Un bel exercice sur les lieux géométriques

Daniel PERRIN

1 Présentation

1.1 L'exercice

Un point E varie sur le cercle circonscrit à un triangle ABC. La droite (AE) coupe (BC) en D. Quel est le lieu du centre I du cercle circonscrit au triangle BDE ?

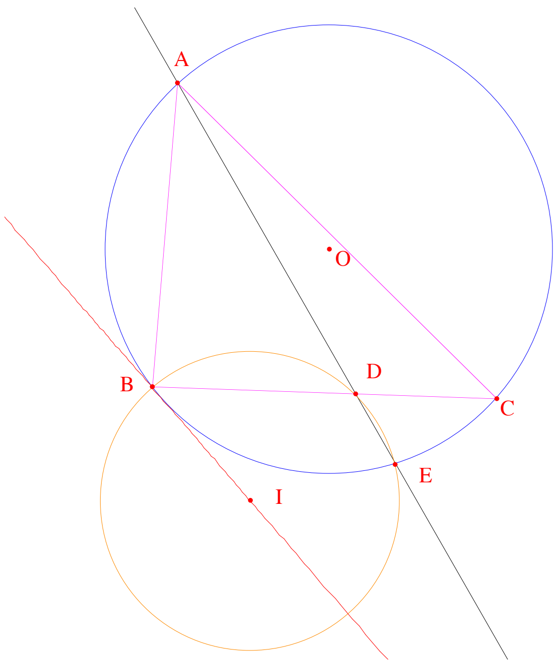

Figure 1 – L'exercice et le lieu fourni par Cabri

Dans tout ce qui suit, on appelle $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC et Γ le cercle circonscrit à BDE.

1.2 Les objectifs

Cet exercice présente plusieurs objectifs pédagogiques intéressants, notamment pour les futurs professeurs.

1.2.1 Montrer l'efficacité des logiciels de géométrie pour conjecturer

Pour les problèmes de lieux, les logiciels de géométrie offrent une aide considérable. Ici, l'expérience avec Cabri [1] montre immédiatement que le lieu est une droite passant par B.

1.2.2 Élaborer une stratégie

La stratégie que nous utiliserons est de montrer que l'angle [2] $\alpha = \widehat{IBD}$ est constant. Il y en a sans doute d'autres.

1.2.3 Montrer la multitude de possibilités tactiques

Pour mettre en œuvre la stratégie, il faut une idée, qui va se traduire par un geste géométrique (une construction supplémentaire le plus souvent). C'est l'un des charmes de la géométrie de nous obliger à faire travailler nos cellules grises. Mais on verra que n'importe quelle idée ou presque, même maladroite, mène à la solution, avec un peu d'obstination.

1.2.4 Mettre en évidence les difficultés

Dans le cas présent, mettre au point une démonstration rigoureuse n'est pas facile.

• Tout d'abord, il y a de nombreux cas de figure et la preuve doit être adaptée à chaque cas. Dans ce texte, nous commencerons toujours par donner une idée de "preuve", même si elle n'est pas inattaquable. Dans la phase de recherche, le souci de rigueur doit être mis entre parenthèses sous peine de paralyser l'investigation. Nous montrerons ensuite (mais pas dans toutes les approches) comment on peut, si on le souhaite, rendre les preuves parfaitement rigoureuses.

• Autre problème de position : pour appliquer la stratégie évoquée ci-dessus, il faut savoir de quel côté de $(BC) = (BD)$ se situe le point I.

1. Ou tout autre logiciel de géométrie dynamique.
2. Le nommer est déjà un progrès important : cela va permettre de calculer avec un nom plus court et détaché de l'angle initial.

• Une autre difficulté, commune aux problèmes de lieux, est la question de la réciproque. Nous la passerons sous silence au début, montrant seulement que I est sur une droite, mais nous y reviendrons.

1.2.5 Discuter la pertinence des outils

Nous avons souhaité ici utiliser essentiellement les outils du collège et du lycée, bannissant donc *a priori* les angles orientés qui n'y sont plus enseignés. Cela étant, même le théorème de l'angle inscrit n'est pas – sous sa forme utilisable – toujours bien énoncé dans les programmes. Le lecteur trouvera en annexe quelques preuves plus avancées utilisant les angles orientés. Cet exercice est d'ailleurs une bonne motivation pour utiliser ces outils plus sophistiqués, qui permettent d'éviter les nombreux cas de figure.

1.3 Les accessoires de l'outil angle

Lorsqu'on utilise les angles, il faut garder en tête les principaux moyens qui permettent de les utiliser. Je les rappelle brièvement :
• Les notions de complémentaire et supplémentaire.
• La somme des angles du triangle.
• Les propriétés liées aux parallèles (angles alternes-internes, etc.).
• Le théorème de l'angle inscrit.

