Compte-rendu de lecture :

quatre livres de géométrie

Daniel PERRIN

00. Les livres.

[A] ARSAC Gilbert, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, IREM de Lyon, 1998.

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[H] HARTSHORNE Robin, *Geometry : Euclide and beyond*, Springer, 2000.

[L] LION Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

Quelques autres références :

[Bk] BKOUCHE Rudolf, *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.

[Le] LEBESGUE Henri, *La mesure des grandeurs*, Blanchard, 1975.

[P] PERRIN D., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, novembre 2000.

0. Introduction.

Les quatre livres énumérés ci-dessus ont un trait commun qui est de parler de géométrie et notamment d'axiomatique de la géométrie, avec une plus ou moins grande ouverture, qui sur les mathématiques (cf. [H], [L]), qui sur l'enseignement (cf. [A], [CF]). Tous me semblent intéressants et je recommande vivement leur lecture. En tous cas, ces quatre livres m'ont conduit à réfléchir un peu plus sur la géométrie, son enseignement et l'axiomatique sous-jacente. La perspective dans laquelle je vais les commenter – actualité de la commission oblige – est notamment celle de leur utilisation en formation des maîtres.

1. Le livre de Gilbert Arsac.

C'est le plus court des quatre : 121 pages petit format. C'est aussi, avec celui d'Annie Cousin-Fauconnet, le plus soucieux de l'enseignement de la géométrie. Le public visé est clairement identifié : les professeurs de collège et de lycée. Il y a quelques exercices (très peu).

a) Principes.

Je partage absolument les principes qu'énonce Arsac dans son introduction en ce qui concerne la formation des maîtres en géométrie. Je souscris en particulier à l'idée qu'"*avec l'axiomatique des espaces affines et vectoriels le futur professeur est aussi bien armé qu'une poule avec un couteau pour résoudre les problèmes de l'enseignement de la géométrie*". Il analyse aussi très bien le problème créé par le fait que, pour enseigner géométrie au collège, le futur professeur n'a guère à sa disposition que ses propres connaissances de collège. Il y a là une carence de l'université et de la formation des maîtres. Enfin, il signale à juste titre l'absence de fondements axiomatiques de la géométrie du collège, après les abandons successifs des cas d'égalité des triangles et de l'algèbre linéaire.
Pour remédier à cela, Arsac présente (brièvement) dans son livre l'axiomatique de Hilbert, avec quelques aspects historiques et une réflexion didactique partout sous-jacente et très pertinente.

b) le plan.

Le chapitre 0 présente les axiomes de la géométrie. Avant cela il livre quelques citations intéressantes de Pascal sur les "règles pour les définitions, les axiomes et les démonstrations". Les axiomes de Hilbert (version revue par Greenberg) sont présentés après un petit aperçu historique. Ce sont les axiomes usuels (incidence, ordre, congruence, continuité dont Archimède et Dedekind, parallèles).
Les chapitres suivants étudient les conséquences des axiomes (incidence au chapitre 1, ordre au chapitre 2). Il y a une discussion intéressante sur la notion de modèle.
Le chapitre 3 aborde l'étude des angles (à l'aide des axiomes d'incidence et d'ordre). Il y a notamment une discussion plus approfondie des propriétés de convexité (des polygones et particulièrement des quadrilatères).
Le chapitre 4 étudie les conséquences des axiomes de congruence. Il commence à prendre en compte l'axiome des parallèles pour établir la formule donnant la somme des angles du triangle.
Le chapitre 5 traite plus précisément de l'angle droit et de ses conséquences (médiatrices, bissectrices).
Le chapitre 6 aborde succinctement la question des mesures des longueurs et des angles (ici il y a besoin des axiomes de continuité) et revient sur les conséquences de l'axiome des parallèles (notamment sur la somme des angles d'un triangle).
La conclusion reprend les préoccupations didactiques déjà abordées dans l'introduction. Cinq points y sont abordés : le rôle de la figure (avec une analyse du lien didactique entre les "cas de figures" et les axiomes d'ordre et de continuité), le choix d'une axiomatique (il évoque celle d'Annie Cousin-Fauconnet, mais sans s'y rallier clairement), le contrat didactique (quel niveau de rigueur exiger des élèves selon les classes, quelle place pour la démonstration), l'épistémologie de l'enseignant (il plaide pour un enseignement axiomatique de la géométrie pour les futurs maîtres : j'approuve) et enfin, le lien entre démonstration et informatique (rôle des logiciels, Cabri et autres).

c) Critiques.

