À PROPOS DES PROGRAMMES

DE MATHÉMATIQUES DU COLLÈGE

Daniel PERRIN

Je remercie le groupe chargé de la relecture des programmes de mathématiques du collège de m'avoir donné l'occasion de m'exprimer sur le sujet. En effet, cette question m'intéresse depuis fort longtemps, et plus encore depuis que j'ai contribué à la rédaction du rapport de la commission Kahane sur la géométrie. Je suis convaincu, en effet, que c'est au collège que se joue l'essentiel de l'apprentissage géométrique. Pour ceux qui souhaiteraient plus de détails sur mes positions, je renvoie aux divers textes auxquels j'ai contribué : [R] (ou [R']), [P1], [DPR], [P3]. Le texte qui suit comprend trois parties. La première est une réflexion théorique sur l'enseignement de la géométrie au collège qui reprend largement les textes précédents. La seconde est la mise en action de la première sous forme de propositions pour cet enseignement. Enfin, la dernière contient les remarques sur les propositions du groupe de relecture. Elle porte sur l'ensemble des programmes, mais avec un accent particulier sur la partie géométrique.

Table des matières

PREMIÈRE PARTIE :

QUELQUES RÉFLEXIONS THÉORIQUES SUR

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE AU COLLÈGE

1. Introduction.

Dans ce texte, je reprends le discours tenu dans le rapport d'étape de la commission Kahane sur la géométrie. Je renvoie à diverses références pour des précisions sur la position que je défends ici : [R], [P1], [DPR], [P2], [P3]. Ce texte est largement issu de [P3].

Je rappelle que la conclusion essentielle du rapport d'étape c'est la nécessité de conserver un enseignement de géométrie au lycée et plus encore au collège. De nombreux arguments sont développés en faveur de cet enseignement. Il y est notamment question de son utilité et de son importance culturelle. Dans ce texte, je mettrai plutôt en avant deux autres aspects qui sont à mes yeux des objectifs essentiels de l'enseignement de la géométrie :

- la vision géométrique comme outil de pensée (en mathématiques et ailleurs),
- la géométrie comme lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement.

La thèse que je défends ici, c'est que pour atteindre ces objectifs, c'est-à-dire promouvoir un enseignement de la géométrie qui développe la vision, en s'appuyant sur la figure et qui permette le raisonnement, en ne le réduisant pas à un exercice de style, il est essentiel que les élèves disposent dès le collège des outils les mieux adaptés.

Le mot "outil" est un des mots-clés de ce texte. C'est sans doute une réminiscence de cette affiche, sur le mur des classes de l'école primaire de mon village, qui proclamait : "les bons ouvriers ont toujours de bons outils". Je pense que cela s'applique aussi aux mathématiques. Dans le cas de la géométrie du collège[1] je discuterai de la pertinence de certains outils "pour prouver", parmi lesquels on peut citer :

- les invariants (longueurs, angles, aires),
- les cas "d'égalité" et de similitude,
- le calcul,
- les transformations.

Depuis la réforme des mathématiques modernes, les cas "d'égalité" ont disparu de notre enseignement et le rôle de certains invariants comme angle et aire a été

[1] Pour la géométrie, les années collège me paraissent essentielles. J'étendrai d'ailleurs le collège à la classe de seconde, dernière classe de la formation mathématique (presque) universelle du citoyen. Parmi ces citoyens, je pense en particulier aux futurs professeurs des écoles (pas nécessairement scientifiques, bien entendu) dont le rôle est essentiel dans la formation, notamment mathématique, de nos (petits) enfants.

largement minoré. Je considère qu'il s'agit d'une double erreur et je vais essayer d'en convaincre le lecteur. Attention, je ne souhaite pas pour autant la disparition des transformations dans l'enseignement de la géométrie au collège et je donnerai des indications sur les possibilités de cohabitation harmonieuse entre ces diverses approches de la géométrie.

En revanche je ne parlerai que peu du calcul, qui est pourtant un outil important pour faire de la géométrie. Je me contenterai de renvoyer le lecteur à l'admirable texte de Descartes, cf. [De].

Je terminerai cette introduction par un mot d'explication sur ma position par rapport à l'enseignement du second degré. Comme je n'y ai jamais enseigné moi-même et que je ne suis pas didacticien (sauf par alliance, ce qui n'est d'ailleurs pas négligeable), ma position est, avant tout, celle d'un mathématicien dont la spécificité, depuis plus de 25 ans, est la formation des maîtres. C'est en enseignant la géométrie aux sévriennes, jadis, que j'ai été amené à réfléchir sur ses fondements mathématiques et épistémologiques. Ma position didactique, en faveur de l'usage des invariants et des cas d'isométrie au collège s'appuie sur cette réflexion mathématique, mais aussi sur de nombreuses discussions avec des collègues enseignant au collège et au lycée à propos des exercices que l'on peut y proposer.

2. Les outils pour prouver : les invariants.

a) Programme d'Erlangen et invariants.

Le discours dominant à l'époque des mathématiques modernes mettait en avant le programme d'Erlangen de Felix Klein (1872). La thèse de Klein est qu'une géométrie consiste essentiellement en la donnée d'un groupe (de transformations) opérant sur un ensemble. Ce point de vue, reste, à mon avis, tout à fait valable, mais, tel quel, il est insuffisant car, s'il permet de comprendre de quelle géométrie relève tel ou tel théorème (par exemple Pythagore de la géométrie euclidienne, Thalès de la géométrie affine et Pappus de la géométrie projective), il n'explique pas par quels procédés on obtient ces théorèmes. Or, cette question est résolue aussi, à peu près à l'époque de Klein, par la théorie des invariants. Le principe c'est que tout théorème d'une géométrie donnée, relative à un groupe donné, correspond à une relation entre les invariants (polynomiaux) de ce groupe. Mon opinion est donc que la théorie des invariants est inséparable du programme d'Erlangen. Or, dans le cas de la géométrie du collège, les invariants en question correspondent aux notions de longueur, d'angle et d'aire et un contresens majeur de la réforme des mathématiques modernes a été d'occulter au moins partiellement ces invariants qui restent encore mal aimés aujourd'hui.

J'ai développé ces idées dans l'annexe 1 du rapport d'étape et surtout dans l'article [P1] et j'y renvoie le lecteur qui souhaiterait plus de détails. Je donne juste ici quelques exemples de cette théorie.

D'abord que sont les invariants ? On peut les voir de deux façons. La première est géométrique : il s'agit de notions familières, longueur, angle, aire. La seconde est plus algébrique et on y voit effectivement apparaître des polynômes. En effet, si $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées (a_1, a_2) etc., les invariants précédents correspondent respectivement au carré scalaire $(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OA}) = a_1^2 + a_2^2$ (c'est le carré de la longueur OA) ou au produit scalaire $(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OB}) = a_1b_1 + a_2b_2$, (qui correspond au cosinus de l'angle $\widehat{AOB}$) ou encore au “produit vectoriel”[2] $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = a_1b_2 - a_2b_1$ (le double de l'aire orientée du triangle AOB, ou encore $OA \times OB \sin \widehat{AOB}$). Ces invariants apparaissent ainsi comme des polynômes en les coordonnées des points, et ces polynômes sont invariants sous l'action du groupe des rotations (l'aire orientée étant, de plus, invariante par le groupe de toutes les transformations affines de déterminant 1).

Bien entendu, quiconque a fait de la géométrie sait qu'il est utile d'employer les invariants géométriques pour prouver les théorèmes. Ce que je vais expliquer maintenant c'est que ces démonstrations, comme Janus, ont deux faces : celle de la géométrie et celle de l'algèbre. Voici un exemple très simple : le concours des médianes dans un triangle.

b) Exemple : les médianes.

Quiconque a utilisé un outil sait qu'il faut souvent le compléter par des accessoires : la scie n'est rien sans l'étau, la hache sans le billot et le marteau sans l'enclume. De même, l'usage de l'outil “aire” requiert quelques accessoires. L'un d'eux qui devrait être, à mon avis, un des résultats clés de la géométrie du collège est ce que je propose d'appeler le “lemme des proportions” :

Si deux triangles ont un sommet commun et des bases portées par la même droite, le rapport de leurs aires est égal au rapport des bases, cf. figure 1.

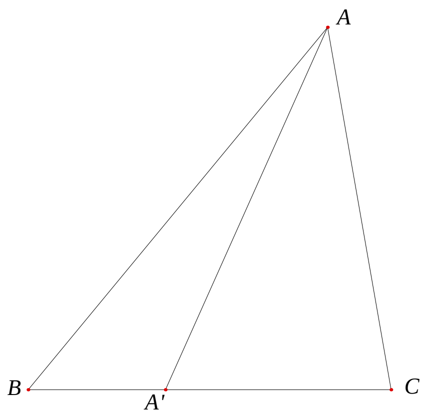

Figure 1

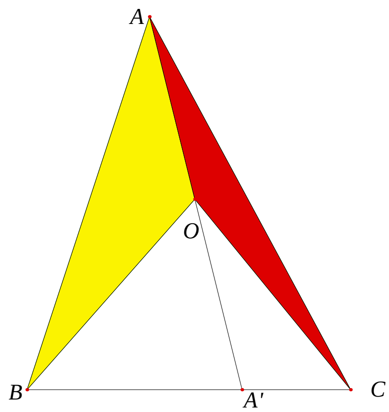

Figure 2

Un cas particulier de ce lemme est le lemme “de la médiane” qui affirme qu'une médiane partage un triangle en deux triangles d'aires égales.

De manière un peu pédante, on peut dire que ces lemmes traduisent la semi-invariance de l'aire par affinité ou son invariance par symétrie oblique. Mais ces lemmes résultent de manière élémentaire de la formule *base* $\times$ *hauteur* /2. Une conséquence du lemme des proportions est le “lemme du chevron” [3] :

[2] En fait, il s'agit plutôt du déterminant des deux vecteurs sur la base canonique et je vois ici ce produit vectoriel comme un nombre. L'usage de cet invariant plus élémentaire au lieu de l'aire orientée va conduire à distinguer des cas de figure et contient les germes d'une discussion que nous retrouverons plus loin.

[3] L'appellation de lemme du chevron se comprend bien en regardant la figure 2, au moins si on prend O à l'intérieur du triangle. Le lecteur baptisera ce lemme comme bon lui semble (cerf-volant, papillon, etc.) dans les autres cas. En fait, la version orientée de ce lemme, valable dans tous les

Soit ABC un triangle et O un point du plan. Si (OA) coupe (BC) en A', on a la formule

$$\frac{\mathcal{A}(OBA)}{\mathcal{A}(OCA)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Ce lemme implique aussitôt le résultat suivant :

Si ABC est un triangle, un point O (intérieur au triangle) [4] *est sur la médiane AA' si et seulement si on a l'égalité des aires $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OAC)$* (1).

La formule (1), qui porte sur l'aire ordinaire : $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2}\,||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}||$, a une traduction algébrique en termes de produit vectoriel i.e. d'"aire orientée. On montre précisément que le point O est sur la médiane si et seulement si :

$$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}, \tag{2}$$

c'est-à-dire si les aires orientées $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$ sont opposées. (En effet, si on pose $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, la relation signifie que O, A, M sont alignés. Or, $OBMC$ est un parallélogramme, de sorte que (OM) passe par le milieu A' de $[BC]$ et on a bien le résultat.)

On peut alors montrer le concours des médianes, d'abord par la voie géométrique. Si on note AA', BB', CC' les médianes et O le point d'intersection de (BB') et (CC') on a alors, par (1), $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OBC)$ et $\mathcal{A}(OBC) = \mathcal{A}(OAC)$, d'où $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OAC)$ et le résultat.

Mais cette preuve se lit aussi de manière algébrique. En effet, on a la relation

$$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} \wedge (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OC} \wedge (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0} \tag{$*$}$$

qui traduit la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel. Si on prend l'origine O à l'intersection de deux des médianes, la formule (2) montre que deux des produits vectoriels sont nuls, donc aussi le troisième.

Ce qu'il faut retenir de cette façon algébrique de voir les choses c'est que le théorème correspond à la **relation** $(*)$, d'ailleurs essentiellement triviale ici (comme on le voit en l'écrivant en coordonnées), entre les invariants.

c) Bilan.

L'intérêt théorique (et seulement théorique, il ne s'agit nullement de traiter toute la géométrie par le calcul !) de cette vision algébrique des invariants réside alors dans les trois points suivants :

1) On peut montrer (cf. par exemple [P1]) que tout théorème d'une géométrie s'interprète comme une relation entre des invariants relatifs à cette géométrie, comme

---

cas de figure, mais tellement moins poétique, consiste à dire que si on pose $\lambda = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, on a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$. On voit ici une première apparition de la question des cas de figure.