J'énonce ici ce dernier théorème (dans une version élémentaire sans angles orientés) dans le cercle Γ et avec les notations de l'énoncé :

1.1 Théorème. *Soit Γ un cercle de centre I et B, D, E trois points distincts de Γ.*

1) Le point I est sur (BD) si et seulement si $\widehat{BED}$ est droit.

2) Il est du même côté que E par rapport à (BD) si et seulement si $\widehat{BED}$ est aigu et on a alors $\widehat{BED} = \frac{1}{2}\widehat{BID}$.

3) Il est de l'autre côté de E par rapport à (BD) si et seulement si $\widehat{BED}$ est obtus et on a alors $\widehat{BED} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{BID}$.

2 La première preuve

Rappelons que notre stratégie est de calculer l'angle $\alpha = \widehat{IBD}$. Pour cela, nous allons essayer de le comparer à d'autres angles de la figure qui pourront lui être égaux, ou complémentaires, ou supplémentaires, etc. Dans ce paragraphe, l'idée que nous utiliserons est simplement de tracer le segment $[ID]$ pour faire apparaître le triangle isocèle BID. C'est une idée comme une autre et nous allons voir qu'elle aboutit assez facilement.

2.1 Une preuve ?

Je donne d'abord une première preuve, sans me soucier de rigueur, voir la figure 2.

Le triangle BID est isocèle en I (car IB et ID sont des rayons du cercle Γ). On en déduit $\widehat{IBD} = \widehat{IDB} = \alpha$ mais aussi, avec la somme des angles du triangle, $\widehat{BID} = \pi - 2\alpha$. On a ensuite $\widehat{BID} = 2\widehat{BED}$ (angle au centre et angle inscrit dans Γ), puis $\widehat{BED} = \widehat{BEA} = \widehat{BCA}$ (angle inscrit dans $\mathcal{C}$). Comme cet angle c est constant quand E varie, il en est de même de α (on a $\alpha = \pi/2 - c$) et donc I décrit la droite Λ passant par B et faisant avec (BC) l'angle α.

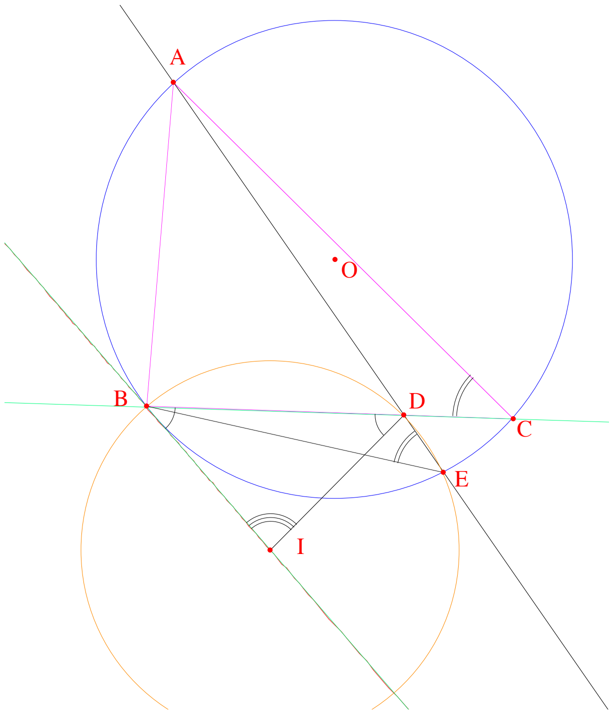

FIGURE 2 – La première preuve

2.2 Discussion

Trouver une preuve du résultat que l'on cherche, c'est bien et c'est le principal. Encore faut-il qu'elle soit solide, ce qui n'est pas le cas de celle-ci. En effet, il y a au moins cinq imprécisions dans cette preuve !

1) L'angle au centre $\widehat{BID}$ n'est égal au double de $\widehat{BED}$ que si I et E

sont du même côté de (BD), ce qui n'est pas toujours le cas. S'ils sont de part et d'autre, on a $\widehat{BID} = 2\pi - 2\widehat{BED}$.

2) On n'a $\widehat{BED} = \widehat{BEA}$ que si D est dans la demi-droite $[EA)$, ce qui n'est pas toujours le cas. Sinon, on a $\widehat{BEA} = \pi - \widehat{BED}$.

3) On n'a $\widehat{BEA} = \widehat{BCA}$ que si E et C sont du même côté de (BA), ce qui n'est pas toujours le cas. Sinon, on a $\widehat{BCA} = \pi - \widehat{BEA}$.

4) Il y a *a priori* deux droites Λ passant par B qui font avec (BC) l'angle α.

5) On a vu que le point I est sur la droite Λ, mais la décrit-il entièrement ?