Je trouve que la problématique didactique de ce livre, telle qu'elle apparaît notamment dans l'introduction et la conclusion, est très intéressante et cela me semble un livre que tous les futurs maîtres devraient avoir lu et médité. La présentation des axiomes de Hilbert est agréable et concise. Je ferai toutefois à ce livre trois reproches :

1) L'auteur met "sous le tapis" (i.e. il n'en parle pas) les choses difficiles et peu agréables de la présentation d'Euclide-Hilbert (les proportions, les aires, la mesure des angles, etc. ; on se reportera au livre de Lion pour mesurer les difficultés cachées). Je trouve que c'est dommage car ce sont des questions qui se posent très vite. Pour illustrer ce que je dis, on notera qu'il n'aborde ni Thalès, ni Pythagore qui sont pourtant des résultats fondamentaux du collège. Il ne fait pas non plus (contrairement à Lion ou à Annie Cousin-Fauconnet), le lien avec les transformations. En réalité, son point de vue semble être plus de convaincre (notamment les (futurs) professeurs) qu'il est possible de donner une présentation axiomatique de la géométrie plutôt que de la développer vraiment.

2) En fait, je conteste, plus fondamentalement, le recours à l'axiomatique de Hilbert comme outil de formation des maîtres (et je vais le répéter plusieurs fois dans ce texte !). Entendons-nous bien. Je pense qu'il pourrait être utile, pour les maîtres, de connaître cette axiomatique (mais c'est évidemment vrai aussi pour celle issue de l'algèbre linéaire). Mais je la trouve trop éloignée de la pratique et de l'intuition géométrique que peuvent avoir les collégiens, notamment en ce qu'elle ne s'appuie pas du tout sur la notion de nombre. Je redirai plus précisément à propos du livre de Lion (qui ne cache rien, lui, des difficultés de cette approche) et dans la conclusion mon désaccord sur l'utilisation de cette axiomatique en formation des maîtres, s'il s'agit d'aller plus loin qu'une sensibilisation. Sur certains points, je pense qu'avec cette axiomatique, la poule aurait à sa disposition une fourchette au lieu d'un couteau, pauvre bête. Bref, je reproche à Arsac de ne pas aller au bout de son souci didactique et de ne pas proposer aux futurs professeurs une axiomatique directement adaptée à l'enseignement du collège. C'est d'autant plus dommage que cette axiomatique existe : c'est celle que propose Annie Cousin-Fauconnet.

3) Enfin, il reste assez discret sur les géométries non euclidiennes (on comparera à Lion sur ce thème).

2. Le livre d'Annie Cousin-Fauconnet.

Le livre d'Annie Cousin-Fauconnet comporte 308 pages et deux parties très distinctes (plus des annexes). Je ne parlerai ici que de la première partie, qui est une tentative de fondation axiomatique de la géométrie du collège. La seconde partie et les annexes portent sur des scénarios d'enseignement de la géométrie au collège. Je ne l'ai pas vraiment lue, mais le peu que j'en ai vu ne m'a pas vraiment convaincu. La raison essentielle, et c'est le choix de l'auteur, est que cette partie s'inscrit dans le cadre des actuels programmes et de leur philosophie d'introduction progressive des transformations. On sait que je préfère une utilisation des invariants et des cas d'égalité, bref, l'option didactique prise ici ne me convient pas et c'est pourquoi je ne l'évoquerai pas.

a) Principes.

La partie axiomatique du livre (qui traite à la fois du plan et de l'espace mais je me limiterai ici au cas du plan) présente une grande originalité par rapport aux trois autres livres. En effet, même si A. Cousin-Fauconnet propose une approche axiomatique qui commence comme celle d'Euclide-Hilbert, elle s'en sépare sur deux points fondamentaux. D'abord, elle utilise très vite les nombres en définissant une distance dans le plan (à valeurs réelles). Ensuite elle postule l'existence des symétries axiales (ou plutôt le fait que ce sont des isométries), ce qui lui permet d'avoir rapidement les transformations (c'est son objectif didactique, ne l'oublions pas).

b) Le plan.

Le chapitre I porte sur les axiomes d'incidence et d'ordre. Il est assez standard (un peu plus simple que chez Hilbert ou Arsac, assez proche de Lion). Dans ce chapitre, comme dans les deux suivants, les résultats valent aussi bien pour la géométrie hyperbolique que pour l'euclidienne.

Dès le chapitre II, A. Cousin-Fauconnet introduit une distance (vérifiant des propriétés de compatibilité avec l'alignement du genre $AC = AB + BC$ si et seulement si $B \in [AC]$). On a donc tout de suite **des nombres**. Il y a aussi un axiome de continuité (l'intersection de deux cercles est non vide quand la distance des centres vérifie ce qu'on pense).
Cet axiome lui permet de définir la symétrie axiale : l'image de M par σ_{AB} est l'unique point M' de l'autre demi-plan qui vérifie $AM = AM'$ et $BM = BM'$. Elle postule alors que cette application est une isométrie.
Cela permet de définir la notion de perpendiculaire, les médiatrices, les bissectrices.