[4] Le résultat vaut, plus généralement, pourvu que les droites (OA) et (BC) ne soient pas parallèles.

il est apparu dans l'exemple ci-desssus ou dans d'autres, voir par exemple le concours des hauteurs qui provient de la relation

$$(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=0.$$

2) On a une sorte de théorème de complétude pour les invariants : on montre que pour la géométrie euclidienne du triangle (resp. pour la géométrie affine), il n'y a pas d'autres invariants que ceux vus ci-dessus (les produits scalaires et vectoriels) (resp. le produit vectoriel seulement).

3) On a aussi un théorème de complétude pour les relations : là encore on les connaît toutes, il n'y en a pas (de non triviale) en géométrie affine, et en géométrie euclidienne elles se déduisent toutes de la relation

$$(**)\qquad (\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OC})^2+(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC})^2=(\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OB})\,(\overrightarrow{OC}|\overrightarrow{OC}),$$

(dite identité de Lagrange) qui s'écrit en termes de polynômes :

$$(b_1c_1+b_2c_2)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2=(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)$$

et qui n'est autre que la relation $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

Ce qu'affirme la théorie c'est qu'on peut, en principe, obtenir mécaniquement tous les théorèmes de géométrie à partir de ces invariants et de leurs relations.

Par exemple, la relation fondamentale $(**)$ ci-dessus est exactement la traduction analytique de la célèbre propriété de la droite d'Euler : le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés et de bien d'autres résultats (par exemple, celui sur le symétrique de l'orthocentre, cf. [DPR]).

d) Invariants et relations, encore un exemple.

À tous ceux qui ne croiraient pas encore à la puissance des invariants, je propose un petit détour en montrant un exemple, plus convaincant peut-être que ceux qui portent sur la géométrie euclidienne. Cet exemple est issu de la géométrie de l'inversion qui n'est plus enseignée actuellement au lycée (encore que ce qui suit pourrait être expliqué à un élève de terminale S). Le groupe correspondant est le groupe $PGL(2,\mathbf{C})$ des homographies à coefficients complexes.

L'invariant fondamental de cette géométrie est le birapport :

$$[a,b,c,d]=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=\frac{c-a}{c-b}\times\frac{d-b}{d-a}.$$

Lorsque a,b,c,d sont 4 points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, il est facile de calculer l'argument de $[a,b,c,d]$ en termes d'angles orientés et on en déduit que les points a,b,c,d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.

Mais, si on a 8 points a,b,c,d,p,q,r,s, on a une relation, évidente mais splendide, entre les birapports ("le théorème des six birapports") :

$$[abrs]\,[bcps]\,[caqs]\,[pqcd]\,[qrad]\,[rpbd]=1.$$

La traduction géométrique de cette condition est immédiate : si on a 8 points et si 5 des quadruplets ci-dessus sont cocycliques ou alignés, les birapports correspondants sont réels. Mais alors, le sixième birapport est aussi réel et donc les 4 derniers points sont aussi cocycliques ou alignés.

Cette relation entre les invariants est source de nombreux théorèmes géométriques : le théorème de la droite de Simson, celui des 6 cercles de Miquel, le lemme du pivot.

Soient a, b, c trois points non alignés et p, q, r trois points distincts de a, b, c, situés sur les droites $(bc), (ca), (ab)$. Alors les cercles circonscrits aux triangles cpq, brp, aqr ont un point commun appelé le "pivot".

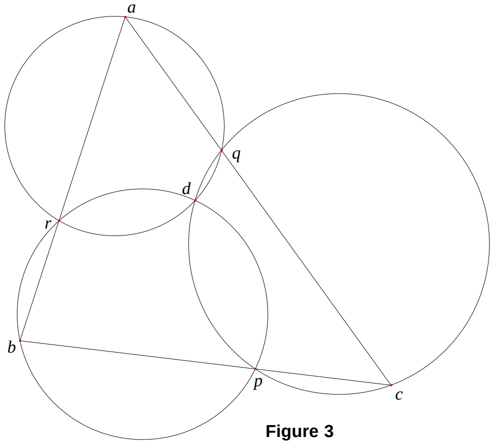

Figure 3

e) Une conclusion et deux exemples.

On a vu que ce que dit la théorie c'est que les théorèmes d'une géométrie proviennent toujours de relations entre invariants relatifs à cette géométrie. La conséquence pratique de ce fait c'est que la constatation empirique que les invariants sont efficaces pour faire de la géométrie est pleinement justifiée par la théorie : tout problème de géométrie affine (resp. euclidienne) doit pouvoir se résoudre par usage des aires (resp. des longueurs et des angles). C'est cette réflexion mathématique qui motive ma position didactique en faveur d'un usage plus systématique des invariants au collège. Voici encore deux exemples pratiques qui montrent leur efficacité.

Le premier, qui utilise les aires, est le célèbre théorème de Ménélaus, cf. figure 4.

Soit ABC un triangle. Une droite Δ coupe respectivement (BC), (CA), (AB) en A', B', C'. Montrer qu'on a :
$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

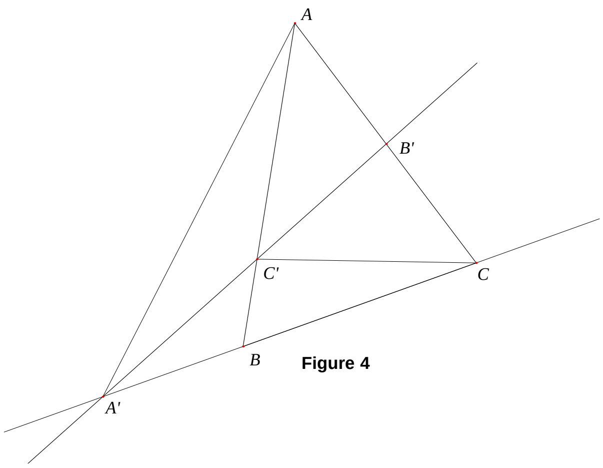

Figure 4

Pour cela, on interprète les rapports de longueur comme des rapports d'aires (grâce au lemme des proportions). Par exemple, on a $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{\mathcal{A}(A'BC')}{\mathcal{A}(A'CC')}$. L'astuce est alors de réutiliser le triangle $A'BC'$ pour le rapport qui fait intervenir $C'B$: $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{\mathcal{A}(A'AC')}{\mathcal{A}(A'BC')}$. L'égalité à prouver devient alors $\dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{\mathcal{A}(A'CC')}{\mathcal{A}(A'AC')}$: c'est le lemme du chevron ! [5]

Le second exemple, très simple, utilise les angles (pour d'autres exemples, cf. [DPR] ou [P2]) :

ABC est rectangle en A,
(AM) (resp. (AH)) est la médiane (resp. la hauteur) issue de A,
(DE) est la médiatrice de $[AM]$,
F et G sont les projetés orthogonaux de H sur les côtés.
Montrer que (FG) est parallèle à (DE)

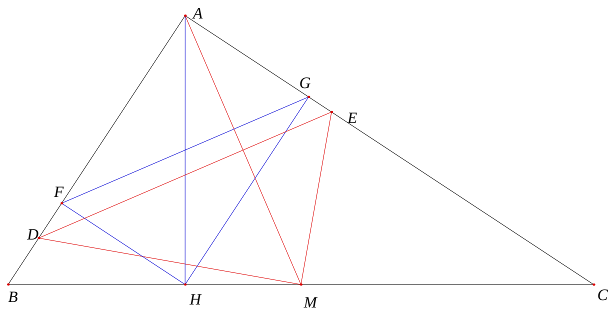

Figure 5

La seule chose à savoir c'est qu'un triangle rectangle est inscrit dans le cercle de diamètre son hypoténuse, ce qui donne des triangles isocèles de côtés les rayons.

Il suffit de montrer l'égalité d'angles $\widehat{GFA} = \widehat{EDA}$. On note qu'on a $\widehat{GFA} = \widehat{FAH}$ par la remarque précédente appliquée à AFG. Il en résulte que $\widehat{GFA}$ est le complémentaire de l'angle en B du triangle initial.

D'autre part $\widehat{EDA}$ est complémentaire de $\widehat{BAM}$ par construction de la médiatrice.

[5] Cet exemple mérite discussion. Bien sûr, il y a un autre cas de figure que celui évoqué ci-dessus (le cas où la transversale ne coupe pas les côtés du triangle). Certains pourraient alors déplorer que la démonstration donnnée ci-dessus ne s'applique que dans un cas particulier, alors qu'une preuve analogue, mais utilisant l'invariant produit vectoriel ou aire orientée s'appliquerait dans chaque cas. Je voudrais dire trois choses à ce sujet :

1) Je pense que la considération des cas de figure fait partie de la géométrie. C'est vrai que s'il y en a trop on peut finir par se lasser, mais il faut passer par cette lassitude pour apprécier des méthodes plus puissantes et plus unificatrices, les montrer avant d'avoir vu leur intérêt c'est mettre la charrue avant les bœufs.

2) L'utilisation des invariants orientés (vecteurs, angles orientés, produit vectoriel, etc.) est certes un progrès dans la mesure où elle unifie un certain nombre de preuves. Attention toutefois à ne pas tomber dans l'excès inverse qui consiste, comme le disait Jean-Jacques Rousseau, à faire de la géométrie "en tournant une manivelle", défaut largement répandu, notamment parmi les étudiants de CAPES avec qui je dois souvent lutter pour qu'ils ne déroulent pas un calcul vectoriel à grands coups de relations de Chasles, hors de toute intuition géométrique.

3) Ce à quoi je suis tout à fait hostile c'est à l'idée qu'on ne doit pas traiter certains problèmes avant d'être en possession de tous les outils (ou des bons outils, etc.) pour le faire. Par exemple, pour ce qui précède, il s'agirait d'attendre de disposer du produit vectoriel pour produire la démonstration de Ménélaus donnée ci-dessus. Je suis persuadé qu'à ce compte là, les mathématiques n'auraient jamais progressé, Pythagore attendant d'avoir le produit scalaire pour énoncer son théorème, Thalès se morfondant en espérant la structure vectorielle sur les droites pour prouver le sien, Euclide convoitant les idéaux pour établir son célèbre lemme et Archimède lorgnant désepérément vers l'intégrale pour réaliser la auadratuve de la parabole. J'exagère ? Pas tant que ça sur le plan des principes, et je suis persuadé que l'introduction parfois prématurée de concepts qui ne sont pas vraiment nécessaires pour résoudre les problèmes a une responsabilité dans l'incompréhension, voire l'animosité, d'un certain nombre de nos élèves à l'égard des mathématiques.

Comme $\widehat{BAM}$ est aussi égal à l'angle en B de ABC par la remarque préliminaire, on a gagné.

Dans la pratique, pour que l'utilisation des invariants aire et angle soit efficace il est nécessaire, comme on l'a dit, de disposer d'un petit nombre d'accessoires pour compléter ces outils. Pour les aires il s'agit essentiellement des "lemmes du collège", cf. [P1] ; pour les angles, on peut citer en vrac la somme des angles d'un triangle, l'usage du complémentaire et du supplémentaire, les angles alternes-internes et correspondants, et enfin, le théorème de l'angle inscrit.

3. Les outils pour prouver : cas "d'égalité" et transformations.

a) La réforme des mathématiques modernes.

Parmi les cibles préférées des promoteurs de la réforme des mathématiques modernes on trouve les cas d'égalité et de similitude des triangles. Voilà, par exemple, ce que dit Dieudonné à ce sujet, cf. [D] :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles ...

C'est un des points que je conteste le plus dans le discours de l'époque et dont les conséquences demeurent importantes à l'heure actuelle puisque les cas d'égalité et de similitude ne font plus partie des outils des collégiens.[6]

b) Fondements théoriques de l'usage des cas d'isométrie comme outil.

Un problème crucial qu'on rencontre lorsqu'on travaille avec un groupe de transformations G d'un ensemble X est de dire si G est transitif, c'est-à-dire si on peut transformer n'importe quel élément de X en n'importe quel autre par l'action du groupe. Par exemple, dans le plan, le groupe des isométries opère transitivement sur l'ensemble des points ou sur celui des demi-droites. En revanche, il n'est pas transitif cur l'ensemble des segments, ou sur l'ensemble des couples de demi-droites de même sommet.

Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :

Deux éléments de X peuvent être échangés par l'action de G (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.

Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.

[6] Ils ont fait leur réapparition en seconde dans les derniers programmes. Je m'en réjouis dans la mesure où cela suscite une réflexion sur le sujet, mais je pense que cette introduction est trop tardive et les arguments que je vais donner en leur faveur, tant du point de vue de l'efficacité de l'outil que de l'axiomatique, en témoignent.

