Autour de l'ellipse de Steiner

Daniel PERRIN

1 L'énoncé

Il s'agit d'un très bel énoncé sur les coniques :

1.1 Théorème. *Soit $\mathscr{E}$ le plan affine réel, A, B, C trois points non alignés et D, E, F les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectivement. Alors, il existe une unique ellipse Γ (dite de Steiner) tangente à (BC), (CA), (AB) en D, E, F.*

Si $\mathscr{E}$ est muni d'une structure euclidienne et qu'on l'identifie au plan complexe $\mathbf{C}$, et si A, B, C correspondent aux complexes a, b, c, les foyers de Γ correspondent aux racines de la dérivée de $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$.

2 Géométrie affine

On suppose le lecteur familier avec la géométrie affine pour laquelle on renvoie par exemple à [1] ou [2]. On considère un plan affine **réel**. On note $\vec{\mathscr{E}}$ l'espace vectoriel associé à $\mathscr{E}$. On suppose connu le groupe affine $GA(\mathscr{E})$, extension du groupe des translations par le groupe linéaire $GL(\vec{\mathscr{E}})$. On rappelle qu'une application affine conserve l'alignement, les barycentres (donc les milieux) et les rapports d'aires.

2.1 Rappels sur les coniques affines

2.1 Définition. *On munit $\mathscr{E}$ d'un repère affine et on appelle x, y les coordonnées d'un point dans ce repère.*

1) Une **conique affine** *est l'ensemble Γ des points définis par une équation de la forme : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, avec a, b, c non tous nuls. Une telle équation est définie à multiplication près par un scalaire.*

2) La conique est dite **propre** *si le polynôme homogène $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ est irréductible[1] sur $\mathbf{C}$.*

3) On suppose Γ propre et non vide et on considère la forme quadratique $q(x, y) = ax^2+bxy+cy^2$. On dit que Γ est une **ellipse** *(resp. une* **hyperbole***, resp. une* **parabole***) si cette forme est définie positive (ou négative) (resp. hyperbolique, resp. dégénérée de rang 1).*

1. Attention, ce cas englobe le cas où la conique est vide, par exemple d'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Le lecteur étudiera le cas non irréductible.

4) L'image d'une conique (resp. propre, resp. d'une ellipse, une hyperbole, une parabole) par une application affine est une conique (resp. avec tous les autres mots).

Dans ce qui suit on s'intéresse surtout aux ellipses. Le résultat principal est qu'elle forment une unique orbite sous le groupe affine.

2.2 Proposition. *Toute ellipse est image du "cercle" $x^2 + y^2 = 1$ par un élément de $GA(\mathscr{E})$. En particulier une ellipse est bornée.*

Démonstration. On suppose Γ d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. On peut supposer la forme q définie positive. Par une application linéaire on peut l'écrire sous la forme $X^2 + Y^2$. En remplaçant X par $X + \frac{d}{2}$ (resp. Y) on élimine le terme en X (resp. Y). Il reste $X^2 + Y^2 = a$ avec $a > 0$ (sinon Γ est vide) et une homothétie conclut.

2.3 *Remarque.* Soit Γ une ellipse et D une droite, dire que Γ et D sont **tangentes** signifie[2] exactement qu'elles ont un unique point d'intersection. Cette propriété est donc conservée par une bijection affine.

2.4 *Remarques.* 1) Imposer qu'une conique passe par un point $M = (x, y)$ fournit une équation linéaire entre les coefficients $a, b, \dots, f$.

2) Imposer qu'une conique passe par un point $M = (x, y)$ et soit tangente en ce point à une droite donnée fournit deux équations linéaires entre les coefficients. En effet, quitte à effectuer une transformation affine, on peut supposer que le point est $(0, 0)$ et que la droite D est $y = 0$. Dire que Γ passe par le point équivaut à $f = 0$, dire qu'elle est tangente à D signifie que l'équation $ax^2 + dx = 0$ a la racine double $x = 0$ donc qu'on a $d = 0$.

3) Comme l'ensemble des coniques est donné par 6 coefficients homogènes, on voit qu'on peut imposer 5 conditions à une conique, mais pas 6 en général. Il n'y a pas de conique passant par $D = (0, 0)$, $E = (1, 0)$, $F = (0, 1)$ et tangente aux droites $y = ax$, $x = 1$ et $y = 1$ avec $a \neq -1$, voir 4.1.