Au chapitre III elle définit la mesure des angles (en appelant ω celle de l'angle plat et en procédant ensuite par dichotomie et passage à la limite, Lebesgue aurait été ravi, cf. [Le]). Elle étudie ensuite les isométries et montre plusieurs points fondamentaux : la transitivité sur les triangles (cas d'égalité), la transitivité sur les drapeaux (un point et une demi-droite issue de ce point) et le fait que les symétries axiales engendrent les isométries (mais, attention, il faut *a priori* des produits de trois symétries, c'est le cas en géométrie hyperbolique). Ce chapitre, qui est très convaincant, se termine par la classification des isométries (définition des rotations et des symétries centrales).

Le chapitre IV aborde la vraie géométrie euclidienne (avec l'axiome des parallèles) et les propriétés familières (mais fausses sans cet axiome) des rectangles, des médiatrices, des angles alternes-internes, des parallélogrammes. Le paragraphe se continue par l'étude des projections et du théorème de Thalès et finit avec les propriétés métriques du triangle et notamment Pythagore. Il n'y a nulle part d'aires ni de longueurs de courbes.

Je saute le chapitre V qui parle de l'espace et je dis juste un mot des chapitres VI et VII qui font le lien avec les vecteurs. A. Cousin-Fauconnet y donne une définition "élémentaire" des vecteurs (longueur, direction, sens) bien adaptée à l'enseignement secondaire et elle retrouve tous les résultats usuels sur les vecteurs et le produit scalaire, faisant ainsi le lien avec la géométrique euclidienne "cartésienne".

c) Critiques.

Je trouve la tentative d'Annie Cousin-Fauconnet tout à fait intéressante sur le plan de la recherche d'une axiomatique adaptée au collège et je suis, pour l'essentiel, d'accord avec ses choix. En particulier, je souscris de manière fondamentale à l'idée d'utiliser les nombres et donc les mesures de longueurs et d'angles. C'est – à mon avis – un progrès fondamental par rapport au temps d'Euclide de disposer des réels et il faut s'en servir. On pourrait d'ailleurs lier la définition des réels et une approche géométrique de la droite (cf. [Le], par exemple).

Je suis aussi assez d'accord avec l'idée de postuler l'existence des symétries (ou le fait que ce sont des isométries). Sur ce point j'irais un peu plus vite aux propriétés de transitivité qui permettent de **prouver** les cas d'égalité, à la manière d'Euclide. Je reviendrai, en conclusion, sur la démonstration d'Euclide par superposition et ce que je propose pour la rendre correcte. Mais finalement, comme on a besoin, de toutes façons, de la symétrie axiale, la méthode d'A. Cousin-Fauconnet qui mène très vite et de manière efficace aux cas d'isométrie me semble excellente.
Je suis un peu plus réservé sur sa définition des angles. Je préférerais, pour ma part, une définition de l'angle à partir de la longueur d'arc, celle-ci étant vue comme borne supérieure des lignes polygonales inscrites (ce n'est pas tout à fait trivial de faire cela sans le postulat d'Euclide, en particulier il faut montrer que ce sup est fini !). Ce qui me gêne dans sa présentation c'est le fait de ne jamais définir la longueur d'arc et de ne pas montrer que la corde est plus petite que l'arc. Un jour ou l'autre il faudra bien faire cela, ne serait-ce que quand on fera de l'analyse (cf. $\sin x/x$). Pas de trace non plus de certains outils importants comme les angles inscrits, et surtout les aires, mais là-encore c'est sans doute son souci d'être proche des actuels programmes.
Je suis aussi d'accord avec le choix de l'auteur de n'introduire l'axiome des parallèles qu'au dernier moment. Mais il aurait été intéressant de montrer ce que donnent les deux situations fondamentales (euclidienne et hyperbolique). On verra que Lion fait cela admirablement.

Par rapport aux prises de positions didactiques de la commission Kahane, le travail d'A. Cousin-Fauconnet (et c'est très intéressant car il n'a pas été écrit dans cette optique) permet de fonder de façon efficace une approche qui privilégie invariants (sauf les aires) et cas d'égalité. En particulier, l'utilisation des nombres évite les contorsions auxquelles doivent se livrer les fidèles de Hilbert.

Bref, je pense que le travail d'A. Cousin-Fauconnet, qui est trop peu connu à mon sens, doit être défendu et popularisé, notamment en formation des maîtres, et qu'il est un outil de travail indispensable pour les (futurs) professeurs.

3. Le livre de Robin Hartshorne.

Il s'agit cette fois d'un gros livre (500 pages). C'est un livre plus directement tourné vers les mathématiques que les autres et, de ce point de vue, il n'y a rien à dire, c'est du solide : Hartshorne est un mathématicien de premier plan (j'en sais quelque chose !).

a) Principes.

Hartshorne part d'Euclide (y compris d'une discussion des propositions des Éléments, référencées par leurs numéros, ce qui peut être gênant quand on n'a pas Euclide sous la main !). Il en montre les limites et la façon dont Hilbert a abordé les problèmes posés par les Éléments. Il fait une large place aux aspects historiques et épistémologiques. Au passage il résout la plupart des grands problèmes sur le sujet (de l'axiome des parallèles aux constructions en passant par le 3ème problème de Hilbert).

b) Le plan.