2.3 Rendre correcte cette preuve ?

Deux idées me semblent essentielles à ce stade de l'étude.

• Les questions de position apparues ci-dessus sont incontournables et les élèves les poseront immanquablement si leurs figures sont différentes de celle du professeur. Cela fait partie des difficultés de la géométrie que l'on ne peut éviter que par deux artifices :

1) imposer aux élèves d'utiliser la figure dans une position figée (mais pour un problème de lieu et à l'heure des logiciels de géométrie dynamique, ce n'est pas très raisonnable),

2) utiliser les angles orientés, voir plus loin (mais cet outil n'est plus nulle part dans les programmes).

• Il est donc essentiel que les futurs professeurs aient réfléchi à ces questions et qu'ils soient conscients des difficultés. Mais il ne faut pas qu'elles les empêchent d'avancer. La deuxième idée que je veux faire passer c'est que, bien qu'on ait mis en évidence de nombreuses imperfections dans la preuve précédente, elle est tellement naturelle qu'elle ne peut pas être vraiment fausse : on peut la rendre correcte à condition de travailler un peu. C'est ce que nous allons faire maintenant.

2.1 Notation. On pose $c = \widehat{BCA}$ et on note Λ la droite passant par B et définie de la façon suivante :

• Si $c < \pi/2$, Λ passe par un point I_0 situé dans le demi-plan limité par (BC) qui ne contient pas A et qui vérifie $\widehat{CBI_0} = \pi/2 - c$.

• Si $c = \pi/2$, on pose $\Lambda = (BC)$.

• Si $c > \pi/2$, Λ passe par un point I_0 situé dans le demi-plan limité par (BC) qui contient A et qui vérifie $\widehat{CBI_0} = c - \pi/2$.

Le lecteur vérifiera qu'en termes d'angles orientés de droites, Λ est simplement définie par la formule $(BC, \Lambda) = \dfrac{\pi}{2} + (CA, CB)$.

2.3.1 Les cas limites

Avant d'étudier les cas plus génériques, précisons les cas limites où E est égal à l'un des sommets de ABC.

Si E est en B, les points B, D, E sont confondus. On convient que I est aussi confondu avec B.

Si E est en C, D est aussi en C et le triangle BDE se réduit à BCC et il n'y a plus de point I. On appelle I_C le point d'intersection de la médiatrice de $[BC]$ et de la perpendiculaire à (AC) en C. Comme le triangle BI_CC est isocèle en I_C, on a $\widehat{CBI_C} = \widehat{BCI_C}$. Si c est aigu (resp. obtus), I_C est dans le demi-plan limité par (BC) qui ne contient pas A (resp. dans celui qui contient A) et cet angle vaut $\pi/2 - c$ (resp. $c - \pi/2$). Cela montre que la droite (BI_C) n'est autre que Λ (et donc, cela montrera que I_C est la position limite de I quand E tend vers C).

Si E est en A la droite (AE) n'est pas définie, mais on peut la remplacer par la tangente en A à $\mathcal{C}$ qui coupe (BC) en un point D_A. Le point I est alors en I_A. Le lecteur montrera, en utilisant le théorème de l'angle inscrit limite, que I_A est l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la droite Λ.

2.3.2 Le cas où E et A sont de part et d'autre de (BC)

Dans ce cas, le segment $[AE]$ coupe (BC) en D, et les demi-droites $[ED)$ et $[EA)$ sont égales, donc aussi les angles $\widehat{BED}$ et $\widehat{BEA}$ (cela annule l'objection 2).

De plus, le point D, qui est dans $[AE]$, est intérieur au cercle $\mathcal{C}$, donc il est aussi dans $[BC]$. Il en résulte que le quadrilatère $ABEC$ est convexe (ses diagonales se coupent) et donc E, C sont du même côté de (AB). Cela prouve qu'on a $\widehat{BEA} = \widehat{BCA}$ (objection 3).

Il y a alors deux sous-cas, selon que I et E sont du même côté de (BC) ou non, élucidés par lemme suivant :

2.2 Lemme. *On suppose E et A de part et d'autre de (BC). Alors, le point I est sur (BC) (resp. du même côté que E par rapport à (BC), resp. de l'autre côté) si et seulement si $\widehat{ACB}$ est droit, (resp. aigu, resp. obtus).*

Démonstration. On a $\widehat{ACB} = \widehat{AEB} = \widehat{DEB}$ et on conclut avec 1.1.

Dans le premier cas, le lieu de I est la droite (BC). Dans le second, le calcul effectué ci-dessus est valable, on a $\alpha = \pi/2 - c$. Dans le troisième, on a $\alpha = c - \pi/2$, mais α est encore constant, ce qui lève l'objection 1.