Or, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) **sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci**. D'ailleurs leur démonstration est une parfaite illustration de ce principe de transitivité : on envoie un sommet sur un autre, puis une demi-droite sur une autre, etc. et peu importe qui est la transformation finale. Parodiant le célèbre sketch de Pierre Dac et Francis Blanche on pourrait avoir ce dialogue :

— *Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur cet autre triangle $A'B'C'$?*

— *Oui*

— *Vous pouvez le faire ?*

— *Oui*

— *Il peut le faire !*

Nous allons donner ci-dessous des exemples de cette situation en espérant convaincre le lecteur de l'efficacité des cas d'isométrie des triangles, par rapport à l'usage direct des transformations. En vérité, dans le plan, comme on connaît toutes les isométries, il est souvent assez facile de repérer laquelle employer. En revanche, ce qui est plus délicat c'est de prouver qu'elle fait bien ce qu'on suppose. On y arrive, mais c'est souvent lourd et, presque toujours, inutile.

Le même argument vaut évidemment pour les similitudes, avec, dans ce cas, deux avantages supplémentaires :

• il y a un critère (avec deux angles égaux) d'une simplicité enfantine,

• on connaît encore toutes les similitudes planes mais il est nettement plus compliqué que dans le cas des isométries de repérer celle qui va faire le travail.

c) Des exemples.

Il y a dans [DPR] et [P2] de nombreux exemples de cette utilisation des cas d'isométrie ou de similitude dans lesquels cette voie est plus simple que le recours aux transformations. À la lumière de ces exemples, je reprendrais volontiers la citation de Dieudonné, en la renversant :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en utilisant les "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions, afin de se ramener vaille que vaille à la transformation pertinente ...

Je donne ci-dessous deux exemples utilisant les cas d'isométrie, mais il y en a bien d'autres. On verra sur ces exemples les avantages de la méthode.

Exemple 1.

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points D et E sur (AB) et (BC) (cf. figure 6) tels que $BD = CE = AB - BC$. Montrer que ADE est isocèle.

C'est très facile avec les cas d'isométrie. En effet, on considère ACE et EBD. Ils sont isométriques (deux côtés et un angle). On a donc $AE = DE$.

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations (on peut toujours !). Il suffit de trouver la transformation qui passe de ACE à EBD. L'examen du sens des angles montre que c'est une rotation. On peut donc la trouver comme composée de deux symétries en introduisant le point F symétrique de E dans la symétrie σ_1 par rapport à la médiane-hauteur de ABC. On compose ensuite par la symétrie σ_2 par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et F vient en D (la droite (BC) vient sur (AB) et précisément la demi-droite $[BC)$ sur $[BA)$ et on conclut en utilisant $BF = BD$). On en conclut que, si $\rho = \sigma_2\sigma_1$, on a $\rho(E) = D$. Par ailleurs, on a $\sigma_1(A) = A$ et $\sigma_2(A) = E$ (car le triangle ABE est isocèle en B donc la bissectrice est axe de symétrie). On a donc aussi $\rho(A) = E$ et, en définitive, $EA = DE$.

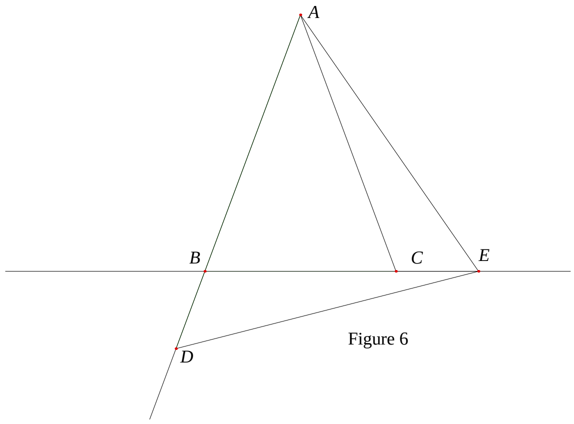

Figure 6

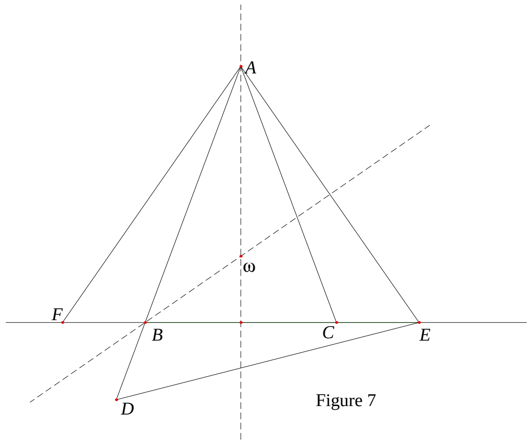

Figure 7

Trois critiques sur cette démonstration.

1) Il faut déjà repérer quelle est la transformation pertinente (en tous cas, moi, je ne l'ai fait qu'à partir des triangles !)

2) Elle nécessite une construction supplémentaire (le point F).

3) Elle est nettement plus compliquée (cf. la discussion sur les demi-droites) et nécessiterait de donner des indications aux élèves.

En contrepartie, si on pose la question : quel est le centre du cercle circonscrit à ADE, la démonstration via les transformations montre que c'est le centre de ρ, donc le centre ω du cercle inscrit à ABC. Bien entendu, on peut aussi montrer cela par les cas d'isométrie en montrant que les triangles ωBA et ωBE (resp. ωCE et ωBD) sont isométriques (deux côtés, un angle).

Exemple 2.

Soit ABC un triangle. On construit deux triangles rectangles isocèles ABC' et ACB' à l'extérieur de ABC. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que $B'M = C'M$ et $\widehat{B'MC'} = \pi/2$.

On introduit les milieux N et P de $[AC]$ et $[AB]$ (c'est d'ailleurs nécessaire pour construire B' et C') et on montre que les triangles $B'NM$ et MPC' sont isométriques (la droite des milieux et les angles correspondants font merveille !). On en déduit $MB' = MC'$. L'isométrie des triangles donne les angles égaux et on en déduit l'angle en M en regardant les angles de MPC'.

Bien entendu, on peut aussi raisonner avec les isométries (ou les similitudes). On considère les rotations ρ_1 de centre B' et d'angle $-\pi/2$ et ρ_2 de centre C' et d'angle $-\pi/2$. On montre que la composée est une symétrie centrale en décomposant les rotations en symétries axiales : $\rho_1 = \sigma_{D_1}\sigma_{(B'C')}$ et $\rho_2 = \sigma_{(B'C')}\sigma_{D_2}$ avec des angles de $-\pi/4$ entre D_1 et $(B'C')$ et entre $(B'C')$ et D_2. Si P est l'intersection de D_1 et D_2, on a alors $\rho_2\rho_1 = \sigma_{D_2}\sigma_{D_1} = \sigma_P$ (et le triangle $B'PC'$ est rectangle isocèle en

P). Mais, comme on a $\rho_2\rho_1(C) = A$, le centre de symétrie est M et on a gagné.

Ici, indiscutablement, la preuve avec les triangles est beaucoup plus simple et du niveau du collège. L'autre preuve nécessite non seulement la connaissance des rotations, mais aussi une compétence sur les composées et décomposées qui est (était) plutôt du niveau TS spécialité.

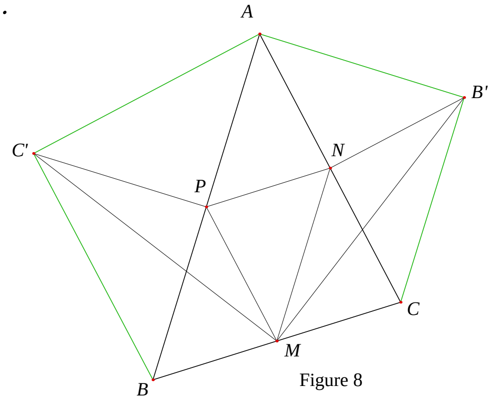

Figure 8

Un complément à cet exercice est le suivant :

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque. On construit à l'extérieur de $ABCD$ quatre carrés bâtis sur les côtés de $ABCD$. Soient A', B', C', D' les centres de ces carrés (dans l'ordre). Montrer que $A'C' = B'D'$ et que ces droites sont perpendiculaires.

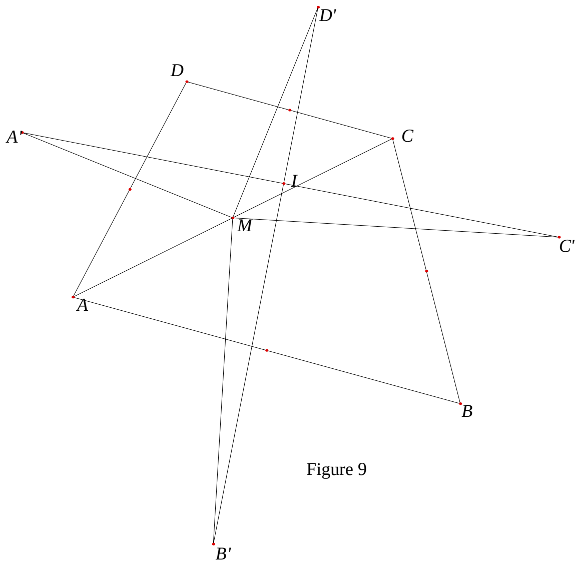

Figure 9

Cette fois, l'exercice est plus facile en utilisant les rotations. Soit M le milieu de $[AC]$. L'exercice précédent montre que la rotation ρ de centre M et d'angle $\pi/2$ transforme D' en A' et B' en C', donc $[C'A']$ en $[B'D']$, d'où le résultat. On peut aussi utiliser les triangles : $A'MC'$ et $D'MB'$ sont isométriques (exercice précédent, plus l'angle en M). cela donne $A'C' = B'D'$. Pour l'angle, si I est l'intersection de $(A'C')$ et $(B'D')$, le quadrilatère inscriptible $MIC'B'$ permet de conclure.

Dans ce cas, c'est l'aspect global de la transformation qui rend les choses plus simples. C'est d'ailleurs, à mon avis, là qu'est la limite entre les deux techniques : les triangles permettent une analyse locale plus facile, les transformations une maîtrise plus globale.

d) Transformations et cas d'isométrie : bilan.

Tout ce qui précède me conduit à critiquer un usage trop exclusif de l'outil "transformations" au collège. En effet, ce choix présente au moins deux défauts essentiels : il appauvrit et il complique.

• *Il appauvrit*

Les transformations ne constituent un outil réellement efficace que lorsqu'on dispose de toute la panoplie des isométries, voire des similitudes planes et qu'on connaît leurs composées. Cela conduit, en attendant, à n'utiliser que la transformation qui relève du programme de la classe considérée (et, dans le meilleur des cas, de celui des classes précédentes), ce qui appauvrit beaucoup les problèmes que l'on peut poser. Les invariants et les cas d'isométrie, en revanche, sont des outils qui, dès qu'on en dispose, permettent de faire presque toute la géométrie du collège, de poser dès le début des problèmes où une vraie réflexion, appuyée sur la figure, est nécessaire.

• *Il complique*

Comme on l'a vu ci-dessus, il y a de nombreux cas où l'usage des transformations, en lieu et place des cas d'isométrie, conduit à des contorsions pénibles, notamment lorsqu'il faut calculer explicitement des composées de transformations, au lieu d'utiliser la transitivité. Une conséquence inéluctable de cette complication est la suivante : pour que les élèves puissent résoudre les problèmes on est obligé de leur donner beaucoup d'indications, de sorte que les tâches qui leur restent sont trop parcellaires et ne donnent pas lieu à une véritable recherche. Comme les élèves n'ont plus vraiment à trouver quoi que ce soit, ce qu'on leur demande est donc de l'ordre de la mise en forme et la démonstration s'en trouve réduite à un exercice de style.