2.2 Triangles

De même que pour les ellipses, on a un résultat de transitivité sur les triangles :

2.5 Proposition. *Soient A, B, C (resp. A', B', C') des triplets de points non alignés de $\mathscr{E}$. Il existe un unique $u \in GA(\mathscr{E})$ tel que $u(A) = A'$, $u(B) = B'$, $u(C) = C'$.*

2. On vérifie que cela correspond bien à la propriété de géométrie différentielle.

Démonstration. Quitte à effectuer une translation on peut supposer $A = A'$ et il reste à envoyer la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sur la base $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ de $\vec{\mathscr{E}}$ par une application linéaire.

3 Le théorème de Steiner

3.1 Existence dans 1.1

Soit ABC un triangle et D, E, F les milieux de ses côtés. On munit $\mathscr{E}$ d'une structure euclidienne quelconque. Il existe $u \in GA(\mathscr{E})$ qui envoie ABC sur un triangle équilatéral. Comme u conserve les hypothèses (les milieux) et la conclusion (ellipse et tangente), on est ramené au cas équilatéral pour lequel l'existence est évidente : Γ est le cercle inscrit dans le triangle.

En effet, dans un triangle équilatéral il y a identité entre médianes, bissectrices et hauteurs. Soit G leur point de concours et Γ le cercle de centre G passant par le milieu D de $[BC]$. La médiane (GD) étant aussi hauteur, le rayon est perpendiculaire à (BC) en D ce qui montre que Γ est tangent à (BC) en D et le raisonnement est identique en les deux autres milieux. Voir aussi [3].

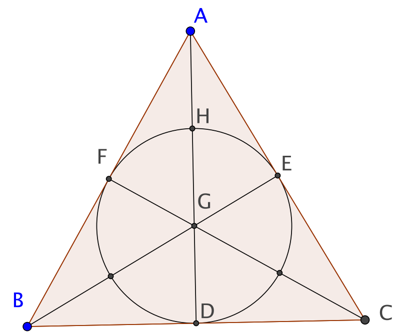

FIGURE 1 –

3.2 Unicité dans 1.1

L'unicité est un peu plus difficile et on en propose trois preuves.

3.2.1 La preuve par Bézout

Cette preuve est la plus simple, mais elle demande plus de connaissances.

Si l'on a deux ellipses Γ et Γ' vérifiant les conditions de 1.1, elles sont égales en vertu du théorème de Bézout (voir [7] ou [5]) : l'intersection de deux coniques sans composante commune comporte au plus quatre points comptés avec multiplicités. Or, ici chaque point D, E, F étant un contact compte double, et le total des multiplicités est 6.

3.2.2 La preuve analytique

On choisit un repère affine de telle sorte qu'on ait $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (0,2)$, donc $D = (1,1)$, $E = (0,1)$ et $F = (1,0)$. En écrivant que la conique Γ d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ passe par D, E, F et est tangente aux côtés (AB) et (AC) on trouve que l'équation, à un scalaire près, est $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, ce qui montre l'unicité. On vérifie que Γ est aussi tangente à (BC), ce qui montre l'existence. (La forme $x^2 + xy + y^2$ étant définie positive, on a bien une ellipse.)

3.2.3 La preuve géométrique

Il suffit de montrer [3] le résultat dans le cas d'un triangle équilatéral ABC. Soit Γ une ellipse de Steiner pour ce triangle. Il suffit de montrer que Γ est un cercle (car le cercle inscrit est unique, pourquoi ?) On la transforme en un cercle Γ' par une application affine u. Le triangle devient $A'B'C'$. Il suffit de montrer que $A'B'C'$ est équilatéral. En effet, l'application u est alors une similitude (il y a une similitude qui envoie ABC sur $A'B'C'$ et u est unique) donc aussi u^{-1}, ce qui montre que Γ est un cercle.

Montrons que $A'B'C'$ est équilatéral. Comme Γ' est tangent à $[B'C']$ en son milieu D', son centre O' est sur la perpendiculaire à $(B'C')$ en D', donc sur la médiatrice de $[B'C']$ et de même pour les autres côtés. C'est donc aussi le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$. On conclut par le lemme suivant :

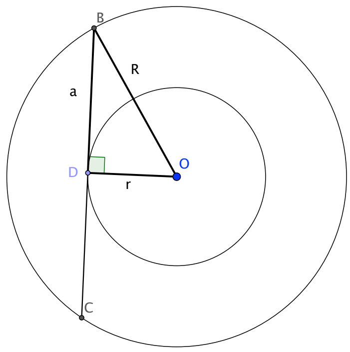

FIGURE 2 –

3.1 Lemme. *Un triangle dont les centres des cercles inscrit et circonscrit coïncident est équilatéral.*

3. Merci à Philippe Caldero de m'avoir soufflé cette belle preuve.

Démonstration. Si a est le demi côté du triangle, R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit, on a $a^2 = R^2 - r^2$ par Pythagore, voir figure 2, et la même relation vaut pour les autres côtés, de sorte que tous sont égaux.