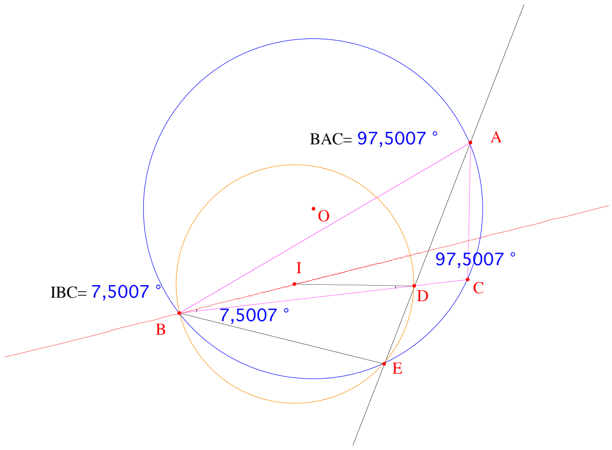

FIGURE 3 – Le cas où E et I sont de part et d'autre de (BC), $\alpha = c - \pi/2$

Enfin, en ce qui concerne l'objection 4, nous allons montrer que, quand E décrit l'arc $]BC[$ ne contenant pas A, le point I est dans l'intervalle ouvert $]BI_C[$ (voir 2.3.1).

On a le lemme de position suivant :

2.3 Lemme. *Soient B, C deux points distincts et α un angle non orienté. On considère la droite (BC) et la perpendiculaire δ à (BC) en B. L'ensemble des points M du plan vérifiant $\widehat{CBM} = \alpha$ est la réunion de quatre demi-droites issues de B, deux à deux symétriques par rapport à (BC), δ ou B. Chacune de ces demi-droites est déterminée par le quadrant limité par (BC) et δ dans lequel elle se trouve.*

Dans le cas qui nous intéresse, les points I et I_C sont dans le même quadrant, voir figure 4. En effet, notons d'abord que, comme I, I_C est de l'autre côté de A (resp. du même côté) par rapport à (BC) si c est aigu (resp. obtus) car cela résulte de sa construction. De plus, comme I et I_C sont sur les médiatrices de $[BD]$ et $[BC]$, qui sont parallèles à δ, et que D est dans $]BC[$, I et I_C sont du même côté de δ.

Comme I et I_C sont dans le même quadrant, les angles $\widehat{CBI}$ et $\widehat{CBI_C}$ sont égaux et il en résulte que I est sur la demi-droite $[BI_C)$. Enfin, pour voir que I est dans $]BI_C[$, on note que les angles $\widehat{BDI}$ et $\widehat{BCI_C}$ sont en position de correspondants et égaux, de sorte que les droites (DI) et (CI_C) sont parallèles et on conclut par Thalès.

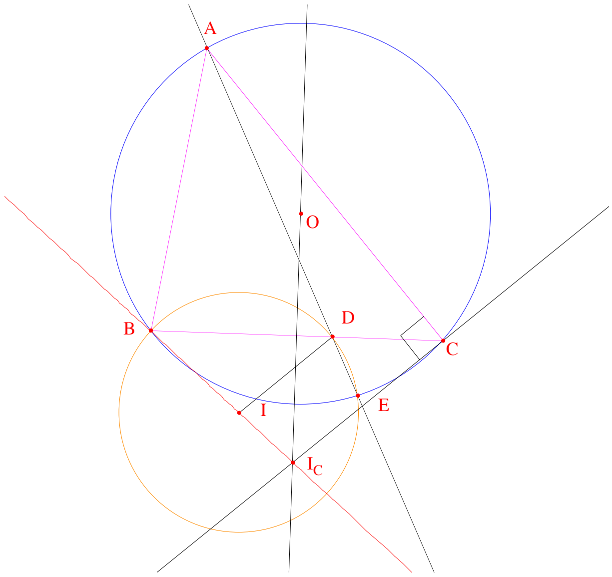

FIGURE 4 – Position de I quand E est dans l'arc BC qui ne contient pas A

2.3.3 Le cas où E et A sont du même côté de (BC)

Il y a encore de nombreux cas à distinguer et Cabri révèle là son intérêt pour en faire le tour sans en oublier. Je donne seulement les résultats, le lecteur scrupuleux se chargera des détails. On décompose le problème selon que c est aigu ou obtus. Dans le cas aigu, il y a trois cas. Appelons E_0 le point où la parallèle à (BC) passant par A coupe le cercle $\mathcal{C}$. Il y a deux cas selon la position de E_0 par rapport à A (dans l'arc CA ou l'arc AB). Supposons par exemple qu'il est dans CA, le lecteur s'occupera de l'autre cas. Il faut encore distinguer selon que E est dans l'arc CE_0, dans E_0A, ou dans AB.

