Un bel exercice de partage

a) L'énoncé initial.

Il s'agit d'un exercice que je propose d'ériger en prototype de ce que nous voulons proposer comme situation de recherche. Il vérifie nos trois conditions (pas évident, susceptible de plusieurs méthodes, utilisable à différents niveaux). J'essaie d'en faire une première analyse mathématique ci-dessous. Bien entendu il faudrait le soumettre à une vraie expérimentation dans des vraies classes.
Cet exercice a des variantes multiples et classiques (voir le livre de E. Fourrey *Curiosités géométriques,* Vuibert 1907, réédition 1994). Sous la forme que je donne ici je l'emprunte au livre de Erich Ch. Wittmann : *Géométrie élémentaire et réalité* (Didier Hatier). Voilà l'un des énoncés qu'il propose :

Un quadrilatère convexe Q étant donné, partager Q en trois parties d'aires égales par deux droites issues d'un même sommet de Q.

b) Comprendre l'énoncé.

Quand on dit "partager" cela sous-entend qu'il faut donner une procédure de construction explicite (à la règle et au compas éventuellement, ou avec CABRI) pour réaliser le partage.

c) Répertorier les outils.

Il s'agit clairement d'un problème de géométrie affine plane, portant sur les aires, qui plus est. On doit donc pouvoir le résoudre avec les quatre lemmes du collège : le demi-parallélogramme, la médiane, le trapèze et les proportions. Bien entendu, d'autres voies sont possibles, mais cette certitude d'y arriver ainsi est notre fil conducteur.

d) Généraliser pour mieux aborder le problème.

C'est un principe souvent énoncé par certains mathématiciens (dont Polya) : mieux vaut poser un problème le plus généralement possible. Aussi, ne lésinons pas et posons le problème sous la forme suivante qui est essentiellement celle que je considérerai :

On considère un polygone P (pas nécessairement convexe) à r côtés et un point M situé sur un côté de P. Comment partager P en n parties de même aire par des droites issues de M ?

On peut même aller plus loin encore dans deux directions (cf. Fourrey) :

On considère un polygone P (pas nécessairement convexe) à r côtés et un point M quelconque du plan. Comment partager P en deux parties dans un rapport k donné arbitraire (voire en n parties dans des rapports prescrits) par une droite issue de M (voire des droites issues de M) ?

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, il est plus facile d'aborder le problème sous la forme générale. En particulier, par rapport au problème initial celui-ci, puisque formulé en général, présente l'avantage de pouvoir être spécialisé.

C'est même assez naturel (c'est un autre bon principe de commencer à regarder les exemples les plus simples avant d'aborder le cas général), alors que l'autre problème, par son côté fixé ($r = 4, n = 3$, etc.) s'y prête moins. L'intérêt de la chose est de s'attaquer à un problème plus facile même que le problème initial : sérier les difficultés c'est ce qu'auraient préconisé Descartes, ou encore Horace. Du point de vue pédagogique cela offre l'intérêt supplémentaire de pouvoir élaborer peu à peu sur des cas particuliers les outils qui vont servir dans le cas général.

Attention, je ne dis pas qu'il faut avoir pour ambition de traiter le cas général dans les classes, mais il est sans doute utile de le garder en tête.

e) Spécialiser dans de multiples directions.

On peut donc spécialiser le problème tous azimuts : on peut prendre un r particulier : 4 comme proposé voire 3 ce qui est encore plus simple ; on peut prendre un n particulier : 3 comme proposé, voire 2 ; on peut prendre M en un sommet ou non ; on peut particulariser P (prendre un triangle rectangle, isocèle, équilatéral, un parallélogramme, un carré, etc) ; on peut enfin renoncer à partager par une droite et se contenter d'une ligne brisée, et sans doute bien d'autres choses encore. Travailler dans un cadre général c'est introduire un espace de liberté. C'est aussi admettre par avance que l'on ne résoudra peut-être pas tout le problème, mais qu'on avancera vers sa solution : voilà typiquement une attitude de mathématicien, à la fois ambitieuse et modeste.

f) Commençons par le commencement : le triangle.