3.3 Construction de l'ellipse de Steiner

La construction de l'ellipse de Steiner n'est pas tout à fait évidente, même avec *GeoGebra* qui dispose d'un outil qui construit la conique passant par cinq points du plan [4]. Une méthode, peu orthodoxe, consiste à prendre les points D, E, F, ainsi que deux points $D' \in [BC]$ et $E' \in [CA]$, à construire la conique passant par D, E, F, D', E' et à rapprocher D' de D et E' de E, ce qui conduit à une ellipse visuellement satisfaisante. De plus, l'examen de la figure ainsi construite et des points d'intersection de l'ellipse avec les droites (AD), (BE), (CF) conduit à montrer le lemme suivant :

3.2 Lemme. *Soit ABC un triangle, D, E, F les milieux des côtés, G le centre de gravité et soit Γ l'ellipse de Steiner de ABC. Soient H, J, K les points où Γ recoupe les droites (AD), (BE), (CF). Alors, H, J, K sont les milieux de $[AG]$, $[BG]$, $[CG]$.*

Démonstration. Les propriétés sont affines donc on peut supposer ABC équilatéral, Γ est alors le cercle de centre G passant par D, on a $GD = GH$ et comme G est au tiers de $[AD]$, on a aussi $GH = HA$, voir Figure 1.

Avec ce lemme on construit Γ en prenant la conique passant par D, E, F, H, J voir Figure 3.

4 Steiner généralisé

Une question bien naturelle, une fois qu'on a compris qu'on ne pouvait pas, en général, trouver une conique tangente aux trois côtés d'un triangle en trois points prescrits est de se demander à quelle condition c'est possible. Une méthode pour trouver le résultat consiste encore à faire l'expérience avec GeoGebra. On prend D, E, F sur les côtés du triangle, puis $D' \in [BC]$ voisin de D et $E' \in [CA]$ voisin de E et la conique Γ passant par D, D', E, E' et F. On rapproche D' de D et E' de E, puis on ajuste F pour que Γ soit tangente à (AB) en F. La conjecture saute alors aux yeux : il faut que les droites (AD), (BE), (CF) soient concourantes. Une expérience supplémentaire montre que la propriété vaut aussi si les points D, E, F sont à l'extérieur des côtés (mais

4. J'ignore comment procède GeoGebra. Une méthode plausible consiste à utiliser la macro lieu, jointe au théorème de Pascal. Quant à la macro lieu, je suppose qu'elle calcule point par point le lieu cherché.

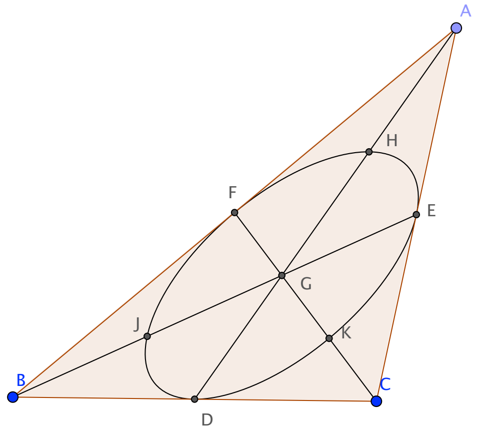

FIGURE 3 –

on peut alors obtenir une hyperbole ou une parabole). Il reste donc à prouver l'énoncé projectif suivant [5] :

4.1 Théorème. *Soit ABC un triangle du plan projectif et D, E, F des points distincts de A, B, C situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Il existe une (unique) conique propre Γ tangente à (BC), (CA), (AB) en D, E, F si et seulement si les droites (AD), (BE), (CF) sont concourantes.*

4.1 Nécessité de la condition

Supposons d'abord l'existence de la conique. Quitte à effectuer une homographie, on peut supposer que Γ est un cercle et on est ramené à montrer le lemme suivant :

4.2 Lemme. *Soit ABC un triangle, Γ un cercle tangent aux côtés de ABC et soient D, E, F les contacts de Γ. Alors, les droites (AD), (BE), (CF) sont concourantes* [6].