Attention, même si j'ai essayé de convaincre le lecteur que les transformations ne sont pas toujours le meilleur outil pour faire de la géométrie, notamment au collège, je ne voudrais pas que cela l'incite à les jeter aux orties sans autre forme de procès. Je renvoie à [DPR] §7, pour des exemples où les transformations sont l'outil le mieux adapté. On a vu ci-dessus que l'aspect "information globale" des transformations est souvent précieux. En voici encore un exemple :

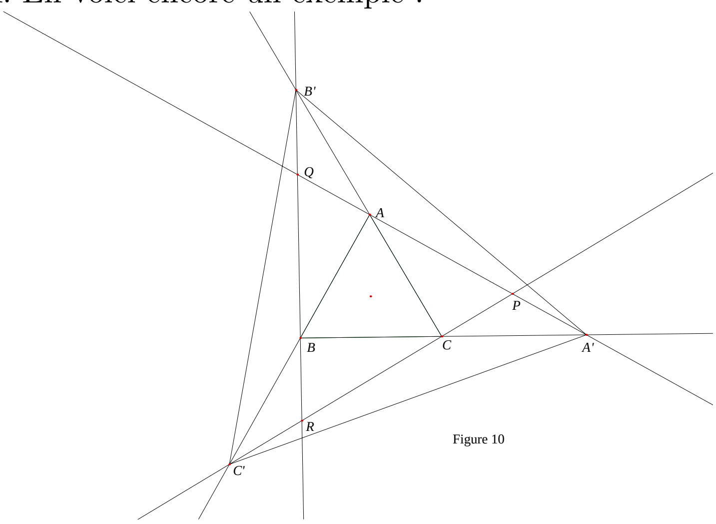

Figure 10

Soit ABC un triangle équilatéral. On prolonge les côtés en A', B', C' avec $CA' = AB' = BC'$ (cf. figure 10). Montrer que $A'B'C'$ est équilatéral. Soient P, Q, R les intersections de $(AA'), (BB'), (CC')$. Montrer que PQR est équilatéral

Par les transformations c'est immédiat : on utilise la rotation de centre O (centre de ABC) et d'angle $2\pi/3$. Elle permute circulairement A', B' et C' et donc aussi

P, Q, R d'où le résultat.

Cela étant, ce n'est pas difficile non plus avec les triangles (pour 1) on utilise les triangles $CA'B'$ et $AB'C'$, pour 2) les angles et on montre que $B'AQ$ et $A'AC$ sont semblables).

En définitive, je propose de retenir le **principe** suivant : il est naturel d'utiliser les transformations quand elles sont évidentes (c'est-à-dire quand on les voit, ou quand on sait d'avance qu'elles existent !). Sinon, si on ne les perçoit pas, ou si on ne sait pas montrer que leur effet est bien celui qu'on pense (et cela peut dépendre des aptitudes et des connaissances de chacun), plutôt que d'essayer à toute force de les faire apparaître, il est toujours possible et souvent plus simple d'utiliser les invariants et les cas d'isométrie. Voici un dernier exemple qui illustre cette difficulté.

On considère un quadrilatère $ABCD$, de côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$, croisé, et plus précisément tel que $[BC]$ et $[DA]$ se coupent en O, et dont les côtés opposés sont égaux : $AB = CD$ et $BC = AD$. Alors, on a $OA = OC$ et $OB = OD$.

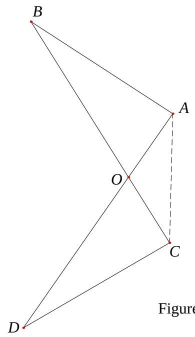

Figure 11

Dans cet exemple on voit bien quelle est la transformation pertinente, le problème c'est qu'il y en a même deux : les symétries par rapport aux médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$, et la difficulté est justement de prouver qu'il s'agit de la même transformation.

4. Les outils pour prouver : le calcul.

Je voudrais dire ici que le calcul aussi est un outil important pour faire de la géométrie et il a le mérite d'être la plupart du temps une voie de solution. Il n'est pas interdit, lorsqu'on ne parvient pas à résoudre un problème par des moyens géométriques, de le mettre en équations. On constate alors, souvent, qu'une lecture attentive des calculs fournit aussi la solution géométrique convoitée. À un stade plus avancé, il n'y a d'ailleurs pas de géométrie qui ne soit liée au calcul. Par exemple, on ne comprend la solution négative des problèmes des grecs (duplication du cube, quadrature du cercle, etc.) qu'en traduisant les propriétés géométriques en propriétés des nombres. Voici ce que dit Descartes à ce sujet dans un texte magnifique (cf. [De]) :

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t'on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que de leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la *multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une des deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.*

À un niveau plus élémentaire il ne s'agit pas de calculer **au lieu** de faire de la géométrie, mais de calculer **en faisant** de la géométrie. La citation suivante de Jean-Jacques Rousseau (dans Les confessions) illustre bien ce point :

Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais pas cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle. La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite ; mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes ; autrement je n'y comprenais plus rien.

Je trouve que ce défaut de faire de la géométrie "en tournant une manivelle" est assez répandu, notamment parmi les étudiants de CAPES avec qui je dois souvent lutter pour qu'ils ne déroulent pas un calcul vectoriel à grands coups de relations de Chasles, hors de toute intuition géométrique.

En revanche, l'apport du calcul, lorsqu'il est lié à la géométrie, est souvent décisif, cf. par exemple [DPR], §4.

DEUXIÈME PARTIE :

DES PROPOSITIONS POUR LE COLLÈGE

1. Introduction.

Dans cette partie, je fais comme si l'on m'avait demandé de produire et de justifier des programmes de géométrie pour le collège, à mettre en œuvre dans un délai de quelques années. Bien entendu ce n'est pas le cas, mais je donne ici ma position, chacun étant libre de s'en servir comme bon lui semble.

Comme on l'a vu dans la première partie, les deux orientations essentielles que je propose (et qui sont sous-jacentes dans le rapport d'étape [R]) sont les suivantes :

• une plus grande utilisation des invariants,

• la réintroduction des cas d'isométrie au collège.

Le premier point ne représente pas un changement considérable. C'est plus un changement d'état d'esprit qu'autre chose, mais il implique tout de même de développer ces outils et leurs accessoires, comme expliqué ci-dessus. La lecture des propositions du groupe de relecture, notamment sur Thalès, montre que ce n'est pas encore acquis, tant s'en faut.

Le second point est plus important et, avant de passer à sa réalisation, il y a tout un travail préalable à faire :

• Il faut mener une réflexion (si possible collective) sur la cohérence générale des programmes et l'ordre dans lequel les notions doivent être introduites, sur l'axiomatique (en un sens assez large) qui est sous-jacente à ces propositions[7] et sur les conséquences didactiques de tels choix. Il y a beaucoup de questions dont la réponse n'est pas évidente : quel équilibre transformations-cas d'isométrie ? quand introduire ces notions ? Je donne ci-après ma position actuelle, mais elle est susceptible d'évoluer et elle est éminemment discutable.

• Un grand effort est nécessaire pour convaincre les maîtres de l'intérêt de cette évolution et de ce qu'elle peut leur apporter, en tenant compte de l'expérience qu'ils ont accumulée au cours des années sur les transformations. C'est ce que j'essaie de faire ici et là quand on me le demande. Mais je sais que ce n'est pas facile. Il y a un proverbe russe que tous les enseignants devraient méditer et qui dit : *le plus court chemin est celui que tu connais.* En tous cas, si cette modification reçoit un assentiment de l'institution, il me semble qu'il faudrait l'annoncer (par exemple dans la version "relue" des programmes ?) assez longtemps avant de la mettre en œuvre.

• Un effort important de formation initiale et continue est indispensable car, à l'exception des anciens qui ont été formés aux cas d'égalité (mais qui d'abord ont oublié ces techniques qu'ils n'ont pas ou peu enseignées et qui ensuite seront à la

[7] Le livre d'Annie Cousin-Fauconnet [CF] fournit une base convenable pour une telle axiomatique, mais je m'en écarte sur un certain nombre de points, notamment parce que l'introduction des cas d'isométrie n'est pas un de ses soucis prioritaires. Voir aussi les livres d'Arsac, Hartshorne et Lion.

retraite avant qu'elles ne reviennent !), les autres n'en ont pratiquement jamais entendu parler.

2. Les fondements de la géométrie du collège.

a) Exposé des motifs.

Dans ce paragraphe, j'essaie d'expliciter des bases de la géométrie du collège compatibles avec les orientations didactiques vues ci-dessus. Il n'est pas du tout évident qu'il soit nécessaire de sous-tendre l'enseignement à ce niveau par des axiomes. Il est clair que la géométrie, à ses débuts, doit plutôt s'appuyer sur l'intuition. Cependant, il me semble important, pour les (futurs) professeurs, de réfléchir aux fondements de la géométrie enseignée au collège. Il s'agit en effet de s'assurer de la cohérence de l'enseignement. Bien entendu, il n'est pas question de proposer un système d'axiomes aux élèves, mais cela pourrait être un fil conducteur pour les professeurs.

Cette recherche d'une axiomatique revêt deux aspects :

• la recherche d'un système "savant" (donc avec un minimum d'axiomes) compatible avec les principes didactiques abordés dans la première partie (usage des invariants et des cas d'isométrie),

• la recherche d'un système issu du premier, mais adapté au collège, qui servira de référence (implicite, j'insiste bien sur cet aspect) pour l'enseignement.

Je travaille actuellement sur le premier point, avec une approche assez voisine de celle d'Annie Cousin-Fauconnet, cf. [CF]. Voir là-dessus [P5]. En ce qui concerne le second, le principe que je mettrais en avant est le suivant [8] :

Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes, mais aussi n'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver.

S'agissant du collège cela impose de se souvenir que nos élèves, sortant de l'école élémentaire, ont déjà une intuition des nombres et de la géométrie et je propose de m'appuyer dessus pour fonder la géométrie "déductive". Parmi les points qui sont clairs pour les élèves il y a ceux qui fondent les premiers axiomes d'Euclide et de Hilbert (voir par exemple [CF] ou [L]) : les axiomes d'incidence (par exemple : par deux points passe une droite et une seule) et d'ordre (la notion de segment, de demi-droite, de demi-plan). Là-dessus je n'ai pas de désaccord avec les anciens. En revanche je voudrais insister sur trois points qui vont être la source de divergences avec Euclide, Hilbert et leurs continuateurs modernes (cf. par exemple [L]) :

• les élèves ont l'intuition du mouvement et la pratique du pliage,
• ils connaissent les nombres entiers et décimaux,
• ils ont déjà une idée de la notion d'aire.

C'est à partir de ces trois constatations que je propose d'ériger un système d'axiomes pour le collège (en réalité, pour les professeurs). Il y a bien entendu d'autres systèmes d'axiomes possibles, notamment celui qui s'appuie sur les espaces vectoriels et affines. C'est même le seul que connaissent les futurs professeurs. Mais on sait que ce système n'est pas pertinent pour l'enseignement au collège et au lycée comme l'a

[8] Ce n'est pas moi qui dit cela mais Pascal ! (De l'esprit géométrique II).

montré l'expérience des mathématiques modernes. En revanche c'est sans doute le mieux adapté pour les mathématiciens, et moi le premier.

b) Mouvements, pliages et cas d'isométrie.

La notion de "mouvement" est une notion absente des cursus, y compris universitaires, mais qui me semble toutefois avoir une importance pour l'enseignement de la géométrie au collège. Bien entendu, d'autres que moi ont dit cela, Jules Houël au XIXème siècle, ou, plus près de nous, Rudolf Bkouche, cf. [Bk] ou Rémi Langevin.

Intuitivement, on a envie d'appeler mouvement l'opération que l'on fait quand, prenant un objet plan (disons un triangle) dans une position donnée T, on l'amène, en le faisant glisser dans le plan, dans une autre position T'[9].

Mathématiquement, un mouvement est un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Is}(E)$ (où $\mathrm{Is}(E)$ désigne le groupe des isométries du plan) qui joint l'identité $\mathrm{Id} = \gamma(0)$ à une isométrie donnée $u = \gamma(1)$, celle qui correspond à la position finale $T' = u(T)$. Il me semble que c'est cette opération qui est naturelle, plus encore que l'isométrie finale u. En effet, comment penser, comment expliquer, comment mimer une rotation ou une translation sans faire ce geste qui consiste à déplacer la figure voulue en la poussant tout droit ou en la tournant dans le plan ? Le lecteur de bonne foi aura la meilleure preuve de ce que j'avance en réfléchissant à comment il expliquerait la symétrie axiale à des enfants de l'école primaire (réponse dans une note ci-dessous).

Si l'on reconnaît cette notion de mouvement comme importante, cela conduit à privilégier (un peu !) les déplacements parmi les isométries. En effet, le groupe $\mathrm{Is}(E)$ des isométries du plan a deux composantes connexes : les déplacements qui peuvent être joints à l'identité dans les isométries planes par un chemin continu, et les anti-déplacements (dont les symétries axiales) qui ne peuvent pas l'être[10] : en fait, le u évoqué ci-dessus qui donne $T' = u(T)$ était nécessairement un déplacement. Ce fait rend l'usage des anti-déplacements moins commode que celui des déplacements, plus "discret" d'une certaine façon : la symétrie c'est bien, mais on ne la comprend bien que *via* le pliage, c'est-à-dire en sortant du plan. D'ailleurs, c'est un peu ce que je reproche aussi à l'usage de la symétrie centrale au début du collège. En effet, même si, contrairement à la symétrie axiale, c'est un déplacement, au début du collège elle apparaît isolée car on ne la voit pas avec le mouvement naturel qui la joint à l'identité en passant par les rotations de même centre et d'angle variant de 0 à π, et pour cause, on ne dispose pas encore des rotations. En fait, d'une certaine façon, on la regarde plus comme isométrie de la droite et, sur la droite, c'est un anti-déplacement !