Huit chapitres composent ce livre qui comporte aussi de nombreux exercices et beaucoup de figures.
Le chapitre 1 concerne la géométrie d'Euclide. C'est un chapitre un peu bizarre dans la mesure où il est difficile à lire si on n'a pas le texte d'Euclide. Il y a, outre l'aspect historique, une discussion de la méthode axiomatique d'Euclide et de ses limites et une discussion sur les constructions à la règle et au compas et notamment celle du pentagone régulier. Le chapitre se termine par quelques résultats de géométrie postérieurs à Euclide (la concourance des hauteurs !, la droite et le cercle d'Euler, etc.)

Le chapitre 2 présente les premiers axiomes de Hilbert : incidence, ordre, congruence des segments et des angles avec, en axiome, le premier cas d'égalité. ([1])
Il étudie alors les plans hilbertiens (ceux qui vérifient ces axiomes). En particulier, il étudie soigneusement les intersections de droites et cercles (il y a besoin d'un axiome de continuité pour avoir des intersections dans le cas qu'on pense).
Au paragraphe 12 il étudie le plan euclidien (avec l'axiome des parallèles).

Le chapitre 3 s'appelle "Géométrie sur les corps". Il étudie d'abord le plan cartésien $\mathbf{R}^2$ et il prouve le théorème de constructibilité (qu'il attribue à Descartes). En langage moderne : un nombre est constructible à la règle et au compas s'il est dans une tour d'extensions quadratiques. Il aborde ensuite les corps généraux, sans ordre, puis ordonnés et discute des axiomes de congruence et de l'axiome des cercles. Il discute enfin la notion de corps non archimédien (avec des infiniment petits et grands). Pour résumer, ce chapitre montre que les nombres redonnent la géométrie.

Le chapitre 4 s'appelle "Arithmétique des segments". Il commence par une introduction épistémologique passionnante sur les réels (disons au sens des coupures de Dedekind) et leur parenté avec la théorie des proportions d'Euclide. Puis, Hartshorne définit, à partir de considérations géométriques (à la suite de Hilbert) une arithmétique des segments qui lui permet de récupérer une structure de corps ordonné. Il en tire deux applications. D'abord une définition des triangles semblables, puis, le fait qu'un plan hilbertien (avec l'axiome des parallèles) est un plan cartésien. La boucle est bouclée : la géométrie redonne les nombres ! Ce chapitre s'apparente au livre d'Artin (Algèbre géométrique, Gauthier-Villars, 1978) où E. Artin, autre grand mathématicien, analyse le lien entre algèbre et géométrie (il montre, par exemple, que Desargues équivaut à l'associativité du corps et Pappus à sa commutativité).

Le chapitre 5 porte sur les aires. Hartshorne formalise la théorie d'Euclide, centrée sur le découpage et recollement des figures (polygonales seulement), il montre l'existence d'une mesure des aires (à valeurs dans un groupe abélien ordonné) qui a les propriétés usuelles et montre le théorème de Bolyai (deux polygones de même aire peuvent s'obtenir par découpage et recollement). Il passe ensuite au volume et montre notamment la solution négative (due à Dehn) du 3ème problème de Hilbert (comme Bolyai, mais avec des polyèdres).

([1]) J'appelle premier cas d'égalité celui qui fait appel à deux côtés et un angle, SAS dirait Hartshorne (side-angle-side). C'est conforme à l'ordre d'apparition de ce cas dans Euclide ou Hilbert, mais pas avec la tradition de l'enseignement secondaire français du siècle dernier.

Le chapitre 6 porte sur le lien entre constructions et théorie des corps. Il comprend la résolution négative de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, la construction du 17-gone régulier et une partie très originale sur les constructions avec le compas et la règle "marquée" (il montre qu'avec cet outil, la duplication, la trisection, la construction de l'heptagone sont possibles).

Le chapitre 7 parle de géométries non-euclidiennes. Il commence par une discussion historique et mathématique, notamment autour des quadrilatères de Saccheri : $ABCD$ avec $(AC) \perp (AB)$, $(BD) \perp (AB)$ et $AC = BD$ (un rectangle ? vous n'y êtes pas !) et ce qu'il appelle la géométrie "neutre". Puis, après un passage sur l'inversion il étudie le modèle du demi-plan de Poincaré pour la géométrie hyperbolique. Là, il commence à y avoir des choses vraiment compliquées que je n'ai pas lues !

Enfin, le chapitre 8 porte sur les polyèdres, notamment les cinq polyèdres réguliers, mais aussi la formule d'Euler ($s - a + f = 2$) et le théorème de rigidité de Cauchy. Le livre se termine sur les polyèdres semi-réguliers et les groupes de symétries des polyèdres.

c) Critiques.