Démonstration. Rappelons que lorsqu'on a un cercle Γ, un point A extérieur, les tangentes issues de A sont de même longueur. Dans le cas du lemme, Γ est soit le cercle inscrit dans ABC, soit l'un des cercles exinscrits. Comme D, E, F sont les contacts avec les côtés, on a $AE = AF$, $BF = BD$ et $CD = CE$. On en déduit $\dfrac{DB}{DC} \times \dfrac{EC}{EA} \times \dfrac{FA}{FB} = 1$ et, avec des mesures

5. qui vaut sur un corps quelconque

6. Dans le cas du cercle inscrit, le point de concours s'appelle point de Gergonne du triangle.

algébriques, on vérifie que le produit est égal à -1 dans tous les cas. On conclut par la réciproque [7] du théorème de Céva, voir par exemple [6].

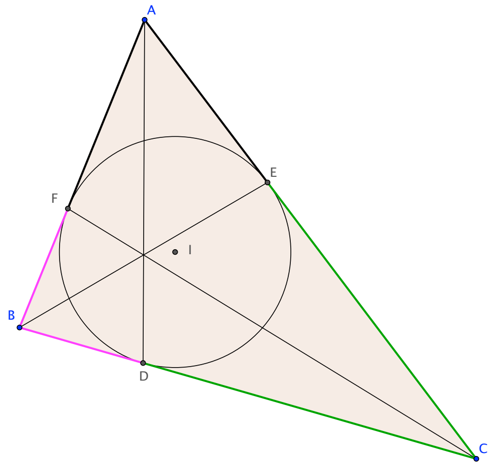

FIGURE 4 –

4.2 Existence

Réciproquement, supposons que les droites (AD), (BE), (CF) sont concourantes en G. Il existe une homographie h envoyant A, B, C sur les sommets d'un triangle équilatéral et G sur le centre de ce triangle. Dans ce cas, les images de D, E, F sont les milieux des côtés du triangle équilatéral et la conique cherchée est l'image réciproque du cercle inscrit par h.

4.3 Unicité

Pour montrer l'unicité, le plus simple [8] est encore de faire le calcul (qui vaut sur n'importe quel corps) :

4.3 Théorème. *Soit ABC un triangle du plan projectif sur un corps k de caractéristique différente de 2 et D, E, F des points distincts de A, B, C situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). Il existe une (unique) conique propre tangente à (BC), (CA), (AB) en D, E, F si et seulement si les droites (AD), (BE), (CF) sont concourantes.*

Démonstration. On choisit comme repère [9] projectif D, E, F, A et on a donc

7. Ne pas oublier de vérifier que les droites ne sont pas parallèles.
8. Ou d'attendre le paragraphe suivant (la construction).
9. Ici, on utilise la transitivité du groupe projectif sur les repères.

$D = (1,0,0)$, $E = (0,1,0)$, $F = (0,0,1)$ et $A = (1,1,1)$. Les droites (AE) et (AF) ont pour équations $X = T$ et $X = Y$. L'unique conique projective passant par D, E, F et tangente à ces droites est $-YT + TX + XY$ et la tangente en D est la droite $Y + T = 0$. Si on a la propriété, les points B, C sont $B = (1,1,-1)$ et $(C = (1,-1,1)$, les droites (AD), (BE) et (CF) ont pour équations $Y - T, X + T, X + Y$ et elles concourent en $(-1,1,1)$. Inversement, on écrit $B = (1,1,b)$ avec $b \neq 1$ et $C = (1,c,1)$ avec $c \neq 1$. Le concours de (AD), (BE), (CF) donne $b = c$ et le fait que D soit sur (BC) donne $b = -1$ et (BC) est alors tangente en D à Γ.

