.wikipedia.org/wiki/Meridienne_(geodesie)` ou le livre de Denis Guedj *Le mètre du* *monde*, Points, 2000.

Un exemple de triangulation

La figure suivante donne un aperçu du type de figures auxquelles ont été confrontés Delambre et Méchain.

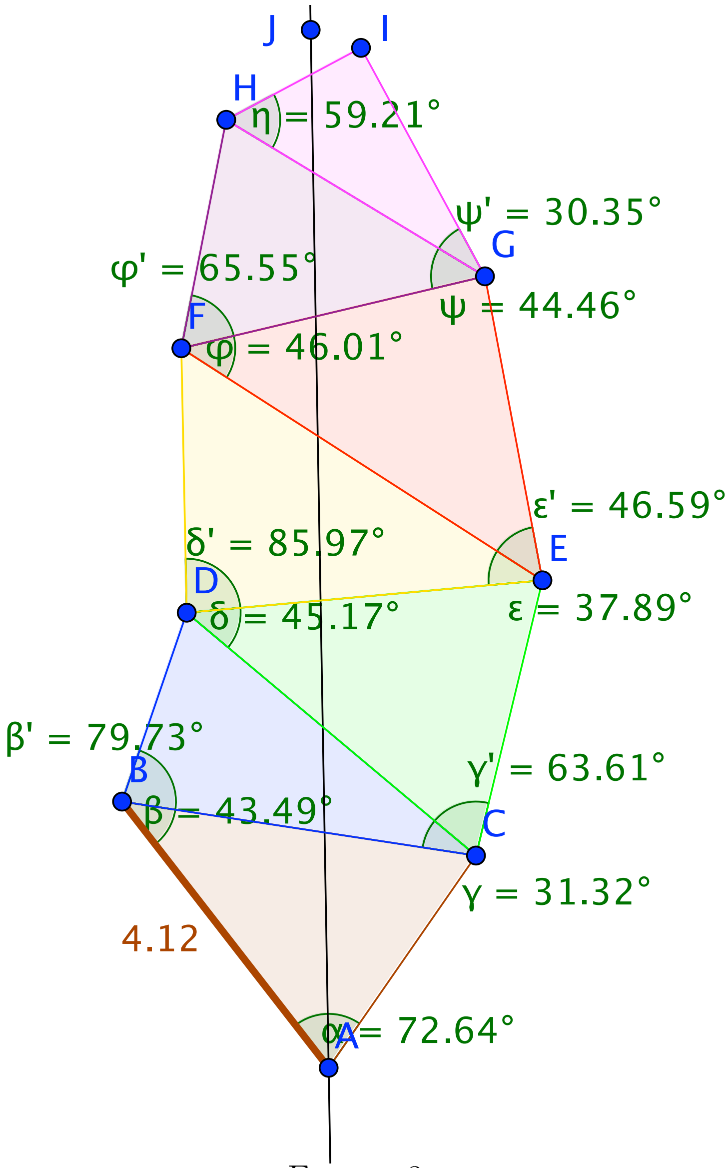

FIGURE 3 –

2 Quelques exercices autour de la méridienne

Notations. *Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs de ses côtés et $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$ ses angles. Dans toute la suite on suppose que le triangle est* **acutangle** *c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus.*

La méthode de triangulation repose sur le principe suivant : si on connaît deux angles et un côté d'un triangle, on connaît les autres côtés. Les exercices suivants explicitent ce principe.

Le second cas d'égalité

Le fondement de la méthode est le second cas d'égalité des triangles qui explique qu'une longueur et deux angles déterminent les autres longueurs.

Si l'on a un second triangle $A'B'C'$ et qu'on note, comme ci-dessus, a', b', c' les longueurs de ses côtés et α', β', γ' ses angles et si l'on suppose qu'on a $c = c'$, $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$, on a aussi $\gamma = \gamma'$, $a = a'$ et $b = b'$.

Le cas de similitude

2.1 *Exercice.* On a un triangle ABC sur le terrain, dont on a mesuré le côté c et les angles α, β. On en dessine un modèle $A'B'C'$ sur une feuille de papier avec les mêmes angles α, β mais avec une autre longueur c'. On mesure a', b', c' sur le papier. Calculer les longueurs a, b.

Application numérique : on suppose que $c = 17,5\,km$, $\alpha = 37,2°$, $\beta = 73,7°$. On mesure $c' = 13\,cm$, $a' = 8,41\,cm$ et $b' = 13,36\,cm$. Calculer a et b. (Réponses : $a = 11,33\,km$, $b = 17,98\,km$.)

On a ici une méthode pratique pour trouver les longueurs manquantes grâce à un modèle semblable au triangle initial. Bien entendu, comme on le verra dans l'exercice suivant, on peut calculer directement ces longueurs.

La loi des sinus

2.2 *Exercice.* Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). On pose $h = AH$. On désigne par $\mathcal{A}(ABC)$ l'aire du triangle.

1) Calculer $\mathcal{A}(ABC)$ en fonction de h et a.

2) Calculer h en fonction de c et β et en déduire la formule $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} ac \sin\beta$.