La longueur du paragraphe précédent montre assez combien ce livre est riche. De plus, Hartshorne écrit de manière très claire et très précise. La rédaction, la présentation sont soigneuses : c'est un grand professionnel. Je n'ai pas vraiment de critiques, sauf qu'il est un peu hors de mon sujet qui est de fournir aux professeurs de collège et de lycée un arrière-plan mathématique solide. Certes il y a tout pour cela dans le livre d'Hartshorne, mais il y en a sans doute trop pour qu'il soit immédiatement utilisable. C'est un très beau et très bon livre de mathématiques, que l'on peut utiliser comme référence (il y a une bibliographie très complète).

4. Le livre de Georges Lion.

C'est un livre de 222 pages, avec 600 exercices (résolus ou munis d'indications : près de 70 pages de solutions). Rien que pour cela ce livre est indispensable !

a) Principes.

Lion est un fervent supporter d'Euclide et de Hilbert. Il présente donc une axiomatique très (trop, à mon sens) proche de celle de Hilbert, même s'il ne rentre pas dans certains raffinements de celui-ci. Une des originalités du livre est de donner, dès le début, un modèle de géométrie autre que celui du plan euclidien, à savoir la géométrie hyperbolique du demi-plan de Poincaré.

b) Le plan.

La première partie (Ch. 1,2,3) porte sur la géométrie préeuclidienne (qui comprend la géométrie euclidienne et l'hyperbolique, mais pas l'elliptique à cause des axiomes d'ordre).
On y trouve (cf. Ch. 1) les postulats de base (postulats d'appartenance, d'ordre, de congruence, à l'exception du postulat des parallèles), avec notamment, pris comme axiome, le premier cas d'égalité des triangles (deux côtés et un angle). Attention, dans cette approche hilbertienne, longueurs et angles ne sont pas associés à des nombres, mais sont définis axiomatiquement à partir de relations d'équivalence

("avoir même longueur", etc.). C'est un des points où je regrette que Lion n'ait pas rompu le cordon ombilical avec Euclide-Hilbert.
Dès le début, le demi-plan de Poincaré est présenté comme modèle de cette géométrie (et les figures sont faites dans le cas euclidien et dans le cas hyperbolique, ce qui est vraiment très intéressant).

Le chapitre 2 donne les résultats communs à ces géométries préeuclidiennes (inégalité triangulaire, les deux autres cas d'égalité, l'existence des milieux, des bissectrices, des médiatrices, les propriétés du triangle isocèle et les premières propriétés du cercle).
Le chapitre 3 étudie les isométries préeuclidiennes et montre notamment que les réflexions sont des isométries (en utilisant les cas d'égalité, bien sûr). Attention, il y a deux cas très différents selon que l'on est en géométrie euclidienne ou hyperbolique : en géométrie euclidienne le groupe des déplacements contient un gros sous-groupe distingué (les translations) alors qu'en hyperbolique, il est simple. Je trouve que, sur ce point, la discussion comparative n'est pas poussée assez loin (il y a tout pour cela, notamment en exercices, mais le lecteur a du travail et (je parle pour moi) il aurait aimé avoir quelques axes plus clairement indiqués !)

La deuxième partie aborde la géométrie euclidienne (la vraie, avec l'axiome des parallèles). Elle regroupe les chapitres 4,5,6.

Dans le chapitre 4, Lion étudie les conséquences immédiates de l'axiome d'Euclide, à commencer par la somme des angles d'un triangle. Deux résultats essentiels viennent alors : la droite des milieux et l'angle inscrit et leurs conséquences (propriétés du parallélogramme et de cocyclicité).

Le chapitre 5 étudie les isométries euclidiennes, à commencer par les translations. Celles-ci sont vues comme composées de deux symétries centrales (on n'a pas de vecteurs, bien entendu, d'ailleurs le mot n'existe pas dans ce livre !). Le point suivant est la définition des angles orientés, vus comme éléments du quotient des déplacements par les translations. C'est une méthode un peu abstraite à mon goût. On obtient la classification des isométries du plan à la fin du chapitre.

Le chapitre 6 porte sur la définition des proportions. Bien entendu, faute d'avoir des longueurs qui sont des nombres, leurs rapports doivent être définis géométriquement (comme chez Hilbert, à partir des angles, ou de leurs tangentes, si on veut). Lion montre ensuite Thalès (par une démonstration qui ne me plaît pas du tout : beaucoup trop "euclidienne" au sens où il utilise bissectrices, orthogonalité, etc. et pas assez proche d'Euclide qui utilise les aires !) et il finit par avoir péniblement une arithmétique qui ressemble fort à celle des réels (ou plutôt d'un sous-corps des reéls, cf. ci-dessous). L'étape suivante concerne les triangles semblables, puis les homothéties.