4.4 Construction

Pour construire la conique de Steiner généralisée avec *GeoGebra* il faut être un peu plus savant. Il suffit encore de construire les points H et J (voir figure 3). On les obtient comme conjugués harmoniques, c'est-à-dire tels que les birapports $[\![A, P, D, H]\!]$ et $[\![B, Q, E, J]\!]$ soient égaux à -1 (les savants auront noté que (EF) est la polaire de A par rapport à l'ellipse, voir [5]). En effet, le birapport se conserve par homographie et il suffit donc de montrer qu'il vaut -1 dans le cas du cercle inscrit dans un triangle équilatéral. Dans ce cas D, E, F sont les milieux et sur la médiane-hauteur $[AD]$, H est au tiers supérieur, P au milieu et G au tiers inférieur, de sorte qu'on a $\dfrac{\overline{HA}}{\overline{HP}} = -2$ et $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DP}} = -2$, donc $[\![A, P, D, H]\!] = -1$, voir figure 5 ci-dessous.

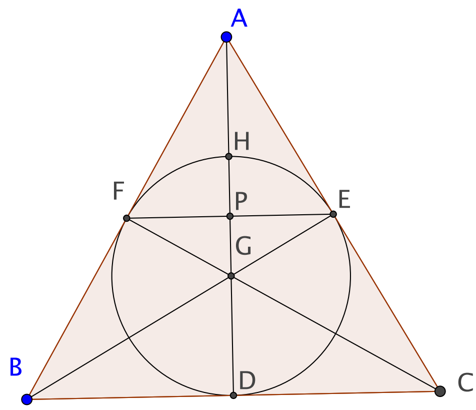

FIGURE 5 –

Pour réaliser la construction, le mieux est de fabriquer dans *GeoGebra* un outil “conjugué harmonique”. C'est facile en utilisant la propriété de la polaire. Les résultats apparaissent dans les figures ci-dessous.

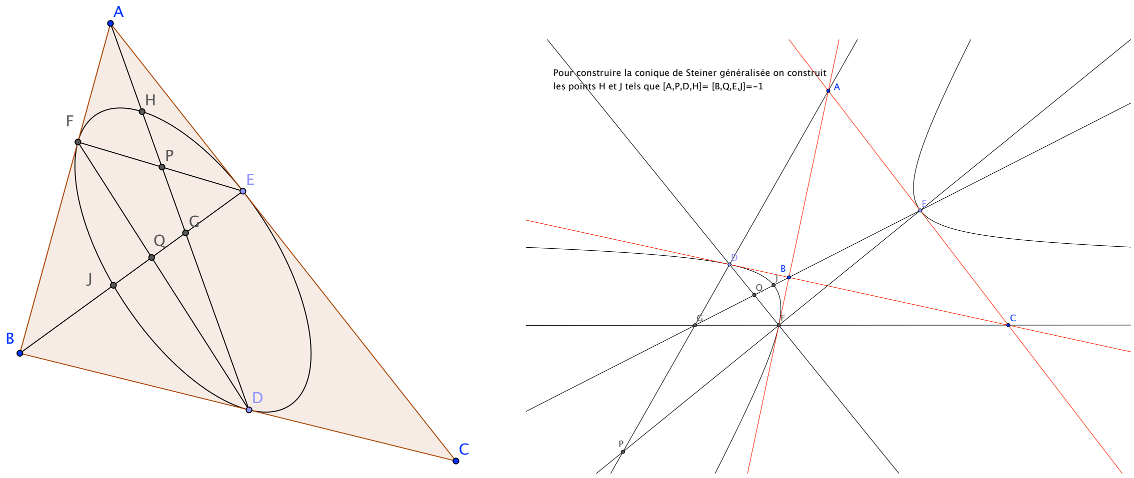

FIGURE 6 –

4.4 *Remarque.* Dans le cas où les points D, E, F sont dans les segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, on montre que la conique est une ellipse, voir §4.5, mais ce peut être une ellipse même si les points sont extérieurs, voir Figure 7.

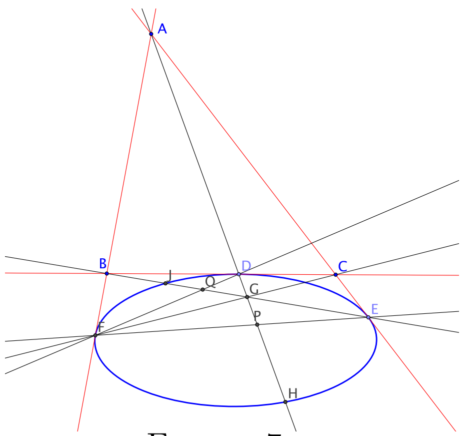

FIGURE 7 –

4.5 Le cas des points intérieurs

Le résultat est le suivant :