Dans chaque cas on trouve que l'angle α est égal à $\pi/2 - c$, mais ce qui diffère c'est la position de I sur la droite (BI_C). Dans le cas 1) il est dans $[BI_C)$, mais au-delà de I_C. On introduit le point I_A qui correspond au cas limite $E = A$, intersection de (BI_C) avec la médiatrice de $[AB]$, voir 2.3.1. Dans le cas 2), le point I est dans la demi-droite d'origine I_A qui ne contient pas B et dans le cas 3) il est dans $]I_AB[$.

L'étude est analogue avec l'angle c obtus (avec le même nombre de cas de figure, soit six au total), mais cette fois, on a $\alpha = c - \pi/2$.

Si je n'en ai pas oublié, il y a donc 14 cas génériques ! On voit que donner une preuve complète est assez laborieux, et d'ailleurs sans grand intérêt. Ce qui est essentiel c'est de se convaincre qu'on peut y parvenir, avec un peu de

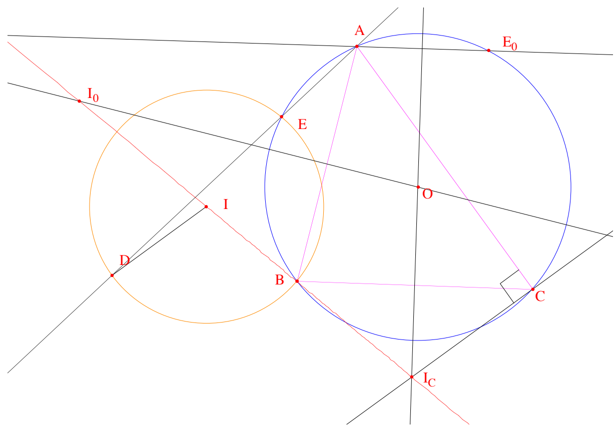

FIGURE 5 – Un exemple de cas de figure

patience.

2.3.4 La réciproque

Il s'agit de préciser quels points de Λ sont les centres de cercles circonscrits à des triangles BCD pour E (et donc D) variable. On a vu que le point B correspond au cas $E = B$. Soit I un point de Λ, distinct de B. On considère le cercle Γ de centre I passant par B. Il recoupe (BC) en un point D (il n'est pas tangent à (BC) car l'angle $\widehat{IBC}$ n'est pas égal à $\pi/2$ sinon c serait nul). Si I est égal à I_C, comme (CI_C) est perpendiculaire à (CA) les angles $\widehat{I_CBC}$ et $\widehat{I_CCB}$ sont égaux, donc I_CBC est isocèle et le point D est en C, donc aussi E. Dans ce cas il n'y a pas de triangle BCE et I_C n'est pas dans le lieu cherché. Si le point I est en I_A, le cercle Γ passe par A et B et la droite (AD) recoupe $\mathcal{C}$ en A et elle est tangente à $\mathcal{C}$ en A. Ce cas peut être considéré comme le cas $E = A$.

Si I est distinct de I_A et I_C, la droite (AD) recoupe $\mathcal{C}$ en E et on va montrer que E est sur Γ, de sorte que I est bien un point du lieu considéré. Bien entendu, comme pour le sens direct, il faut distinguer des cas de figure. Supposons par exemple que I et A soient de part et d'autre de (BC) comme sur la figure 2. On a $\alpha = \widehat{IBD} = \pi/2 - c$ par définition de Λ et, comme $IB = ID$, c'est aussi l'angle en D de BID et l'angle en I vaut $\pi - 2\alpha = 2c$. Par ailleurs, comme E est sur $\mathcal{C}$, on a $\widehat{BEA} = \widehat{BCA} = c$. Mais alors, comme I et E sont du même côté de (BC), la réciproque de la relation entre angle inscrit et angle au centre dans Γ montre que E est sur Γ.

Le lieu cherché est donc la droite Λ privée de I_C.

3 Quelques variantes de la preuve

Comme annoncé, je donne maintenant d'autres méthodes pour aborder le problème. Dans cette étude, je n'entrerai pas dans la distinction des cas de figure, le lecteur le fera, s'il y tient.