La troisième partie s'intitule "géométrie euclidienne constructive". Elle commence (Ch. 7) par la définition du groupe des aires. Là encore, faute d'utiliser les nombres, cela mène à des contorsions pour définir la relation avoir même aire et je trouve qu'on est bien loin de l'intuition qu'on peut attacher à cette notion. On peut alors prouver Pythagore. Pour aller plus loin il faut être sûr d'avoir assez de réels ce qui est acquis au moyen du postulat du compas (une droite dont la distance au centre est plus petite que le rayon coupe le cercle). Cela permet de retrouver deux notions géométriques importantes et injustement oubliées : la puissance d'un point par rapport à un cercle et les pinceaux de cercles.

Le chapitre 8 porte sur les similitudes et les inversions. Il est bref, mais il y a 80 exercices à faire !

Enfin le chapitre 9 concerne les coniques : définition par foyer et directrice, tangentes, diamètres, etc. On notera que, des quatre livres, c'est le seul qui aborde ce sujet.

Le livre se conclut par deux annexes : l'une sur le modèle de Beltrami du plan hyperbolique, l'autre, plus algébrique, sur les corps pythagoriciens et euclidiens.

c) Critiques.

Il se trouve que je connais Georges Lion, que je l'apprécie beaucoup et que je le considère comme un excellent géomètre. Il est clair qu'il a fait un gros travail pour mettre Hilbert à la portée d'un étudiant actuel et que son livre donne un panorama presque complet de la géométrie "élémentaire" (vecteurs exceptés). J'aime beaucoup son livre, mais j'ai tout de même quelques réserves.

J'ai d'abord une critique de forme. Je trouve que Lion (et son éditeur) n'ont pas été assez méticuleux dans la finition du livre. Il y a de nombreux défauts typographiques (insupportables de nos jours), des coquilles, des imprécisions, des notations non définies, etc. cela finit par agacer le lecteur un peu maniaque (et c'est mon cas).

Par ailleurs, j'ai une critique fondamentale (qui vaut aussi pour [A] et [H]) : je trouve que ce livre colle trop à Hilbert (dont c'est une excellente approche, de par sa concision) sur plusieurs points. Le premier est le refus d'utiliser les nombres. Je trouve très pénible d'avoir des longueurs et des angles définies comme classes d'équivalence abstraites, sans aucune référence aux mesures. Je préfère de beaucoup le point de vue d'Annie Cousin-Fauconnet. Cela devient carrément insupportable quand il s'agit de parler de rapports de longueurs et c'est encore plus pénible (si c'est possible) dans le cas des aires. Lion a le mérite de faire vraiment les choses et de ne pas hésiter à mettre les mains dans le cambouis et cela me permet de confirmer ce que je disais déjà à propos du livre d'Arsac : je ne suis pas d'accord avec cette présentation. Je vais y revenir en conclusion.

Je conteste aussi vivement un autre point, c'est le fait de prendre, comme le fait Hilbert, le premier cas d'égalité comme axiome. Bien entendu, pour Hilbert cela s'impose car il faut corriger la pseudo-démonstration d'Euclide sur ce point. Mais, de ce point de vue, je préfèrerais un traitement plus proche d'Euclide et de la "démonstration" qu'il donne de ce cas d'égalité, voir ma conclusion ci-dessous.

Tout cela ne doit pas faire oublier les points très positifs dans le livre de Lion (outre le fait qu'on a le droit de ne pas partager mes objections) : des démonstrations complètes, souvent élégantes, le parti pris de donner dès le début le modèle de la géométrie hyperbolique et de le suivre tout au long des trois premiers chapitres (y compris dans les dessins) et la profusion d'exercices qu'il contient. Tout cela en fait un outil de travail indispensable.

5. Conclusion.

Les quatre livres proposés ci-dessus sont tous très intéressants. La meilleure preuve c'est que leur lecture m'a conduit à repenser ma vision des fondements de l'enseignement au collège. Je précise donc ma position sur ce point. Soyons clair, je n'ai pas changé d'avis, je persiste et signe dans la défense des idées didactiques

qui sont énoncées dans le rapport d'étape de la commission : développer l'usage des invariants, celui des cas d'isométrie et de similitude, etc. Ce n'est pas cela qui est en cause.
La question qui m'intéresse ici est plutôt celle de la formation des maîtres qui permettra un enseignement dans la ligne précédente. Je souscris sur ce point à ce que dit Arsac sur l'inappropriation de l'état actuel des choses (l'usage exclusif de l'algèbre linéaire ou la poule et son couteau). Il faut donc aussi montrer à nos futurs professeurs une autre approche de la géométrie, et, au moins, les initier à un autre système d'axiomes. Mais, à lire Arsac, Hartshorne et Lion, je suis de plus en plus convaincu qu'il n'est pas indispensable, voire pas souhaitable, de revenir à Euclide et surtout à Hilbert (la poule et sa fourchette).