4.5 Proposition. *Soit ABC un triangle, A', B', C' sur les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Il existe une ellipse tangente aux côtés en A', B', C' si et seulement si (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.*

Démonstration. Le sens direct a été vu. Pour la réciproque on peut faire le calcul avec $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$, $B' = (0,\beta)$, $C' = (\gamma, 0)$. On trouve $A' = \left(\dfrac{\gamma(1-\beta)}{\beta+\gamma-2\beta\gamma}, \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\beta+\gamma-2\beta\gamma}\right)\cdot$ La conique qui est tangente aux axes en B', C' et passe par A' a pour équation :

$$\beta^2x^2 + bxy + \gamma^2y^2 - 2\beta^2\gamma x - 2\beta\gamma^2 y + \beta^2\gamma^2 = 0$$

avec $b = -2\beta\gamma(2\beta\gamma - 2\beta - 2\gamma + 1)$ (ce calcul est assez saumâtre !). On vérifie qu'elle est tangente à $y = 1 - x$ en A' et que c'est une ellipse si β, γ sont dans $]0, 1[$.

5 Steiner et les foyers

5.1 Bissectrice

Le premier lemme est le suivant :

5.1 Lemme. *Soit Γ une ellipse de foyers F, G et soit $M \in \Gamma$. Alors, la tangente à Γ en M est la bissectrice extérieure de $\widehat{FMG}$.*

Démonstration. On considère $M \in \Gamma$ et la bissectrice extérieure Δ de $\widehat{FMG}$. Pour montrer qu'elle est tangente en M il suffit de montrer qu'elle ne coupe Γ qu'en M. Soit $N \in \Delta$. Il suffit de voir qu'on a $NF+NG > MF+MG$. Soit F' le symétrique de F par rapport à Δ. Comme Δ est bissectrice de (MF) et (MG), F' est sur (MG). De plus, le point M est entre G et F'. En effet, comme Δ est la bissectrice extérieure de $\widehat{FMG}$, le secteur saillant est tout entier du même côté de Δ et en particulier les points F, G, de sorte que F' et G sont de part et d'autre de Δ. On a donc $MF + MG = MF' + MG = F'G$. Mais on a $NF + NG = NF' + NG$ et comme N n'est pas sur $(F'G)$ (la bissectrice et le côté n'ont que M en commun), $NF + NG$ est strictement plus grand que $F'G = MF + MG$.

5.2 *Remarque.* On peut aussi prouver le résultat en utilisant le calcul différentiel. On paramètre l'ellipse par $M(t) = (x(t), y(t))$. On a la relation $M(t)F + M(t)G = 2a$ que l'on dérive. Si $\vec{V}(t)$ est le vecteur tangent, dérivée de $\overrightarrow{OM}(t)$,

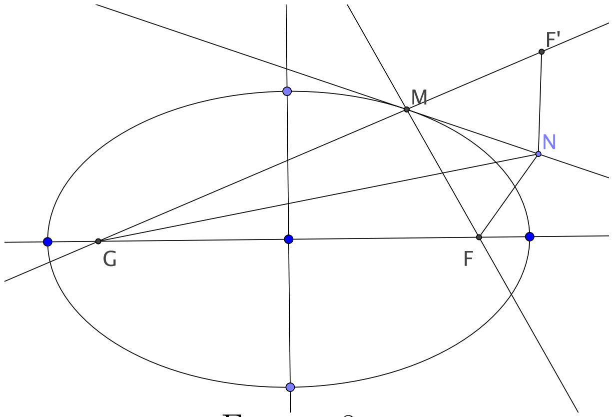

FIGURE 8 –

la dérivée de $M(t)F$ c'est $\dfrac{(\overrightarrow{M(t)F}|\vec{V}(t))}{\|\overrightarrow{M(t)F}\|}\cdot$ Si l'on désigne par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{M(t)F}$ et $\overrightarrow{M(t)G}$, on voit que $\vec{V}(t)$ est orthogonal à $\vec{u}+\vec{v}$ ce qui est le résultat.