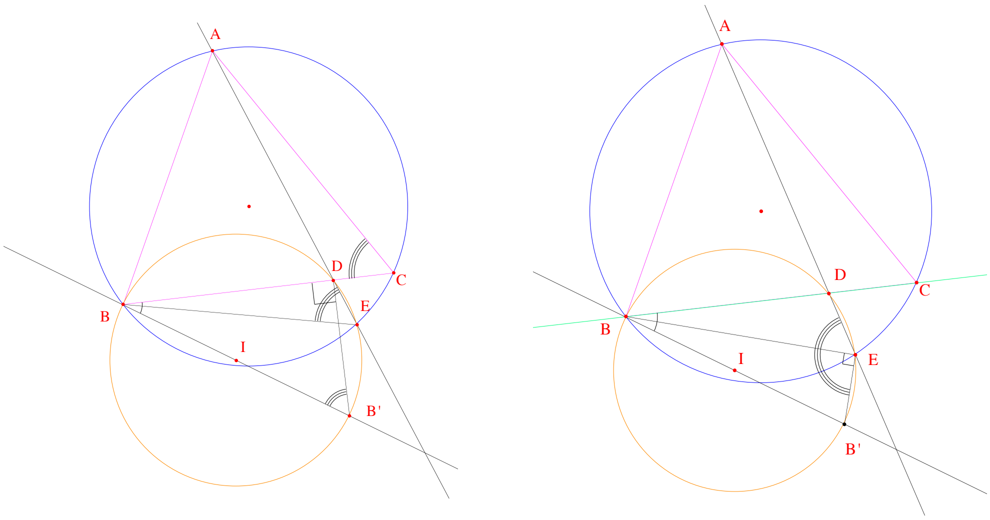

Figure 6 – Les figures des variantes 2) et 3)

3.1 La variante 2)

L'idée consiste à porter le point B' diamétralement opposé à B sur Γ. En effet, l'angle convoité $\widehat{IBD}$ est alors le complémentaire de $\widehat{BB'D}$ (le triangle $BB'D$ étant inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[BB']$ est rectangle en D). Mais cet angle est égal à $\widehat{BED}$ donc à $\widehat{BED}$ puis à $\widehat{BCA}$ et on finit la démonstration comme précédemment.

Bien entendu, les mêmes objections quant à la rigueur valent pour cette preuve.

3.2 La variante 3)

On trace cette fois $[EB']$. L'angle $\widehat{DEB'}$ est supplémentaire de α (ils interceptent tous deux un arc DB', mais sont de part et d'autre du segment) et il est égal à $\pi/2+\widehat{BED}$. On termine comme d'habitude grâce à $\widehat{BED}=c$, avec les objections habituelles.

3.3 Une variante bête ?

J'ai utilisé plusieurs fois ce problème lors de conférences sur la géométrie. En préparant l'une d'elles, j'ai recherché la démonstration, et au lieu de réfléchir, j'ai essayé de me souvenir de ce que j'avais fait les fois précédentes [3], mais je me suis trompé, traçant $[IE]$ au lieu de $[ID]$, ce qui n'est vraiment pas malin.

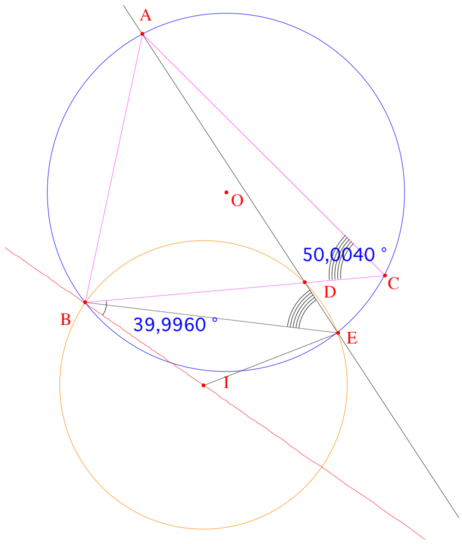

FIGURE 7 – La variante bête

Cela étant, je m'en suis tout de même sorti par le raisonnement suivant. On décompose l'angle cherché en deux morceaux : $\widehat{IBD} = \widehat{IBE} + \widehat{EBD}$. Pour le premier, on a $\widehat{IBE} = \pi/2 - \frac{1}{2}\widehat{BIE}$ puis, par le lien angle au centre-angle inscrit (dans le mauvais sens), on a $\widehat{BIE} = 2\pi - 2\widehat{BDE}$, et on en déduit $\widehat{IBE} = \widehat{BDE} - \pi/2 = \widehat{ADC} - \pi/2$. On passe à l'autre. On a $\widehat{EBD} = \widehat{EBC} = \widehat{EAC} = \widehat{DAC}$. On obtient $\widehat{IBD} = \widehat{ADC} + \widehat{DAC} - \pi/2$ et avec la somme des angles de ADC, $\widehat{IBD} = \pi/2 - \widehat{DCA} = \pi/2 - \widehat{BCA}$.

La morale de cette mésaventure c'est que l'obstination finit toujours par payer. Maintenant, bien sûr, on n'est pas obligé de choisir les voies les plus compliquées ...