Le principe que je mettrais en avant dans cette recherche d'un système d'axiomes de la géométrie qui soit pertinent pour l'enseignement du collège est le suivant :
Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes, mais aussi n'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver.
(Ce n'est pas moi qui dit cela mais Pascal, cf. [A] ! *De l'esprit géométrique II.*)
S'agissant du collège cela signifie que nos élèves, sortant de l'école élémentaire ont déjà une intuition des nombres et de la géométrie et que je propose de m'appuyer dessus et cela notamment sur trois points (je n'évoque pas ici les points qui sont aussi à la base des axiomes de Hilbert et sur lesquels je suis d'accord, point, droite, ordre, etc.) :
• les élèves connaissent les nombres entiers et décimaux,
• ils ont l'intuition du mouvement et la pratique du pliage,
• ils ont une intuition de l'aire comme place occupée dans le plan.
Je propose donc de fonder sur ces trois constatations un système d'axiomes pour le collège (en réalité, pour les (futurs) professeurs).

Le premier point crucial est celui des nombres sur lequel je vais, comme Annie Cousin-Fauconnet, me séparer d'Euclide et de Hilbert. ([2])
Avant de consommer ce divorce d'avec Euclide-Hilbert, il faut discuter un peu. Pourquoi les grecs n'utilisaient-ils pas les nombres en géométrie ? Il y a sans doute des raisons philosophiques (la pureté des méthodes géométriques ?). Mais il y a surtout, à mon avis, le fait que les grecs ne disposaient pas d'une bonne notion **géométrique** de nombre. Je m'explique : j'entends par géométrique, s'agissant de la géométrie de la droite, une notion de nombre avec un **ordre** et un ordre lisible. Or, au-delà des entiers, les grecs disposaient des rationnels (et encore leur statut de nombre n'est pas clair) et ceux-ci se prêtent très mal à la comparaison (allez, sans réfléchir : lequel est le plus grand de $\frac{47}{56}$ et de $\frac{81}{97}$?). Pire, s'agissant des irrationnels ils avaient à leur disposition la théorie des proportions (Euclide Livre V), donc, en notre langage, quelque chose qui ressemble aux coupures de Dedekind. Ce n'est pas vraiment facile de calculer avec ça ! D'ailleurs, les grecs ne calculaient pas en géométrie (il ne faut pas oublier que le th. de Pythagore est formulé en

([2]) Un argument supplémentaire en faveur des nombres est le suivant : avec le système d'axiomes de Lion par exemple, l'existence d'heptagones réguliers n'est pas assurée !

termes d'aires) et cette carence n'est pas étrangère à leurs difficultés face à des problèmes où le calcul est essentiel (par exemple les problèmes de constructions de degré ≥ 3, cf. duplication, etc. où Descartes fait merveille). Ce qui est un peu curieux, et doit nous faire réfléchir, c'est qu'ils érigeaient en quelque sorte le défaut de leur mathématique (par ailleurs remarquable, ne me faites pas dire ce que je n'ai pas dit) en dogme. En effet, Platon (La République Livre VII, 525) se moque des calculateurs "qui changent l'unité pour de la menue monnaie" et dit que là où ils divisent, les savants multiplient (voir l'exercice ci-dessus avec les fractions !)

Mais alors, me direz-vous, que faire ? Il se trouve que nous avons maintenant un outil essentiel qui permet de calculer et notamment de comparer les nombres : les nombres décimaux (Stévin 1585) et que ceux-ci donnent aussi les réels avec les développements décimaux infinis.([3]) L'arrivée des décimaux est une révolution épistémologique fondamentale et ce n'est sans doute pas un hasard si Descartes vient peu après, avec le succès que l'on sait pour aborder les problèmes laissés en suspens par les grecs (duplication, trisection, ...) C'est aussi une révolution didactique car les décimaux sont un outil que les enfants connaissent (je n'ai pas dit que c'était facile, mais ...).

Bref, si l'on peut comprendre les contorsions d'Euclide et celles de Hilbert (dont l'objectif était de légitimer Euclide), je ne vois pas pourquoi il serait nécessaire, même pour des futurs profs, d'en passer par là aujourd'hui, d'autant qu'on sait qu'au bout du compte (cf. [H] Ch. 4) les nombres sont dans Euclide comme le ver est dans le fruit. Comme mon avis là-dessus n'est sans doute pas assez autorisé j'y ajouterai celui de Lebesgue qui dans l'introduction de [Le] dit à ce sujet des choses vigoureuses, limpides et passionnantes, allant jusqu'à proposer de supprimer le chapitre des fractions de l'enseignement de la classe de Mathématiques (la TS de 1930) (là, il exagère !). Je cite juste une phrase : *Notre enseignement n'utilise pas encore pleinement ce fait historique, le plus important peut-être de l'histoire des sciences : l'invention de la numération décimale.*

Bref, en conclusion : oui à Stevin, Descartes, Lebesgue et Annie Cousin-Fauconnet !

Si je me suis délibérément écarté d'Euclide sur le premier point je vais au contraire me rapprocher de lui (et m'écarter de Hilbert) sur les deux autres.