L'un des intérêts de cette notion (intuitive) de mouvement c'est qu'elle permet de définir l'égalité des grandeurs usuelles (longueurs et angles). En effet, quand dit-on que deux segments sont de même longueurs (disons égaux pour faire court) ? Lorsqu'on peut emmener l'un sur l'autre par un mouvement (ou un déplacement, au final cela revient au même). De même, deux secteurs ont des angles égaux si on peut emmener l'un sur l'autre par un mouvement (éventuellement en passant par

[9] C'est exactement ce que je fais en ce moment avec la souris de mon ordinateur !

[10] Elles ne peuvent pas l'être dans le plan mais le pourraient dans l'espace et c'est bien ainsi qu'on explique la symétrie axiale aux enfants : par le pliage. Un pliage est un mouvement dans le groupe des isométries de l'espace qui joint l'identité à un demi-tour.

l'espace). Dans les deux cas, c'est ce qu'on appelle, pour parler comme autrefois, des objets "superposables".

Attention, je ne pense pas qu'il soit nécessaire d'introduire un nouveau mot (celui de mouvement), mais cette idée de déplacement continu (de déplacement au sens commun, en fait) me semble importante.

Avec ces idées en tête, examinons la preuve que donne Euclide du premier cas d'égalité des triangles (deux côtés et l'angle qu'ils englobent). On a deux triangles ABC et $A'B'C'$ avec $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et il s'agit de voir qu'ils sont "égaux" (c'est-à-dire de voir l'égalité de l'autre côté et des autres angles). Pour cela Euclide transporte le triangle ABC en amenant A en A' et la demi-droite $[AB)$ sur la demi-droite $[A'B')$. Voilà ce qu'il dit :

En effet, si l'on appliquait le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$ de manière à faire coïncider d'abord les points A et A', puis les côtés AB et $A'B'$ ...

Même s'il ne le dit pas explicitement, on sent bien qu'il fait un mouvement et c'est aussi ce qu'on faisait autrefois dans les classes, quand on expliquait les cas d'égalité avec des triangles en carton. Euclide montre alors que les triangles ainsi rapprochés coïncident, ce qui prouve le résultat. Bizarrement il oublie le cas où les triangles ne sont pas dans le même demi-plan, mais il suffit de faire une symétrie axiale pour se ramener au cas qu'il envisage[11]. Un mathématicien considérera que cette démonstration n'en est pas vraiment une car les opérations de déplacement, mouvement, superposition, etc. ne sont pas définies. Cependant, cette preuve, que donnaient les maîtres d'autrefois, était convaincante pour tout le monde (d'ailleurs, il a fallu des siècles pour que la "preuve" d'Euclide soit critiquée). Du point de vue mathématique il y a au moins trois solutions pour surmonter cette difficulté.

La première est celle de Hilbert, la plus radicale, qui consiste à prendre le premier cas d'égalité comme un axiome. Je n'aime pas cette solution car elle revient à nier toute validité à la preuve d'Euclide et à ne plus donner de justification du tout.

Une autre solution, qui est plus ou moins adoptée en seconde actuellement, consiste à effectuer cette preuve en utilisant les transformations, cf. par exemple [P4]. Le problème, de mon point de vue, c'est que c'est dénué d'intérêt didactiquement : il faut avoir fait les transformations avant les cas d'isométrie et je préconise justement le contraire.

La troisième solution, qui est celle que je propose, c'est de faire la preuve d'Euclide en utilisant (évidemment, de manière tout à fait implicite au collège) un axiome supplémentaire, à savoir l'existence d'un groupe de transformations (qui seront des isométries car on s'en servira aussi pour définir l'égalité des grandeurs), transitif sur ce qu'on appelle les drapeaux : les triplets formés d'un point, d'une demi-droite d'origine ce point et d'un demi-plan limité par cette droite. C'est cela qui permet d'amener le point A en A', la demi-droite $[AB)$ sur $[A'B')$ et le demi-plan contenant C sur celui contenant C'. Je prétends que cette transitivité est "naturelle" au sens où c'est ce qu'on fait expérimentalement en déplaçant (et retournant éventuellement) les objets. Elle l'est aussi mathématiquement, car ce que dit cette propriété c'est que le plan est (un espace) **homogène** : les points, les demi-droites les demi-plans sont tous équivalents sous l'action d'un groupe (c'est aussi comme cela qu'on peut définir les polyèdres réguliers, par exemple, par la transitivité du groupe des isométries sur

[11] Cet oubli est peut-être une preuve de plus qu'il pense en termes de mouvements continus !

les drapeaux point, arête, face).

Pour finir la preuve, il faut en plus un certain nombre de petits résultats parfaitement évidents intuitivement[12], du genre : si on a deux points B, C d'une même demi-droite $[Ax)$ avec les longueurs égales : $AB = AC$ alors on a $B = C$; si on a deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ax')$ dans un même demi-plan limité par $[Ay)$ et si les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'Ay}$ sont égaux, alors les demi-droites $[Ax)$ et $[Ax')$ sont égales.

c) Les nombres.

C'est un point sur lequel je me sépare non seulement de Hilbert, mais aussi d'Euclide. En effet, les grecs n'utilisaient pratiquement pas les nombres en géométrie et on peut se demander pourquoi. Il y a sans doute des raisons philosophiques (la pureté des méthodes géométriques ?). Mais il y a surtout, à mon avis, le fait que les grecs ne disposaient pas d'une bonne notion **géométrique** de nombre. Je m'explique : j'entends par géométrique, s'agissant de la géométrie de la droite, une notion de nombre avec un **ordre** et un ordre lisible. Or, au-delà des entiers, les grecs disposaient des rationnels (et encore leur statut de nombre n'est pas clair) et ceux-ci se prêtent très mal à la comparaison (sans réfléchir : lequel est le plus grand de $\frac{47}{56}$ et de $\frac{81}{97}$?). Pire, s'agissant des irrationnels ils avaient à leur disposition la théorie des proportions (Euclide, Livre V), donc, en notre langage, quelque chose qui ressemble aux coupures de Dedekind. Ce n'est vraiment pas facile de calculer avec ça ! D'ailleurs, les grecs ne calculaient pas en géométrie (il ne faut pas oublier que le théorème de Pythagore est formulé en termes d'aires) et cette carence n'est pas étrangère à leurs difficultés face à des problèmes où le calcul est essentiel (par exemple les problèmes de constructions de degré ≥ 3 comme la duplication du cube). Ce qui est un peu curieux, et doit nous faire réfléchir, c'est qu'ils érigeaient en quelque sorte le défaut de leur mathématique (par ailleurs remarquable) en dogme. En effet, Platon (La République Livre VII, 525) se moque des calculateurs “qui changent l'unité pour de la menue monnaie” et dit que là où ils divisent, les savants multiplient (voir l'exercice ci-dessus avec les fractions !)

Or, il se trouve que nous avons maintenant un outil essentiel qui permet de calculer et notamment de comparer les nombres : les nombres décimaux (Stévin 1585) et que ceux-ci donnent aussi les réels (les irrationnels surgissent vite en géométrie, voir $\sqrt{2}$ avec Pythagore) avec les développements décimaux infinis[13]. L'arrivée des décimaux est une révolution épistémologique fondamentale et ce n'est sans doute pas un hasard si elle est suivie peu après par la géométrie analytique de Descartes, puis par l'explosion du calcul infinitésimal dans les deux siècles suivants.

Là où les choses deviennent intéressantes pour nous c'est que l'invention des décimaux est un des rares progrès mathématiques qui ait constitué aussi une révolution didactique[14]. En effet, les décimaux sont un outil que les enfants connaissent dès l'école primaire (même si ce n'est pas si facile).

---

[12] mais peut-être pas triviaux à prouver si l'on n'a pas mis beaucoup d'axiomes, cf. [P5] !

[13] Par parenthèse, je n'ai jamais compris pourquoi, plutôt que d'embêter les étudiants avec des coupures ou des suites de Cauchy, ce n'est pas ainsi qu'on construit les réels (quand on les construit, ce qui est une autre histoire ...).

[14] Il y a suffisamment peu de tels exemples (le calcul infinitésimal en est un autre) pour qu'on leur accorde une attention extrême.

L'autre progrès essentiel est justement l'intervention de Descartes qui donne ses lettres de noblesse aux nombres en géométrie. Pour schématiser, après Descartes, on peut penser à un produit ou un carré sans que cela désigne forcément une aire, ou à un cube sans qu'il corresponde à un volume. On peut aussi penser à une puissance quatrième bien que cette notion n'ait pas de sens géométrique. C'est un progrès comme le montre le fait qu'il a permis de résoudre les quatre grands problèmes des grecs (duplication du cube, trisection de l'angle, quadrature du cercle, construction des polygones réguliers).

Bref, si l'on peut comprendre les contorsions d'Euclide et celles de Hilbert (dont l'objectif était de légitimer Euclide), je ne vois pas pourquoi il serait nécessaire d'en passer par là aujourd'hui, d'autant qu'on sait qu'au bout du compte (cf. par exemple [H] Ch. 4) les nombres sont dans Euclide comme le ver est dans le fruit. Comme mon avis là-dessus n'est sans doute pas assez autorisé j'y ajouterai celui de Lebesgue qui dans l'introduction de [Le] dit à ce sujet des choses vigoureuses, limpides et passionnantes, allant jusqu'à proposer de supprimer le chapitre des fractions de l'enseignement de la classe de Mathématiques (la TS de 1930) (là, il exagère, à mon avis !). Je cite juste une phrase : *Notre enseignement n'utilise pas encore pleinement ce fait historique, le plus important peut-être de l'histoire des sciences : l'invention de la numération décimale.*

La conséquence de cette analyse est un oui franc et massif à Stevin, Descartes et Lebesgue. Cela se traduit dans un système d'axiomes par le fait d'avoir très tôt une mesure des grandeurs (longueurs, angles et aires) et c'est par exemple ce que fait Annie Cousin-Fauconnet pour les longueurs, cf. [CF]. Ce que je propose, au collège, est de définir la longueur, par rapport à un segment unité, en utilisant les mouvements (qui jouent ici un rôle fondamental) pour comparer et reporter les longueurs. Cela permet de définir les longueurs de mesure entière par rapport à l'unité, puis, avec des sous-unités d'un dixième, un centième, etc. de définir les mesures de longueurs décimales. C'est d'ailleurs essentiellement ce que l'on fait actuellement au collège.

En vérité, cela suppose qu'on dispose dès le début du collège d'une notion de nombre. En fait, en étant maximaliste ce vers quoi il faut tendre c'est la notion de nombre réel. On n'en est pas là, mais il est nécessaire d'avoir à disposition les entiers (relatifs) et les décimaux (ou les rationnels, si on y tient vraiment, mais il faut vraiment être un peu vicieux pour ça, peut-être qu'en Angleterre ...). Ensuite viendront des nombres algébriques non rationnels (comme les racines carrées). Mais, dans un premier temps, l'essentiel est d'avoir une image de nombres réels **dense** (au sens non discrète). C'est pourquoi les décimaux me paraissent une bonne piste. Il restera des trous : on les comblera quand il le faudra.

d) Angles, aires et volumes.

Il y a trois autres grandeurs importantes à la base de la géométrie : ce sont les angles, les aires et les volumes.

En ce qui concerne les angles, la problématique initiale est la même que pour les longueurs : deux secteurs font le même angle s'ils sont superposables, i.e. s'il existe un mouvement qui amène l'un sur l'autre. Cela permet aussi de dire qu'un angle est plus petit qu'un autre et de dire quand un angle est double, triple, décuple, etc. Pour mesurer plus avant les angles, il faut choisir une unité, puis des sous-multiples (par exemple le degré décimal) et l'idée de mesurer sur un cercle donné doit se faire jour assez vite (c'est cela un rapporteur, finalement). Seule différence (essentielle) avec les longueurs : les angles sont bornés (par 180 degrés si on se limite aux saillants, par 360 sinon).