Le cas le plus simple correspond à $r = 3$, donc un triangle ABC, à $n = 2$, et à M en un sommet, disons A. La solution est claire avec nos outils : c'est le lemme de la médiane. Guère plus compliqué, le même problème avec n quelconque : le lemme des proportions nous indique qu'il suffit de partager le côté opposé à A en n parties égales, ce que Thalès nous permet de faire à la règle et au compas. La solution est identique pour partager en des parties proportionnelles à des longueurs données.

Plus intéressant, même dans le cas $n = 2$, le cas où le point M n'est plus un sommet. Il y a une foule de manières d'aborder le problème. Je l'ai fait avec mes élèves de licence pluridisciplinaire (futurs profs des écoles). On peut s'en sortir avec base $\times$ hauteur, avec la formule de l'aire utilisant le sinus, etc.). J'aime bien la méthode suivante, conforme aux méthodes proposées (cf. figure 1) :

Je suppose M sur $[AC]$. Je sais que la médiane AA' partage le triangle en deux. Je cherche une droite (MM'), avec $M' \in [BC]$, qui partage en deux aussi. Si je prends la droite (MA') il me manque $MA'A$. Je vais remplacer A' par M', ce qui rajoutera le triangle $MA'M'$ qui doit donc être de même aire que $MA'A$. C'est le lemme du trapèze : il suffit de prendre AM' parallèle à MA'. Cette construction marche si M est plus proche de A que de C (si M est le milieu de $[AC]$, (MB) convient). Si M est plus proche de C on utilise la médiane CC'.

Le partage en $n = 3$ parties est un peu plus amusant. Supposons M sur $[AC]$ et plus proche de A. Puisque la méthode précédente marchait bien on peut essayer de commencer de la même manière : on partage $[BC]$ en trois par A' et A'' (A' le plus près de B). Les trois triangles de sommet A ainsi obtenus réalisent le partage en trois. On peut alors prendre comme première droite MA'' et corriger comme dans le cas $n = 2$: on trace (AM'') parallèle à (MA'') et M'' convient. Si on continue

avec A', il faut que la parallèle à (MA') passant par A coupe le segment $[BC]$. Cela ne marche que si M est à moins du tiers de $[AC]$ à partir de A, cf. figure 2. Sinon, on peut tenter la même méthode en partageant $[AB]$. Cela fonctionne si M est à moins du tiers côté C cette fois. Et si M est entre les deux ? Il y a plusieurs façons de s'en sortir.
On peut par exemple commencer avec A'' comme ci-dessus. On obtient M'' et il reste à partager le quadrilatère $AMM''B$ en deux parties égales par une droite issue de M : c'est notre problème, compliqué puisqu'on passe au quadrilatère, mais simplifié puisqu'on partage seulement en deux et à partir d'un sommet. On tombe donc, assez naturellement, sur un problème plus simple du cran supérieur, cf. §*g)*.

On peut aussi être plus volage, et la marguerite commencée avec A'' finir de l'effeuiller avec C', c'est-à-dire en partageant $[AB]$ en tiers. On fabrique ainsi deux triangles MCM'' et MAM' tiers du triangle ABC et le quadrilatère entre les deux est bien obligé d'être un tiers lui aussi, cf. figure 3.

On notera que les deux méthodes proposées ici se généralisent aisément au cas de n. La première conduit à partager un quadrilatère en $n-1$, l'autre à construire des triangles d'aire $1/n$ du triangle initial de chaque côté : si $M = \lambda A + (1-\lambda)B$ avec $\frac{k}{n} \leq \lambda < \frac{k+1}{n}$ on construit k triangles d'un côté et $n-k-1$ de l'autre.

g) Le quadrilatère, cas $n = 2$ à partir d'un sommet.