Il y a d'abord la question de la démonstration des cas d'égalité que j'ai évoquée plusieurs fois ci-dessus. On sait qu'Euclide prétend prouver le premier cas d'égalité en utilisant la méthode de superposition (si on a ABC et $A'B'C'$ on transporte A en A', puis la demi-droite $[AB)$ sur $[A'B')$, etc.) Bien entendu c'est une pseudo-démonstration car les notions de mouvement, déplacement, superposition n'ont pas été définies et n'ont pas de sens dans sa théorie. De plus, elle est incorrecte (Euclide, bizarrement oublie le cas où le $A'B'C'$ déplacé est symétrique de ABC par rapport à (AB)). Pour remédier à ce défaut Hilbert (dont l'objectif n'est pas didactique mais mathématique : donner un système d'axiomes inattaquable) prend le premier cas d'égalité comme axiome, suivi en cela par Arsac, Hartshorne et Lion. Pourtant, je suis persuadé (pour l'avoir vécu jadis) que la "démonstration" d'Euclide est de nature à convaincre n'importe quel collégien de la validité des cas d'égalité. La raison à cela est simple : ils ont l'intuition de l'existence de

([3]) Je n'ai jamais compris pourquoi, plutôt que d'embêter les gens avec des coupures ou des suites de Cauchy, ce n'est pas ainsi qu'on construit les réels (quand on les construit, ce qui est une autre histoire ...).

déplacements (au sens intuitif de mouvements) qui permettent de transporter un point sur un autre. Je serais donc, en vertu des principes énoncés ci-dessus, en faveur d'une axiomatique où les cas d'égalité ne soient pas des axiomes, mais où la preuve d'Euclide en soit vraiment une. Bien entendu, c'est le cas avec l'axiomatique des espaces affines et vectoriels, disqualifiée par ailleurs. Si on analyse la preuve d'Euclide, de quoi a-t'on besoin ? D'un axiome qui assure l'existence et la transitivité de certaines opérations (appelons les "mouvements" pour faire plaisir à Rémi Langevin et à d'autres) sur les couples point-demi-droite issue du point. Cet axiome me semble assez naturel. D'ailleurs, cette idée de postuler l'existence de mouvements n'est pas nouvelle. C'est ce que proposait déjà Hoüel au XIXème siècle, cf. [Bk] et ce qu'analyse d'ailleurs Hartshorne avec l'axiome (ERM) (Existence of rigid motions).
En vérité, comme il est aussi indispensable, pour la preuve d'Euclide, d'avoir, à côté des déplacements, l'existence des symétries axiales, le système d'Annie Cousin-Fauconnet (qui mène très vite à l'assertion de transitivité voulue) fonctionne parfaitement pour notre objectif et je m'y rallie avec conviction.

Le dernier point dont je voudrais parler est la notion d'aire. C'est un point où les successeurs d'Euclide oublient leur maître ! En effet, dès le premier Élément (Prop. 35) et constamment ensuite, Euclide utilise la notion d'aire (qu'il ne définit pas et manipule parfois avec des mots trop imprécis : il parle notamment de triangles égaux pour désigner des triangles de même aire !). Il l'utilise pour prouver des résultats qui concernent les aires, mais aussi pour faire d'autres démonstrations (par exemple Thalès, cf. Livre VI, Prop. 2 !). Or, aucun des quatre livres ne le suit vraiment sur ce point, pourtant utile (cf. [P]). Arsac et Cousin-Fauconnet sont muets sur les aires, Hartshorne discute du fondement de la théorie mais pas vraiment de ses applications. Seul Lion aborde vraiment la question (avec une définition pénible due à son refus du nombre) et en donne des applications (Céva, Pythagore) mais pas encore assez à mon goût (cf. Thalès).
Un autre point me gêne beaucoup c'est l'absence dans tous les livres de la mesure du périmètre du cercle et de l'aire du disque (serait-ce un reste des injonctions de Dieudonné ? : *... le calcul infinitésimal doit absorber deux parties traditionnelles de la "géométrie" qui n'ont rien à y faire : le calcul des longueurs, aires et volumes et la "mesure" des angles.*). Aucun de nos auteurs ne définit la longueur du cercle et tous (sauf A. Cousin-Fauconnet et Hartshorne dans ses variantes fortes) proposent des systèmes dans lesquels les polygones réguliers non constructibles (par exemple l'heptagone) n'ont pas d'existence. Ils ignorent aussi tous avec superbe l'aire du disque. Contrairement à Dieudonné, je pense pourtant que c'est de la géométrie, au sens étymologique du terme.
Bref, il me semble important que parmi les axiomes initiaux on mette aussi ceux des aires. Ces axiomes seront superflus car on peut évidemment montrer (en géométrie euclidienne) l'existence des aires. Le livre de Lebesgue [Le] déjà évoqué en est une parfaite illustration. Mais, pour les enfants c'est un outil dont il serait dommage de se priver.

Voilà, j'ai été très long, mais j'espère vous avoir donné envie de lire tous ces livres et vive la géométrie !