Un mot maintenant sur la notion d'aire. J'ai dit dans la première partie combien cet invariant me semblait très important (notamment parce qu'il permet de prouver toutes les propriétés affines, à commencer par Thalès). Cela est d'ailleurs présent chez Euclide. En effet, dès le premier Élément (Prop. 35) et constamment ensuite, Euclide utilise la notion d'aire (qu'il ne définit pas et manipule parfois avec des mots trop imprécis : il parle notamment de triangles égaux pour désigner des triangles de même aire !). Il l'utilise pour prouver des résultats qui concernent les aires, mais aussi pour faire d'autres démonstrations (par exemple Thalès, cf. Livre VI, Prop. 2 !). C'est un point où les successeurs d'Euclide (et notamment Hilbert) ont tendance à oublier leur maître. Pire encore, la position de Dieudonné au début des années 1960 : *... le calcul infinitésimal doit absorber deux parties traditionnelles de la "géométrie" qui n'ont rien à y faire : le calcul des longueurs, aires et volumes et la "mesure" des angles.* Je ne suis pas d'accord, la mesure des grandeurs c'est de la géométrie, au sens étymologique du terme.

Je pense que l'une des raisons de cette désaffection pour les aires, par rapport aux autres invariants, c'est qu'il y a une difficulté supplémentaire dans la théorie. En effet, si pour les longueurs et les angles, la grandeur est la même si et seulement si les objets sont superposables ce n'est plus vrai pour les aires. Certes, si deux objets sont superposables ils ont même aire, mais c'est vrai aussi pour deux objets obtenus par découpage et recollement. D'ailleurs, dans le cas des polygones, l'aire est exactement l'invariant de découpage : deux polygones ont même aire si et seulement si l'on peut passer de l'un à l'autre par découpage et recollement (théorème de Bolyai).

Ce que je propose, à ce sujet des aires, c'est de s'appuyer sur la connaissance intuitive de cette notion, qui est travaillée dès l'école primaire et revue tout au long du collège. Finalement, ce dont on a besoin pour établir les lemmes essentiels qui seront utiles en géométrie affine (médiane, trapèze, proportions)[15] c'est de la formule $base \times hauteur/2$. Pour établir cette formule, il faut d'abord établir celle de l'aire du rectangle, puis utiliser découpage et recollement pour passer au triangle rectangle, puis au triangle quelconque. Il reste à prouver, ou au moins justifier, la formule de l'aire du rectangle (ce qui, sur le plan théorique n'est pas totalement évident). Dans les cas des côtés (ou même d'un) de mesure entière c'est facile, et déjà fait dès l'école élémentaire. Pour le cas de mesures décimales, c'est facile encore par changement de l'unité, c'est là que le travail sur les grandeurs et les décimaux va être efficace. En toute rigueur, il reste bien entendu le cas des réels qui se fait par passage à la limite. Mais, dans le cas présent, la formule sera bien assez justifiée par le cas des décimaux. De toutes façons, cette formule est déjà dans les programmes !

Bref, parmi les fondements de la géométrie du collège, les propriétés des aires me semblent essentielles à formuler et à ériger en axiomes. En fait, elles sont superflues car on peut évidemment montrer l'existence des aires à partir des autres axiomes de la géométrie euclidienne. Le livre de Lebesgue [Le] déjà évoqué en est une parfaite illustration. Mais, pour les élèves c'est un outil qu'il serait dommage de ne pas utiliser, puisqu'il est à disposition !

[15] même s'il y a des solutions conceptuellement plus pertinentes, cf. [P1]

3. Des propositions de programmes.

En ce qui concerne le primaire et la sixième je ne propose pas de changement fondamental. On continue à étudier la symétrie axiale, qui reste un outil important (ne serait-ce que pour rendre correcte la preuve du premier cas d'égalité !). Je ferais noter aux élèves que pour réaliser le passage d'une figure à sa symétrique de manière continue il faut sortir du plan (et voir la symétrie comme un demi-tour)[16]. On étudie encore médiatrice et bissectrice. Les seuls points où je souhaite qu'on aille un peu plus loin sont les angles et les aires. Sur les premiers je propose qu'on commence à travailler autour des calculs élémentaires (complémentaire, supplémentaire), sur les secondes je suggère de formuler explicitement la propriété d'invariance par découpage et recollement et de justifier l'aire du rectangle, comme actuellement.

Le point où je préconise le changement le plus important est la classe de cinquième. Je propose d'y introduire les cas d'isométrie (au moins les deux premiers, ceux qui comportent des angles). Bien entendu, il faut un travail préparatoire. Ce travail tourne essentiellement autour de la manipulation et des mouvements et n'est pas éloigné de l'actuel programme (constructions de triangles, transport d'angles). Ce que je souhaite c'est qu'on donne une justification, disons par exemple du premier cas (deux côtés et l'angle entre les côtés), par la méthode d'Euclide de superposition. Comme on l'a vu, cela se fait en effectuant le "mouvement" (au sens évoqué ci-dessus) qui emmène un sommet et la demi-droite qui contient un côté d'un triangle sur le sommet et la demi-droite correspondante de l'autre triangle et en constatant qu'alors les triangles coïncident (quitte à faire au besoin une symétrie axiale). Encore une fois, c'est ce que faisaient les maîtres d'autrefois et c'était tout à fait convaincant et cela peut se justifier mathématiquement, il suffit de mettre les bons axiomes.

On peut alors montrer les autres points du programme sur les angles alternes-internes et autres, le parallélogramme, les triangles isocèles, etc. Surtout, dès ce moment, on dispose d'une mine inépuisable d'exercices où l'on fait, vraiment, de la géométrie.

Bien entendu, avec cette version des choses, je vire sans pitié la symétrie centrale comme objet d'étude.

En ce qui concerne aires et volumes, pas de changement, mais le souci de justifier les résultats (même de manière approximative) doit figurer dans le programme. Bien entendu, la formule de l'aire du triangle est établie par découpage à partir de celle du rectangle.

Je propose de conserver à peu près les contenus du programme de quatrième tel qu'il est prévu dans la nouvelle version, mais en utilisant systématiquement les outils que je préconise. Cela implique d'employer les aires (au lieu de la symétrie centrale, qui d'ailleurs ne marche pas toujours) pour prouver les résultats affines (Thalès, et bien d'autres, voir la première partie de ce texte). Il faut pour cela établir les lemmes "du collège" de [P1], ce qui est immédiat à partir de l'aire du triangle. Cela implique aussi d'utiliser les cas d'isométrie (complétés par le troisième cas et le cas du rectangle) pour tout ce qui est euclidien, et notamment Pythagore. Les élèves

[16] Là où les choses deviennent vraiment difficiles, c'est le cas de la symétrie par rapport à un plan, c'est-à-dire celui du miroir, comme on le voit avec Alice.

seront alors en mesure d'aborder une multitude de problèmes et ils auront les outils pour les **chercher**.

Il reste les programmes de troisième et de seconde que j'ai un peu envie de traiter ensemble. En effet, je n'ai pas assez réfléchi, pour dire ce qu'il est primordial de traiter dans une classe ou dans l'autre.

Il me semble toutefois que doivent demeurer en troisième les points suivants :

• La partie sur le triangle rectangle et la trigonométrie.

• La partie concernant Thalès.

• Le travail sur l'angle inscrit (que je propose d'étoffer un peu, voir les commentaires sur les programmes ci-dessous).

• La partie sur la géométrie dans l'espace.

Il reste alors en débat certains thèmes qui me paraissent relever de la formation commune du citoyen (donc des classes de troisième et de seconde), mais avec un ordre à débattre :

• Les vecteurs, qui doivent être traités à ce niveau essentiellement pour l'usage en physique. Cela permet de parler (avec modération) de translation dans la foulée.

• Les rotations. J'en donnerais une définition simpliste en termes de centre, d'angle (orienté par un sens de rotation intuitif).

• Les triangles semblables.

Ce qui me paraît essentiel, si l'on parle des transformations, c'est de donner des exemples où elles sont vraiment efficaces (i.e., plus efficaces que les cas d'isométrie). Ce type d'application se rencontre notamment dans l'étude des polygones réguliers (avec par exemple un problème comme celui du triangle équilatéral vu ci-dessus), mais aussi dans des problèmes de construction (voir par exemple [DPR] §7). D'une manière générale, comme il a été dit plus haut, les transformations sont utiles quand on sait qu'elles existent. Une question importante, mais pour laquelle je n'ai pas vraiment de réponse est la composition des transformations. Je suis persuadé qu'on ne peut pas vraiment utiliser les transformations sans les composer. Cela étant c'est une notion qui avait totalement disparu des programmes (on ne parle plus de composées d'homothéties en première, il n'y a plus l'étude des isométries en TS spécialité). J'ai constaté avec intérêt la tentative en ce sens dans la relecture du programme de troisième, mais elle va totalement à contre-sens de ce que j'ai envie de proposer. Il est clair que si l'on souhaite développer cela, ce sera au détriment d'une autre partie du programme.

4. La transition vers ces programmes.

La question se pose, si l'on admet, au moins pour l'essentiel, la position ci-dessus, des mesures transitoires à prendre et notamment de la "relecture" actuelle des programmes.

D'abord, même si je crois que la bonne solution est celle que je préconise, il me semble qu'il est nécessaire, avant de prendre une décision, qu'il y ait un large débat. Je trouve que la façon actuelle de faire les programmes, avec des délais très brefs et une réflexion succincte, n'est pas raisonnable.

Cela étant, en admettant qu'on souhaite aller dans mon sens, voilà ce que je propose :

• *Renforcer dès maintenant l'usage des invariants.*

Cela signifie, pour ce qui concerne les aires, de proposer (dans le programme ? dans le document d'accompagnement ?) des preuves par ces méthodes pour Thalès, le concours des médianes, etc. Il faut pour cela dégager les "lemmes du collège", cf. [P1]. Sincèrement, pour les pratiquer depuis maintenant quelques années à un autre niveau, je pense que ce sont de bons outils.

En ce qui concerne les angles, cela veut dire insister sur les opérations de base (complémentaire, supplémentaire, angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants, somme des angles d'un triangle, angle inscrit) et donner des exemples d'utilisation, cf. [P2], [P3], [DPR], et bien d'autres (à proposer dans le document d'accompagnement).

• *Préparer le virage des cas d'isométrie.*

Cela signifie d'abord qu'il faut annoncer ce changement à l'avance et convaincre les collègues qu'il est justifié. Pour cela, il faut donner des montagnes d'exemples qui montrent les avantages (et parfois les inconvénients) de la méthode. Il faut aussi encourager des expérimentations en ce sens, développer des formations continues sur ce thème, et surtout, changer la formation initiale des maîtres.

En effet, je souscris sur ce point à ce que dit J. Arsac sur l'inappropriation de l'état actuel des choses : *"avec l'axiomatique des espaces affines et vectoriels le futur professeur est aussi bien armé qu'une poule avec un couteau pour résoudre les problèmes de l'enseignement de la géométrie"*. Il faut donc aussi montrer à nos futurs professeurs une autre approche de la géométrie, et les initier à un autre système d'axiomes. En tous cas, il est essentiel, si l'on veut qu'ils abordent les programmes efficacement, qu'ils aient pratiqué les invariants et les cas d'isométrie des triangles.

En ce qui concerne les programmes, je n'ai pas de solution miracle. Il y a des pistes : renforcer l'usage des angles, développer, en cinquième, les thèmes de construction des triangles donnés par trois éléments, etc. Mais, il est clair que, quelque précaution qu'on prenne, le virage sera difficile : ou bien on parle de cas d'isométrie (et on laisse tomber une partie des transformations), ou bien non et cela change profondément la nature du travail des profs et des élèves. En fait, d'une certaine façon, je trouve les nouvelles propositions pires que l'état actuel, de mon point de vue (et surtout le programme de troisième avec les translations et rotations définies comme composées de symétries). Cela peut être une logique parfaitement cohérente de traitement mathématique de la géométrie, c'est celle de Bachmann, mais elle est aux antipodes de la mienne et les critiques didactiques et mathématiques que je fais aux actuels programmes sont plutôt amplifiées avec ceux de la relecture. Bref, sur le sujet, je préfère encore le statu-quo.

TROISIÈME PARTIE :

REMARQUES SUR LES PROPOSITIONS

DU GROUPE DE RELECTURE

1. À propos de l'école élémentaire.

Je voudrais commencer ici par le commencement, c'est-à-dire l'école élémentaire. Si je tiens à faire ce retour en arrière sur l'enseignement primaire c'est pour plusieurs raisons, dont l'essentielle est évidente : l'enseignement primaire est le socle sur lequel s'appuie tout notre système scolaire et il est souvent décisif ; dire cela est un lieu commun, bien entendu. Il est donc fondamental que cet enseignement soit le meilleur possible et, pour cela, il importe que ses programmes soient pertinents. De ce point de vue, j'ai relu récemment le document d'accompagnement des programmes du cycle 3 que je trouve absolument remarquable et avec lequel je suis en accord presque total[17]. C'est sur ce genre de document qu'on peut mesurer quels ont été les acquis de la recherche en didactique des mathématiques dans les dernières années. J'apprécie, en particulier, un certain nombre de prises de positions sur le calcul mental, posé ou instrumenté, ou le lien nombre-géométrie *via* la mesure. J'ai cependant deux réserves, mineures, à l'égard de ce texte[18].