5.2 Poncelet

Le second lemme est dû à Poncelet :

5.3 Lemme. *Soit Γ une ellipse de foyers F, G, P un point extérieur à Γ et S et T les points de contact des tangentes à Γ issues de P. On a l'égalité d'angles orientés de droites : $(PS, PF) = (PG, PT)$.*

Démonstration. On rappelle que si deux droites D_1, D_2 se coupent en O, la composée $\tau_{D_2} \circ \tau_{D_1}$ des réflexions associées est la rotation de centre O et d'angle (de vecteurs) $2(D_1, D_2)$. Il suffit donc de montrer l'égalité des deux rotations $\rho_1 = \tau_{PF} \circ \tau_{PS}$ et $\rho_2 = \tau_{PT} \circ \tau_{PG}$ et pour cela d'exhiber un point autre que P qui a même image par les deux. On considère les symétriques F', F'' de F par rapport à (PS) et (PT). Comme la tangente est bissectrice extérieure des droites qui joignent le contact aux foyers, on voit que F' est sur (GS) et F'' sur (GT). On calcule alors $\rho_1(F')$, c'est F, puis $\rho_2(F')$. Pour voir que c'est F aussi il suffit de montrer que $\tau_{PG}(F') = F''$, donc que F' et F'' sont équidistants de P et G. Pour P c'est parce que PF' et PF'' sont tous deux sont égaux à PF par symétrie. Pour G, on a, par définition des foyers, $SG + SF = 2d$ (où $2d$ est la longueur du grand axe de l'ellipse) et $SF = SF'$ par symétrie, donc $GF' = 2d$. On a de même $GF'' = 2d$ et la conclusion.

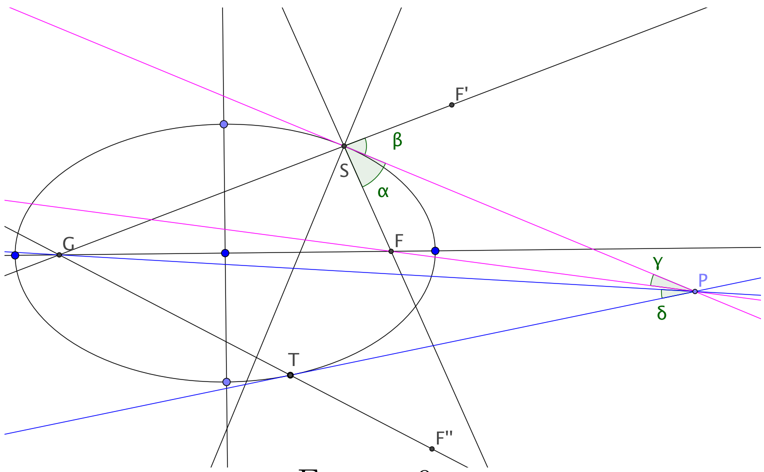

Figure 9 –

5.3 Steiner et les foyers

Rappelons tout d'abord le théorème de Gauss-Lucas :

5.4 Théorème. *Soit $P \in \mathbf{C}[z]$ un polynôme, $z_1, \dots, z_n$ ses racines. Alors, les racines de la dérivée $P'(z)$ sont dans l'enveloppe convexe de $z_1, \dots, z_n$.*

Démonstration. On note que le résultat est évident si la racine de P' est aussi racine de P (cas d'une racine double). On peut supposer P unitaire et on a $P(z) = \prod_{i=1}^{n} z - z_i$ et $P'(z) = \sum_{i=1}^{n} (z - z_1) \cdots \widehat{(z - z_i)} \cdots (z - z_n)$ donc $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{z - z_i}\cdot$ Si w est une racine de P' et pas de P on a donc $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{w - z_i} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\overline{w} - \overline{z_i}}{|w - z_i|^2}$=0. On peut encore écrire cela sous la forme $\left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{|w - z_i|^2} \right) \overline{w} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\overline{z_i}}{|w - z_i|^2}$ et on a le résultat en passant aux conjugués.

On peut alors énoncer la propriété de l'ellipse de Steiner :

5.5 Théorème. *Soient A, B, C trois points du plan, d'affixes a, b, c et P le polynôme de degré 3 dont les racines sont a, b, c. Soient f, g les racines de P' et F, G leurs images. Alors l'ellipse de foyers F, G tangente à l'un des côtés du triangle ABC est tangente aux trois en leurs milieux.*

Démonstration. On construit l'ellipse Γ de foyers F, G tangente à (AB). Pour cela on considère F' symétrique de F par rapport à (AB), M intersection de

(AB) et $(F'G)$ et l'ellipse Γ de foyers F, G passant par M. On sait par Gauss-Lucas que F, G sont dans l'enveloppe convexe de A, B, C donc du même côté par rapport aux côtés de ABC, de sorte que G et F' sont de part et d'autre de (AB). Ainsi (AB) est la bissectrice extérieure de $\widehat{FMG}$, donc la tangente à Γ en M par 5.1.