3. Il ne faut jamais faire ça !

3.4 Les hauteurs

On a remarqué, dans les preuves précédentes, que α et c sont complémentaires. Cela va nous permettre de reconnaître la droite Λ. On introduit le point d'intersection B'' de (BI) et du cercle $\mathcal{C}$. On a l'égalité des angles inscrits $\widehat{BB''A} = \widehat{BCA} = c$. Comme on a $\alpha + c = \pi/2$, cela montre que $(B''A)$ est perpendiculaire à (BC). On voit donc que B'' est sur le cercle circonscrit et sur la hauteur issue de A dans ABC. Ah, mais on connaît ce point [4] c'est le symétrique de l'orthocentre de ABC et on voit ainsi que la droite cherchée n'est autre que la symétrique de la hauteur issue de B par rapport à (BC).

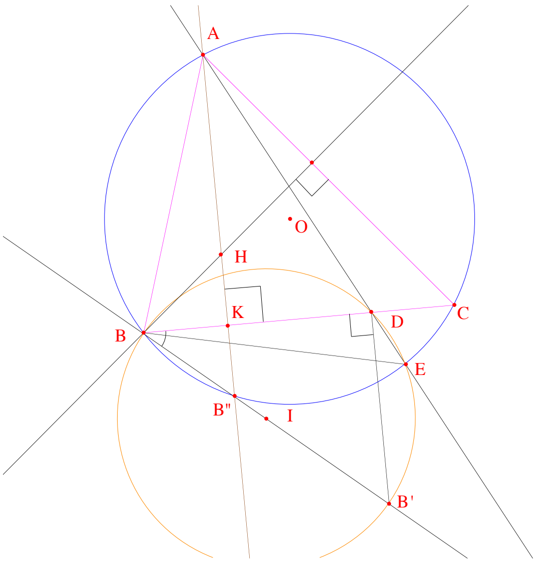

Figure 8 – Avec les hauteurs

Montrons directement ce résultat. On considère la droite (BI). Elle recoupe Γ en B' et $\mathcal{C}$ en B''. On a donc un angle droit $\widehat{BDB'}$. Vu le résultat sur le symétrique de l'orthocentre [5], il suffit de démontrer que (AB'') est perpendiculaire à (BC), ou encore qu'elle est parallèle à $(B'D)$. On considère les angles en position de correspondants $\widehat{BB''A}$ et $\widehat{BB'D}$. Tous deux sont égaux à $\widehat{BEA} = \widehat{BED}$ (comme angles inscrits, l'un dans $\mathcal{C}$ et l'autre dans Γ) et on a gagné [6] !

4. Du moins quand on a pratiqué un peu de géométrie.
5. Dans un triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit.
6. Bien entendu, il y a encore des cas de figure à considérer.

En ce qui me concerne, je n'ai trouvé cette preuve très simple qu'après bien des errances. Cela me conduit à rappeler aux apprentis géomètres un principe qu'on enseigne aux joueurs d'échecs débutants : *Quand tu vois un bon coup sur l'échiquier, ne le joue pas, il y en a sans doute un meilleur.* C'est la même chose pour les preuves en géométrie.

4 Les preuves avec les angles orientés

L'intérêt de l'utilisation des angles orientés est de limiter les cas de figure. On va donner plusieurs variantes utilisant soit les angles orientés de vecteurs, soit les angles orientés de droites. On verra que ces derniers constituent l'outil le plus efficace dans ces questions.

4.1 Par la première méthode

On reprend la première méthode vue ci-dessus en la formulant en termes d'angles orientés de vecteurs. On pose $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = c$ (angles orientés de vecteurs). On commence par exprimer que BID est isocèle en I :

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}) = \pi \pmod{2\pi}.$$

et, comme on a $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}) = -(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DI}) = (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DB})$ (par symétrie des angles à la base), on obtient $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}) = \pi - 2\alpha$. On considère alors les demi-droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$. Il y a deux cas :

• Elles sont égales. On a alors $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID}) = 2(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED})$ (angle au centre) $= 2(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$. On obtient donc $\pi - 2\alpha = 2c$.

• Elles sont opposées. On a alors $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}) = (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) + \pi$, mais on obtient le même résultat puisqu'on multiplie par 2 et qu'on est dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

En définitive, on obtient $\alpha = \frac{\pi}{2} - c \pmod{\pi}$, ce qui montre que l'angle de droites (BD, BI) est constant, donc que I décrit une droite.

Dans cette preuve, on peut remplacer les angles de vecteurs par les angles de droites. La somme des angles du triangle est alors nulle et il n'y a plus à distinguer les deux cas, ce qui est un peu plus simple.

4.2 La preuve avec la hauteur

On appelle J le symétrique de I par rapport à (BC) et on montre que (BJ) est perpendiculaire à (AC). Cette fois, on utilise les angles orientés de droites. On a $(BJ, BC) = -(BI, BC) = -(BI, BD)$.