3) Donner les formules analogues en utilisant les autres angles et en déduire la formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

4) On suppose connus α, β et c. Calculer γ, a et b. Application numérique : $c = 17,5\,km$, $\alpha = 37,2°$, $\beta = 73,7°$. (Réponses : $\gamma = 69,1°$, $a = 11,33\,km$, $b = 17,98\,km$.)

Un exemple (simplifié) de triangulation

2.3 *Exercice.* La figure ci-dessous montre un exemple très simplifié de triangulation. L'objectif est de calculer la longueur AE située le long du méridien.

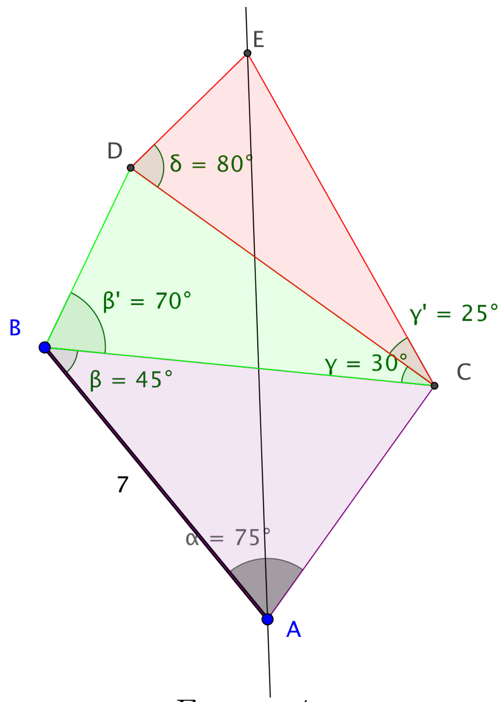

FIGURE 4 –

On suppose que la longueur AB est égale à $7\,km$ et que les angles ont les valeurs indiquées sur la figure. En utilisant l'exercice précédent, calculer successivement les longueurs AC, BC, BD, CD, DE et CE.

On donne en plus l'angle $\widehat{CAE} = 37,64°$. Calculer la longueur AE.

Question subsidiaire (difficile) : calculer directement l'angle $\widehat{CAE}$ à partir des autres.

Une question ouverte

2.4 *Exercice.* Dans le prolongement de la question précédente, voici une question en forme de défi [1].

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ et on suppose connus les angles des triangles ABC et BCD limités par la diagonale $[BC]$. Expliquer pourquoi les angles des triangles ABD et ACD sont déterminés et les calculer. (On pourra faire le calcul en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \beta'$ ou se contenter des valeurs numériques données par la figure ci-dessous.)

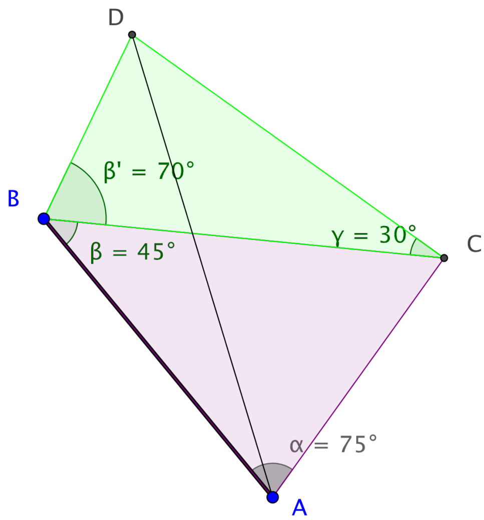

FIGURE 5 –

Mesurer la différence de latitude entre deux points

2.5 *Exercice.* La figure ci-dessous représente une coupe de la Terre, on a noté O son centre. On suppose qu'on a mesuré la longueur a du méridien entre A et B, (c'est-à-dire l'arc AB) et on veut en déduire la circonférence C de la Terre. Pour cela, on va déterminer l'angle $\theta = \widehat{AOB}$ (en degrés).

1) Montrer qu'on a $C = a \times \dfrac{360}{\theta}$.

2) Pour mesurer θ on mesure l'angle α que fait en A la verticale passant par ce point (qui passe par O) et la direction d'une étoile fixe (par exemple

1. Je n'ai pas de réponse vraiment satisfaisante à cette question.

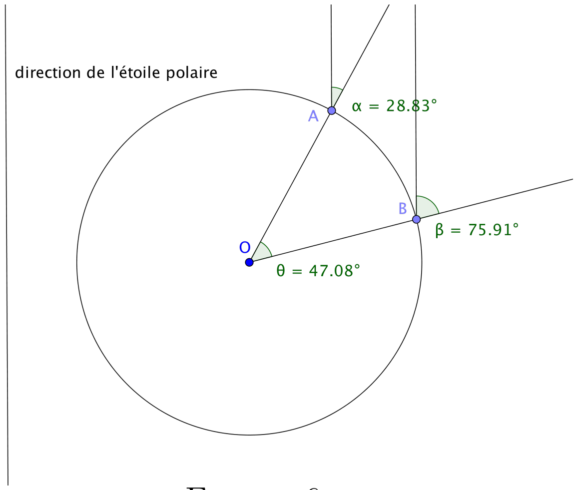

FIGURE 6 –

l'étoile polaire). On mesure de même en B l'angle β de la verticale avec la même direction, voir figure.

Montrer qu'on a $\theta = \beta - \alpha$.