Montrons que Γ est tangente aux côtés (BC) et (CA). On écrit P' de deux manières : $P'(z) = 3(z-f)(z-g) = (z-b)(z-c)+(z-c)(z-a)+(z-a)(z-b)$. On calcule alors $P'(a) = 3(a-f)(a-g) = (a-b)(a-c)$, soit encore $\dfrac{a-b}{a-f} = 3\dfrac{a-g}{a-c}$. En égalant les arguments on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC})$ et comme (AB) est tangente, on voit avec le lemme de Poncelet 5.3 que (AC) est tangente aussi. Le même argument vaut pour (BC) en calculant $P'(b)$.

Il reste à voir l'assertion sur les milieux. Montrons que $c' = (a+b)/2$ est sur l'ellipse. Pour cela on calcule $P'((a+b)/2)$ des deux manières, on trouve $-(a-b)^2/4 = 3((a+b)/2 - f)((a+b)/2 - g)$ ce qui donne $(AB, FC') = (GC', AB)$, de sorte que (AB) est bissectrice extérieure de $\widehat{FC'G}$. Mais il l'est aussi de $\widehat{FMG}$ où M est le contact. Le symétrique de F par rapport à (AB) est donc à la fois sur (GC') et sur (GM). Si $M \neq C'$ c'est donc G mais c'est absurde pour la raison de convexité.

5.4 Constructions

Le triangle ABC étant donné, la question est de construire l'ellipse de Steiner associée et ses foyers. Il y a plusieurs méthodes.

1) On construit directement les foyers de Γ. Le théorème donne les valeurs $\dfrac{1}{3}\big(a+b+c \pm \sqrt{\Delta'}\big)$ avec $\Delta' = a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ et ces points sont constructibles à la règle et au compas dans $\mathbf{C}$. Par exemple avec $a=0$, $b=1$, $c=i$ on trouve les foyers : $\dfrac{1}{3}\big(1+i \pm e^{3i\pi/4}\big)$.

2) On construit l'ellipse de Steiner en affine comme ci-dessus, voir §3.3. Le centre O de l'ellipse est le centre de gravité de ABC (c'est affine !) ; on construit les axes de Γ en prenant un cercle centré en O qui coupe l'ellipse en quatre points. Les axes en sont les médiatrices. Avec les axes on a les sommets. Les foyers sont sur le grand axe, à la distance d'un demi-grand axe des sommets situés sur le petit axe.

3) Pour construire les foyers on peut aussi penser à un autre théorème de Poncelet : si F est le foyer d'une ellipse qui est tangente en B', C' à (AB') et (AC'), la droite (AF) est bissectrice de $\widehat{B'FC'}$. On se ramène ainsi à un problème de lieu : *Les points A, B', C' étant donnés, quel est le lieu des M tels que $(\overrightarrow{MB'}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC'})$?*

En général, ce lieu est donné par une équation du troisième degré. Voici un exemple générique à similitude près : $A = (0, 0)$, $B' = (1, 0)$, $C' = (a, b)$, on trouve l'équation :

$$(x^2 + y^2)(bx - (a + 1)y) - bx^2 + by^2 + 2axy = 0$$

c'est une cubique avec un point double en A.

5.5 Aires

Comme les rapports d'aires sont invariants par une transformation affine, on montre que le rapport entre l'aire de l'ellipse et celle du triangle vaut $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (on fait le calcul dans le cas du cercle inscrit d'un triangle équilatéral). On peut montrer que l'ellipse de Steiner est celle d'aire maximale parmi celles contenues dans le triangle, voir [4].

Références

[1] Audin M. *Géométrie*, EDP Sciences, 2006.

[2] David M.-C., Haglund F., Perrin D., *Géométrie affine*, polycopié CAPES `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/GeometrieAffine.pdf`

[3] Caldero P. et Germoni J., *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*, Calvage & Mounet, 2013.

[4] Ingrao B., *Coniques projectives, affines et métriques*, Calvage & Mounet, 2011.

[5] Perrin D., *Livre de géométrie projective, Partie III* `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie3.pdf`

[6] Perrin D., Trois applications de Thalès : Ménélaüs, Céva, Pappus `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/Menelaus.pdf`

[7] Perrin D., *Introduction à la géométrie algébrique*, Interéditions, 1995.