Appelons $ABCD$ le quadrilatère (disons convexe) et A le sommet choisi. L'idée est de renoncer à l'une des contraintes du problème (cf. JPR), à savoir le fait de partager le quadrilatère par une droite pour se contenter de le partager par une ligne brisée. Là, c'est facile : on découpe le quadrilatère en deux triangles en traçant la diagonale BD et on partage les deux triangles grâce au lemme de la médiane en passant par le milieu I de $[BD]$. Il reste à rectifier la ligne brisée. On veut donc remplacer le triangle AIC (cf. figure 4) par un triangle $AA'C$ de même aire avec $A' \in [BC]$: c'est le lemme du trapèze, on prend (IA') parallèle à (AC) et on a gagné.

La méthode se généralise au cas d'un partage en n depuis le sommet A : on divise la diagonale $[BD]$ en n et on rectifie les lignes brisées. En fait, dans ce cas, il est plus commode, pour la lisibilité de la figure, de résoudre le problème plus général énoncé à la manière de Fourrey :

Un quadrilatère $ABCD$ étant donné, le partager, par une droite issue de A, en deux parties dont les aires sont dans les rapports k et $1-k$ avec l'aire de $ABCD$

La méthode de rectification de ligne brisée fonctionne parfaitement. Il suffit de construire un point I qui partage $[BD]$ dans le rapport donné. (On sait faire cela à la règle et au compas si le rapport est un nombre rationnel, voire constructible, ou s'il est donné sur la figure.)

h) Le quadrilatère, partage général en deux, à partir d'un point quelconque du bord.

Comme la méthode précédente a bien marché, on continue. On a notre quadrilatère $P = (CDEF)$ et un point A sur $[EF]$. On découpe P par la diagonale $[CE]$. On partage le triangle CEF par une droite issue de A, qui recoupe $[CE]$ en M, puis on partage CDE en deux par une droite issue de M qui recoupe $[CD]$ en B. (Il y a des cas de figure à distinguer.) La ligne brisée AMB partage le quadrilatère en deux et il n'y a plus qu'à la rectifier. Pour cela on énonce un lemme qui vaut dans un cas un peu plus général que celui qui nous intéresse et qui devrait couvrir à peu près tous les cas :

Lemme de rectification. *Soit $CDEF$ un quadrilatère convexe, A, B des points du bord de P, B étant situé sur le côté $[CD]$, et soit M un point intérieur. On considère la ligne brisée AMB qui partage P en deux polygones P', P''. On pose $k = \dfrac{\mathcal{A}(P')}{\mathcal{A}(P)}$. On considère la parallèle Δ à (AB) passant par M.*
1) Si Δ coupe le côté $[BC]$ en B', la droite (AB') partage P en deux polygones Q' et Q'' avec le même rapport d'aires.
2) Si Δ coupe la droite (CD) en B' situé en dehors du segment du côté de D, la parallèle à (AD) passant par B' coupe (par exemple) le côté $[ED]$ en B'' et la droite (AB'') partage P en deux polygones Q' et Q'' avec les mêmes rapports d'aires.

Démonstration. 1) En vertu du lemme du trapèze on a $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AB'B)$, cf. figure 5, donc $\mathcal{A}(FAMBC) = \mathcal{A}(FAB'C)$ et la droite (AB') réalise le partage voulu.

2) Voir figure 6. On a $\mathcal{A}(AMB) = \mathcal{A}(AB'B)$ par le lemme du trapèze, puis, en notant N le point d'intersection de (ED) et (AB'), on a $\mathcal{A}(NDB') = \mathcal{A}(NAB'')$ par une variante de ce même lemme. On en déduit $\mathcal{A}(AB''D) = \mathcal{A}(AB'D)$, de sorte que (AB'') réalise le partage.

i) Et maintenant, que vais-je faire ?

Je propose d'arrêter là la recherche pour aujourd'hui, mais il est clair qu'on peut la prolonger dans de multiples directions. Pour traiter le cas général, Fourrey utilise systématiquement la construction d'un triangle équivalent au polygone donné et se ramène essentiellement au cas du triangle. On peut aussi imaginer de généraliser les lemmes de rectification (même si ce n'est pas facile à écrire). Je suis sûr que si on confie ce problème à des élèves ils inventeront des tas d'autres voies, dont certaines seront peut-être plus intelligentes. Cela mérite d'être essayé, non ?