• La première concerne une sorte de principe, qui apparaît comme absolu dans le texte, de donner du sens à tous les algorithmes. C'est un point sur lequel je ne suis pas tout à fait d'accord. Il est sans doute utile, parfois, de savoir utiliser un algorithme sans comprendre ce qu'il fait, comme une boîte noire (mais en comprenant bien entendu ce que sont les entrées et les sorties). C'est ce que font les calculatrices et bien malin qui me dira comment elles calculent les logarithmes, par exemple. Je maintiens que, du temps où il n'y avait pas de machines, c'était utile de savoir faire les opérations à la main, vite et sans se poser de questions. Le problème est de savoir s'il y a encore des exemples d'algorithmes, qui ne relèvent pas du calcul mental et qui ne soient pas à jeter pour cause de machine plus efficace ! En fait, il faut quand même garder les algorithmes des opérations parce qu'on n'a pas toujours une calculatrice sous la main et qu'elles ne donnent pas toujours exactement ce qu'on veut (je pense à la division). La même question se pose pour le collège et le calcul littéral : j'y reviendrai.

[17] Contrairement à certains collègues universitaires qui tirent à boulets rouges sur ces programmes.

[18] Je suis aussi un peu agacé par les quelques mots qui concernent les masses : on dit dans le document, mais du bout des lèvres, qu'on peut, à ce niveau, accepter la confusion masse-poids. C'est la distinction qui serait un pédantisme inutile ! Il me semble que cette distinction (et la nature même de la masse) ne se comprend pas vraiment sans le principe d'inertie et la loi fondamentale de la dynamique.

• La seconde est plus une inquiétude qu'une critique, et découle de la première. Avec la disparition de tous les algorithmes mécaniques, le programme devient plus conceptuel, donc plus ambitieux, et je ne suis pas sûr que la formation des maîtres puisse suivre.

Cela va d'ailleurs nous ramener à notre sujet. En effet, le collège (plus la seconde) constitue la scolarité commune et c'est là que va se dessiner la culture mathématique de base pour nos concitoyens. Ceux-ci sont divers et il n'est pas facile de dire quelles mathématiques leur seront utiles. Cependant, il en est, parmi ces citoyens, qui représentent une population intéressante et qui me tiennent à cœur, ce sont les futurs professeurs des écoles. Il est clair qu'eux, en tous cas, auront besoin de mathématiques dans leur vie professionnelle puisqu'ils en enseigneront les rudiments à nos (petits) enfants et j'ai signalé plus haut qu'on leur demandait beaucoup. On sait que les professeurs des écoles n'ont pas en général une formation scientifique, et l'état actuel des étudiants (disons de lettres ou sciences humaines) arrivant à l'IUFM du point de vue des mathématiques est désastreux, non pas tant pour leur niveau, mais surtout pour l'image des mathématiques qu'ils ont et qui est très négative. Comme la plupart d'entre eux n'ont guère fait de mathématiques qu'au collège, c'est un point qui me pose vraiment problème.

Si je voulais exprimer mon sentiment sans nuances, je dirais que l'une des raisons de ce rejet des mathématiques vient de la façon dont on les fait et, en particulier, la géométrie. Alors que ce domaine est, par excellence, celui où l'on doit chercher, dans nombre de cas l'activité des élèves se réduit à une mise en forme de démonstrations stéréotypées. En disant cela, ce ne sont pas les profs que je mets en cause, mais le programme : comme je l'ai dit dans la première partie, je pense que les élèves n'ont pas les bons outils pour chercher.

2. Commentaires de détail sur les propositions de programmes du collège.

a) L'introduction.

En gros je souscris. Notamment à propos :

• de l'utilisation des mathématiques dans les autres disciplines,

• des nombres et des grandeurs, etc.

Quelques remarques de détail :

Une virgule en trop dans le I A : "conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples".

II A Le titre "Organisation et gestion de données" me semble bien prétentieux !

II B Dans les écritures il faut ajouter l'écriture "ingénieur" avec les puissances de 10.

III A La résolution de problèmes, la théorie des situations, etc., c'est très bien, mais ce n'est pas facile à mener pour les profs, ça requiert une maîtrise qui n'est sans doute pas celle du prof de base !

III D J'aime bien le paragraphe sur la démonstration.

Une remarque générale sur la rédaction des programmes (pas seulement sur la nouvelle moûture) : je trouve souvent imprécise la formulation des contenus. En particulier on dit rarement quelles sont les méthodes proposées pour prouver les résultats ou même pour définir les notions. Personnellement, je serais beaucoup plus directif[19].

b) La classe de sixième.

Il y a des redites par rapport à l'introduction générale p. 2, dernier alinéa.

Je souscris au discours sur le calcul mental p. 6.

En revanche, p. 7 la phrase *La compréhension des étapes de la division posée est essentielle.* me semble discutable. Peut-être est-ce important du point de vue didactique, pour l'apprentissage, le dépistage des erreurs, que sais-je, mais ça n'a aucune importance du point de vue mathématique. Si quelqu'un est capable de faire une division, sans comprendre l'algorithme, mais en comprenant le résultat, au bout du compte c'est tant mieux !

p. 8 La division euclidienne dans les décimaux est quelque chose de complexe (il y a autant de divisions que de précisions choisies). Le programme n'est pas clair là-dessus, mais je ne sais pas s'il faut aller plus loin.

À propos de géométrie et démonstration, dans l'ancienne version page 21 il y avait une phrase : *Les travaux géométriques permettront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant par exemple sur la définition du cercle et les propriétés de perpendicularité et de parallélisme. On prendra garde à ne pas demander la démonstration de choses perçues comme évidentes.* On peut se demander ce que signifie cette disparition : il ne faut plus qu'il y ait de séquences déductives ou bien il faut prouver les choses même évidentes ? Ce que je veux dire c'est qu'on ne dit plus rien là-dessus. Je suppose que c'est délibéré.

p. 10 On définit la médiatrice, mais pas la bissectrice ?

p. 11 Sur les angles je ne vois pas bien quelles sont les propriétés nouvelles.

p. 11 C'est bien de mettre le vocabulaire à la fin. L'objectif n'est pas le vocabulaire contrairement à ce que pensent certains profs.

p. 11 La perspective cavalière, est-ce clair pour tout le monde quelles en sont les caractéristiques ?

p. 12 La partie symétrie axiale est modérée : ça me va.

p. 13 D'accord pour les unités dans les grandeurs !

p. 13 Je trouve la partie sur les angles assez maigre. Ne pourrait-on pas amorcer l'étude de notions simples mais utiles comme complémentaire et supplémentaire ?

p. 14 Sur les aires, je formulerais plus explicitement (avec des mots simples) les propriétés de découpage et recollement "sans perte ni chevauchement" (c'est-à-dire d'additivité et d'invariance par isométrie), au moins pour que les profs en aient clairement conscience. Je dis ça parce que mon expérience c'est que que pas un étudiant de CAPES sur 10 n'est capable de les énoncer.

Dans le programme de cinquième on dit : *L'initiation aux écritures littérales se poursuit.* Je ne vois pas qu'elle ait commencé en sixième (sauf par la négative, p. 6 en bas, p. 7 sur la division).

c) La classe de cinquième.

[19] D'ailleurs, en relisant le dernier programme de terminale, je me suis dit qu'on devrait obliger les auteurs de programmes à écrire le manuel correspondant !

Sur l'introduction du cycle central et le discours sur recherche, expérience, etc. d'accord. J'insisterais peut-être plus encore là-dessus. L'une des carences de nos élèves[20] c'est, face à un problème nouveau, d'être totalement démunis. Pourtant il y a des possibilités de démarrer une recherche même si l'on ne connaît pas le sujet, même si l'on n'a pas les outils appropriés, même à un niveau très élémentaire cf. par exemple [E]. L'une d'elles est de faire des expériences, de regarder les premiers cas, de faire des essais, des conjectures, etc. Ce que je constate c'est que les étudiants ont été déformés par leurs études (y compris universitaires) et que cette méthode, qui devrait être un réflexe, non seulement ne l'est pas, mais, d'une certaine façon, ne leur semble pas autorisée.

p. 1 de cette intro : on dit *L'initiation au raisonnement déductif doit être poursuivie* Elle avait été amorcée ? Pas clair, cf. ci-dessus.

Passons au programme proprement dit. Je n'ai pas assez réfléchi pour dire quelque chose sur la proportionnalité.

Je suis d'accord pour le lien droite et nombres (et je considère que c'est très important : par rapport à Euclide c'est un progrès essentiel).

Je ne dirai rien sur les statistiques pour deux raisons : d'abord, je suis incompétent et ensuite ça m'en...nuie. (Mais sans doute faut-il en faire.)

p. 3 D'accord pour ne pas multiplier les activités de technique pure, mais attention de ne pas tomber dans l'excès inverse.

A propos de règles de priorité : sont-elles vraiment universelles pour toutes les calculatrices ?

p. 4 La phrase *Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier* n'est pas claire pour moi : s'agit-il d'une division euclidienne ? avec quelle propriété du reste ?

Sur la divisibilité par 3 et 9 je trouve qu'on pourrait **démontrer** le critère pour des nombres à deux ou trois chiffres : c'est une belle utilisation du calcul littéral (et pas trop difficile).

Je note que le programme de cinquième est lourd côté numérique et algébrique.

p. 7 C'est là que je diverge franchement avec l'actuel programme[21]. Je n'aime déjà pas beaucoup la symétrie axiale, mais j'aime encore moins la symétrie centrale comme outil[22]. Le reproche que je fais à ces transformations est d'être très statiques : on ne voit pas facilement les figures bouger avec elles. Je préférerais une notion de mouvement, voir la deuxième partie de ce texte, qui permettrait de justifier les cas d'isométrie avec lesquels on a sans peine les angles alternes-internes, etc. et les propriétés du parallélogramme.

Autre remarque : l'ordre des items n'est pas logique, on a besoin de la symétrie centrale (et il faut sans doute aussi admettre plein de choses dessus) pour le parallélogramme et elle ne vient qu'en 3.3.

Ma proposition, à terme, est de virer la symétrie centrale (à ce niveau) et de mettre les cas d'isométrie (les trois, ou, à la rigueur, les deux avec les angles). En

[20] Je le vois quotidiennement sur mes étudiants de licence pluridisciplinaire qui sont des scientifiques, mais pas des matheux.

[21] Mais, attention, les propositions que je fais sont à discuter et il n'est pas question de leur mise en place dès maintenant.

[22] et cette position est très renforcée après la lecture du programme de troisième

fait, ils sont sous-jacents p. 8 dans la construction des triangles et plus encore dans la reproduction d'un angle à la règle et au compas (le 3ème cas).

Une remarque générale : un peu partout je dirais prouver ou justifier. (Je reprends une remarque préliminaire : le programme n'est pas assez directif à mon goût.)

p. 7 D'accord pour le paragraphe sur les angles (mais moi je montrerais les alternes internes par les triangles isométriques).

p. 8 D'accord sur tout, cf. ci-dessus pour la discussion sur les cas d'isométrie.

p. 9 Pour l'aire du triangle on peut aussi passer par le triangle rectangle et le rectangle.

p. 10 Le lemme de la médiane, d'accord, mais il faudra aussi faire les autres (le trapèze, les proportions).

À propos de l'aire du disque, je suis hostile à donner la formule sans justification. Même si ce n'est pas facile il faut dire quelque chose pour voir que c'est le même π qui intervient dans périmètre et dans aire. (En fait, je me contente de peu : un dessin me suffit.)

De même, pour les volumes du prisme et du cylindre, il faut montrer quelque chose (par découpage pour le prisme, puis, pour le cylindre en le voyant comme un prisme à beaucoup de côtés). Et tant pis si c'est approximatif : une justification incomplète (mais qui tient la route mathématiquement avec des outils plus élaborés, ça c'est le prof qui en est garant) vaut mieux que pas de justification du tout.

d) La classe de quatrième.

p. 1 C'est quoi des indices ? (J'ai pas bien compris, même à la lecture de la troisième colonne).

p. 2 Je constate qu'ici on dit que le calcul littéral a fait son apparition en 5ème : il faudrait savoir !

p. 3 Je redis la réserve que je formule sur la nécessité du sens partout. Il faut aussi, si l'on veut faire des mathématiques, que l'on puisse appliquer des formules sans se poser la question de leur origine et de leur preuve : oublier certaines étapes du chemin est une nécessité[23]. Mais je conçois que dans une première phase d'apprentissage on ait besoin de garder le sens. En fait, ce que je conteste c'est qu'on a l'air d'interdire d'appliquer des formules. Si on le fait correctement il n'y a pas de problème !