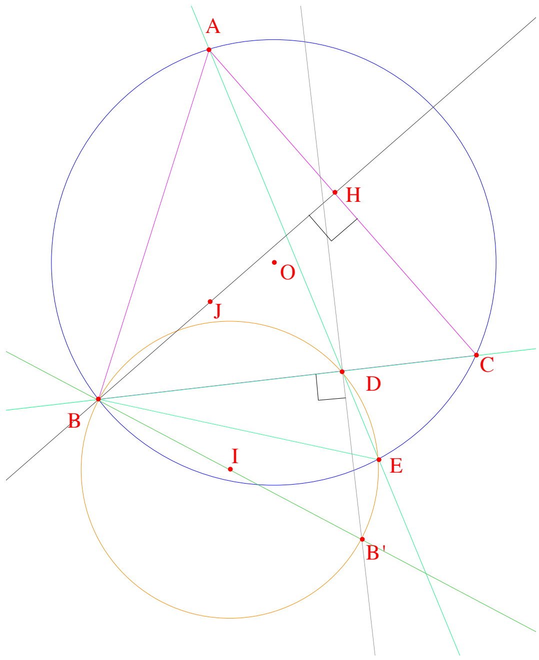

Figure 9 – Hauteur et angles orientés

Soit B' le point diamétralement opposé à B sur Γ. Le triangle BDB' est rectangle en D. Dans ce triangle on a $(BB', BD)+(DB, DB')+(B'D, B'B) = 0$, donc $(BI, BD) = \pi/2 + (B'B, B'D)$.

Le théorème de l'angle inscrit donne $(B'B, B'D) = (EB, ED) = (EB, EA)$ (dans Γ) et cet angle est égal à (CB, CA) (dans $\mathcal{C}$).

En définitive, on a $(BJ, BC) = \pi/2 + (CA, CB)$, ou, si on appelle H l'intersection de (BJ) et de (CA), $(BH, BC) = \pi/2 + (CH, CB)$. Avec la somme des angles dans BHC cela donne $(HB, HC) = \pi/2$, cqfd.

4.3 La preuve de Marie-Claude

Cette preuve a été proposée par Marie-Claude David, dans le cadre du module *Projet de géométrie.* C'est sans doute la plus simple de toutes (si l'on connaît le théorème de l'angle inscrit limite).

Soit Δ la tangente à Γ en B. Le théorème de l'angle inscrit sur le cercle Γ, exprimé en angles orientés de droites et utilisé dans la variante de l'angle inscrit limite, donne $(ED, EB) = (BD, \Delta)$. Sur le cercle $\mathcal{C}$, il donne la relation $(CA, CB) = (EA, EB)$. Comme D appartient à (EA), on a $(EA) = (ED)$, comme il est sur (BC) on a $(BD) = (BC)$ d'où l'égalité $(CA, CB) = (BC, \Delta)$. Mais, comme I est le centre de Γ on a $(\Delta, BI) = \pi/2$, d'où

$(BC, BI) = \pi/2 + (CA, CB)$ par la relation de Chasles. En vertu de la définition de Λ, voir 2.1, on a $(BI) = \Lambda$.

Cela montre que le lieu de I est contenu dans Λ. La réciproque se montre comme en 2.3.4, mais il n'y a plus lieu de distinguer les cas de figure.

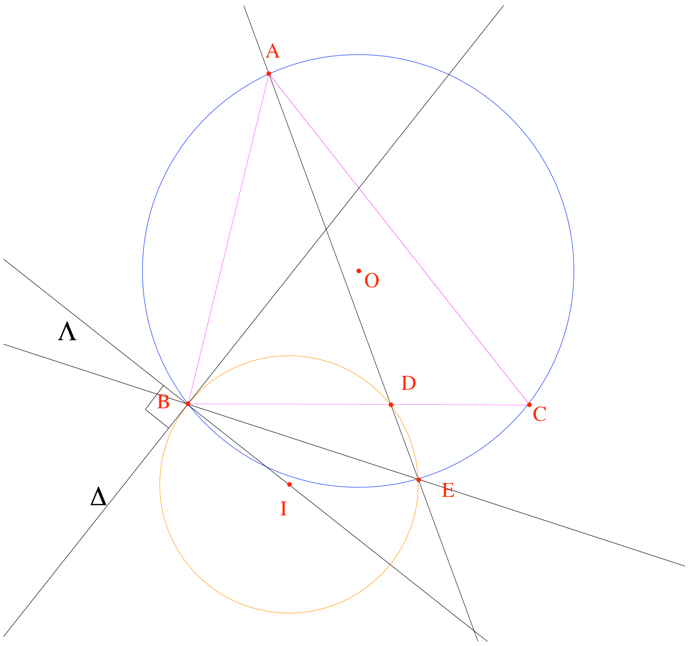

FIGURE 10 – La preuve de Marie-Claude