Les puissances de 10, la notation scientifique : OK, cf. physique et calculatrices.

p. 4 Sur le calcul littéral : même remarque que ci-dessus. Le but (je dis bien le but, ultime) c'est tout de même de savoir calculer avec les lettres sans réfléchir, sinon, ça ne vaut pas la peine de se fatiguer !

p. 5 Pour le théorème des milieux, je préfère de beaucoup aux preuves utilisant les symétries centrales l'usage des lemmes de la médiane et du trapèze. Voici la méthode :

Soit ABC un triangle, soit C' le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par C' coupe $[AC]$ en B'. Alors B' est le milieu de $[AC]$.

En effet, on a $\mathcal{A}(ACC') = \mathcal{A}(BCC') = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$ en vertu du lemme de la médiane, puis $\mathcal{A}(BCC') = \mathcal{A}(CBB')$ par le lemme du trapèze, d'où $\mathcal{A}(CBB') = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABB')$ et on conclut par la réciproque du lemme de la médiane.

[23] Là, c'est mon expérience de chercheur qui me fait dire ça. Il y a une telle accumulation de connaissances en mathématiques à l'heure actuelle qu'il est indispensable d'oublier, voire d'ignorer des choses !

Je ne sais pas comment on fait d'habitude avec la symétrie centrale. Voilà ce que j'ai trouvé : je trace la parallèle à (AB) par C elle coupe $(B'C')$ en D. Alors, $BCDC'$ est un parallélogramme, d'où $BC' = CD = AC'$. Il en résulte que $AC'CD$ est un parallélogramme (mais j'utilise là le fameux lemme mal aimé des professeurs de collège), d'où la conclusion car les diagonales se coupent en leurs milieux. Cela étant, la symétrie centrale marche ici parce qu'il s'agit de milieux, en revanche pour le Thalès général ça ne fonctionne plus. En revanche, la méthode utilisant les aires fonctionne **toujours** lorsque le problème est affine, même lorsque la transformation pertinente est une transvection, une dilatation ou une symétrie oblique, toutes transformations inconnues des collégiens.

p. 6 On admet le cas général de Thalès, mais là encore, c'est très facile avec les lemmes du trapèze et des proportions, cf. [P4].

À propos de Pythagore, je trouve qu'il faudrait insister pour dire que ce théorème doit recevoir une preuve[24]. Il y a de nombreuses démonstrations possibles, dont quelques-unes sont très simples.

L'une s'appuie sur la relation de moyenne proportionnelle dans le triangle rectangle. Cette preuve peut être donnée avant d'avoir le cosinus et elle montre d'ailleurs qu'il est indépendant du triangle. Comme c'est justement le paragraphe suivant, je proposerais volontiers une interversion empruntant le chemin suivant. On montre le Thalès du triangle. Ça donne l'indépendance du cosinus dans le cas parallèle. On se pose la question de l'autre cas. On se ramène au cas parallèle par une symétrie axiale (ou les triangles isométriques). On en déduit la relation de moyenne proportionnelle et Pythagore tombe tout seul !

En fait, la démonstration la plus simple utilise deux découpages du carré de côté $a+b$, l'un en deux carrés de côtés a et b et quatre triangles rectangles de côtés a, b, c (c est l'hypoténuse), l'autre en un carré de côté c et quatre triangles rectangles comme les précédents. C'est là qu'on voit l'intérêt des cas d'isométrie ! On a des triangles rectangles un peu partout avec les mêmes côtés de l'angle droit a et b et il s'agit de voir deux choses :

• qu'ils ont même aire, ce qui ne pose pas de problème avec la formule base $\times$ hauteur,

• que leurs hypoténuses sont égales (sans Pythagore, évidemment) et ça, ce n'est pas trivial avec les outils du collège. Avec le premier cas d'égalité, c'est clair : ils sont isométriques (donc ont même aire aussi).

Je trouve que ce résultat (l'hypoténuse est déterminée) est un tel fait d'évidence que c'est vraiment stupide de ne pas mettre ça au départ dans la machine et c'est un argument de plus en faveur des triangles isométriques, plus efficaces que les symétries axiales et centrales.

p. 6 Finalement, à l'ordre et aux méthodes près, je suis assez d'accord sur le contenu de ce programme de quatrième.

p. 7 L'exemple de la bissectrice confirme. Démontrer que les points de la bissectrice sont équidistants est une évidence avec les triangles isométriques. Ce n'est pas difficile non plus avec la symétrie, mais conceptuellement c'est plus délicat car il faut vraiment

[24] Peut-être que je suis à côté de la plaque, mais le programme ne devrait-il pas en suggérer une, voire deux, même si elles n'ont pas de caractère obligatoire ?

avoir la notion d'application sinon c'est du pipi de chat. Pour la réciproque c'est encore pire !

Sur les patrons de pyramide : d'accord.

Je ne vois pas bien ce qu'on va dire sur agrandissement et réduction : ce sont les propriétés des parallèles sur les angles et Thalès, rien de plus. Je n'aime pas beaucoup les notions où il n'y a pas d'énoncé. Bon, c'est une introduction à l'homothétie, je sais. Ce qui est important là-dessus c'est la notion de dimension, en fait.

p. 8 Même si on ne prouve pas le volume de la pyramide dans le cas général, on peut donner néanmoins des exemples qui justifient la formule (les pyramides de sommet le centre d'un cube et de base les faces, ou de sommet l'un des sommets et de base les faces opposées).

Je ne verserai pas une larme sur la disparition de la translation en quatrième, d'abord parce que je pense que l'outil transformation n'est pas le bon outil pour le collège, ensuite parce que c'était vraiment bâtard tel que présenté dans l'ancien programme à partir du parallélogramme et sans les vecteurs. Une translation sans son vecteur c'est comme une valise sans poignée ou une maison sans porte (le lecteur ajoutera ses variantes préférées ici). Franchement on n'a pas perdu grand-chose ! Cela étant, si on enlève peu à peu les transformations, qui sont les outils des collégiens, il faudra penser à leur en proposer d'autres, faute de quoi ils ne vont plus pouvoir rien faire. Comme je vais critiquer la version du programme de troisième, la question se pose.

e) Le programme de troisième.

Disons tout de suite que je suis très réservé sur la nouvelle rédaction proposée de ce programme, notamment en géométrie.

p. 35 Je trouve assez cocasse le parallèle entre le titre de la rubrique *contenus* qui est "Notion de fonction" et la première phrase de la rubrique *Exemples* : "Toute définition générale de la notion de fonction est hors programme" (même si je comprends bien ce qu'on veut dire !)

p. 36 Quand on parle de translation à propos de la représentation d'une fonction affine il faut que la notion de translation soit suffisamment efficace pour que les élèves comprennent quelque chose dans le cadre analytique. Avec la rédaction du programme, je n'en suis pas sûr.

Je note que le mot pente continue à être victime d'un ostracisme hérité des maths modernes[25].

p. 38 Toujours ma réserve habituelle sur le sens du calcul littéral.

Je trouve la rédaction du programme sur la partie arithmétique beaucoup trop vague à mon goût : on ne comprend pas ce qu'on attend. En tous cas moi je n'ai pas bien compris : comment calculer le *pgcd*, la partie compléments fait allusion à l'algorithme d'Euclide "ou un autre " ?? Je ne vois pas pourquoi on n'est pas un peu plus explicite.

p. 39-40 Pas de remarques.

Pour le sens direct de Thalès, je ne vois absolument pas de différence avec la version vue en quatrième !

[25] et que F. Pluvinage a très bien résumé par la phrase, digne de la Comtesse : "il n'y a pas de pente dans l'affine !"

p. 42 J'approuve la présence du théorème de l'angle inscrit, mais avec deux critiques :

• La relation angle au centre-angle inscrit n'est pas l'objectif mais un moyen ! Ce qui est essentiel c'est l'égalité des angles inscrits (du même demi-plan) qui interceptent le même arc. Je mettrais donc ça dans les compétences.

• À mon avis il faut aller un peu plus loin. D'abord dire ce qui se passe lorsqu'on prend deux angles inscrits de part et d'autre du segment et ensuite énoncer une réciproque car c'est elle qui donne l'outil vraiment efficace pour montrer que des points sont cocycliques ou alignés.

p. 42-43 sur l'espace : assez d'accord.

p. 43 Voilà le paragraphe sur lequel je suis en total désaccord. Déjà, centrer toutes l'étude des transformations sur les symétries, surtout centrales, ne me semble pas une bonne solution. Ensuite, faire des translations sans vecteurs c'est comme faire du crochet avec une aiguille à tricoter. Dans le cas présent, ce qui me gêne par dessus tout c'est que je ne sais pas quelle est la définition de la translation que l'on a en tête et je trouve d'ailleurs anormal que le programme ne donne pas d'indication là-dessus (mais peut-être est-ce prévu dans un document d'accompagnement ?). Si on la définit comme le produit de deux symétries centrales, cette transformation dépend *a priori* des centres de symétrie. En fait, elle ne dépend que du vecteur qui les joint : et voilà le vecteur qui rapplique. On peut imaginer aussi qu'on va donner la définition actuelle avec le parallélogramme, (que je n'aime pas du tout), mais alors, pour montrer que le produit de deux symétries centrales de centres A, B est une translation, il faut noter que le segment qui joint M et son image M' est parallèle à (AB), que sa longueur est double de AB et qu'il est de même sens. Ça ne porterait pas un nom, ça, par hasard ?

En fait, à tout prendre, je préférerais encore faire des vecteurs sans translations que des translations sans vecteurs, ne serait-ce qu'en pensant à la physique (je sais, il n'utilisent plus de vecteurs, patience, ils se rendront vite compte qu'ils ont fait une connerie !)

Ce que je crains, avec ce programme, c'est la disparition totale des vecteurs. En effet, on les renvoie en seconde, mais il faut modifier le programme de seconde pour les y mettre, donc supprimer autre chose (quoi ?), et tout cela me semble un peu incohérent.

De même, je conteste l'introduction et la définition (là encore on n'en donne pas vraiment une) des rotations comme produits de deux symétries. C'est un théorème, important certes, mais pas une définition. Posez-vous une seconde la question, *qu'est-ce qui est naturel pour expliquer ce qu'est une rotation ?* et je pense que vous ne direz pas que c'est de la voir comme comme composée de deux symétries (même si on peut construire toute la géométrie sur ce thème, cf. Bachmann, c'est une affaire de mathématiciens, pas d'enseignement au collège).

En fait, la vision que je propose des déplacements (liée aux mouvements, voir plus haut) s'oppose résolument à cette définition : les déplacements sont ce qu'on fait naturellement quand on bouge dans le plan et c'est une vision très discontinue et très algébrique de les écrire avec les symétries. Cette écriture a un intérêt, certes, mais pas pour des élèves de troisième ; c'était typiquement l'outil de l'ancien programme de TS spécialité, utile notamment pour calculer des composées de rotations de centres différents.

Références

[A] Arsac Gilbert, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, IREM de Lyon, 1998.

[Bk] Bkouche Rudolf, *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.

[CF] Cousin-Fauconnet Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[D] Dieudonné Jean, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1968.

[De] Descartes René, *La géométrie*, nouvelle édition, Hermann, 1886.

[E] ERMEL *Vrai ? Faux ? ... On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, INRP, 1999.

[DPR] Duperret Jean-Claude, Perrin Daniel, Richeton Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, septembre 2001.

[H] Hartshorne Robin, *Geometry : Euclide and beyond*, Springer, 2000.

[L] Lion Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

[Le] Lebesgue Henri, *La mesure des grandeurs*, Blanchard, 1975.

[P1] Perrin Daniel, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, novembre 2000.

[P2] Perrin Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.* Actes du colloque Inter-IREM premier cycle, Montpellier, juin 2001, à paraître.

[P3] Perrin Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège.* Repères IREM 53, octobre 2003.

[P4] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école* (titre non définitif). Cassini, 2004 probablement ?

[P5] Perrin Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège.* En préparation.

[R] *Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.
Pour les annexes, voir le site Internet de la SMF :
http://www.emath.fr/Serveur/Smf/smf.emath.fr/Enseignements

[R'] *L'enseignement des sciences mathématiques.* Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Odile Jacob, 2002.