DES OUTILS POUR LA GÉOMÉTRIE

À L'ÂGE DU COLLÈGE :

INVARIANTS, CAS D'ISOMÉTRIE

ET DE SIMILITUDE, TRANSFORMATIONS

Daniel PERRIN

Professeur à l'IUFM de Versailles et à l'Université Paris-Sud

Résumé : *Après avoir rappelé quelques objectifs que l'on peut assigner à l'enseignement de la géométrie (développer la vision géométrique, apprendre à raisonner), nous examinons dans ce texte certains outils qui sont ou pourraient être à la disposition des collégiens pour faire de la géométrie. Nous expliquons, en particulier, pourquoi il serait intéressant d'associer à l'usage des transformations l'utilisation des invariants (longueurs, angles, aires) et des cas d'isométrie et de similitude.*

0. INTRODUCTION.

Le texte qui suit s'inscrit dans le droit fil du rapport d'étape sur la[1] géométrie (cité [R] dans ce qui suit) de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (commission Kahane) et de plusieurs autres textes qui sont venus en complément à ce rapport, cf. [Perrin], cité [P] et [Duperret & Perrin & Richeton], cité [DPR].[2] Le rapport d'étape conclut à la nécessité de conserver un enseignement de géométrie au collège et au lycée et développe plusieurs arguments en faveur de la géométrie. Il y est notamment question de son utilité et de son importance culturelle.

[1] Je préfère parler de la géométrie plutôt que des géométries. Bien entendu, il existe de multiples facettes de la géométrie et c'est ce qui en fait le charme. Mais, outre qu'il me semble que nous ne puissions raisonnablement penser à enseigner au collège d'autres géométries que l'euclidienne, je crois plus important d'insister sur ce qui lie les diverses approches de la géométrie (la vision de l'espace, le raisonnement, et à un niveau plus avancé l'idée fondamentale de groupe opérant sur un ensemble, c'est-à-dire la vision unificatrice du programme d'Erlangen), plutôt que sur les différences.

[2] Le lecteur qui connaîtrait déjà tous ces textes me pardonnera un certain nombre de redites.

Je retiendrai plutôt ici deux autres aspects qui sont à mes yeux des objectifs essentiels de l'enseignement de la géométrie :
• développer la vision géométrique comme outil de pensée (en mathématiques et ailleurs),
• promouvoir la géométrie comme lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement.

Ces objectifs étant définis et explicités, il restera à préciser les outils qui permettront de les atteindre. Le mot "outil" est d'ailleurs le mot clé de ce texte. C'est sans doute une réminiscence de cette affiche, sur les murs des classes des écoles primaires d'autrefois, qui proclamait : "les bons ouvriers ont toujours de bons outils". Je pense que cela s'applique aussi aux mathématiques.

Dans le cas de la géométrie du collège[3] je discuterai ci-dessous de la pertinence de certains outils "pour voir" (figures, maquettes, logiciels) et d'autres outils "pour prouver", parmi lesquels je distinguerai notamment :
• les invariants (longueurs, angles, aires),
• les cas "d'égalité" et de similitude,
• le calcul,
• les transformations.

Depuis la réforme des mathématiques modernes, les cas "d'égalité" ont disparu de notre enseignement et le rôle de certains invariants comme angle et aire a été largement minoré. Je considère qu'il s'agit d'une double erreur et je vais essayer d'en convaincre le lecteur. Pour autant, je ne souhaite pas la disparition des transformations dans l'enseignement de la géométrie au collège. Il me semble que l'objectif à poursuivre est plutôt de trouver, à terme, un nouvel équilibre entre ces diverses approches de la géométrie.

Pour conclure j'évoquerai les conditions d'une évolution de l'enseignement de la géométrie au collège dans le sens indiqué ci-dessus et notamment la question de la formation des maîtres.

1. LES OBJECTIFS.

1.1 Penser géométriquement.

Le premier point qui fait l'importance de la géométrie, c'est le fait, en mathématiques comme dans d'autres domaines, de **voir et penser géométriquement**. Il s'agit là de quelque chose qui est difficile à formuler, mais qui est fondamental. Pour des illustrations de ce thème hors des mathématiques je renverrai au rapport d'étape ou à la conférence d'Anne Strauss. Pour ma part, je vais me contenter d'évoquer ce point par rapport à ce que je connais, c'est-à-dire l'enseignement ... des mathématiques.

Face à une situation qui n'est pas *a priori* géométrique, penser géométriquement signifie d'abord être capable de faire un dessin. C'est une injonction que je répète sans cesse à mes élèves de CAPES (et j'y enseigne l'analyse) : faites un dessin !

[3] J'étendrai ici le collège à la classe de seconde, dernière classe de la scolarité obligatoire, dernière classe indifférenciée, dernière classe de la formation mathématique (presque) universelle du citoyen. Parmi ces citoyens, je pense en particulier aux futurs professeurs des écoles (pas nécessairement scientifiques, bien entendu) dont le rôle est essentiel dans la formation, notamment mathématique, des enfants.

Voici deux exemples où le dessin est décisif pour comprendre (mais il y en a mille du même acabit).
• Pour montrer l'unicité de la limite d'une suite il suffit de faire le petit dessin suivant :

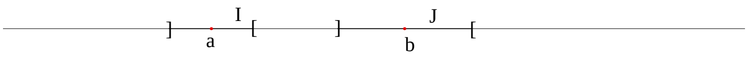

Figure 1

et de dire : si (u_n) tend vers a les termes de la suite sont tous dans I (sauf un nombre fini), si elle tend aussi vers b ils sont tous dans J (sauf un nombre fini). Comme I et J sont disjoints c'est impossible.
• Pour encadrer la somme des $1/n$ à l'aide du logarithme de n :

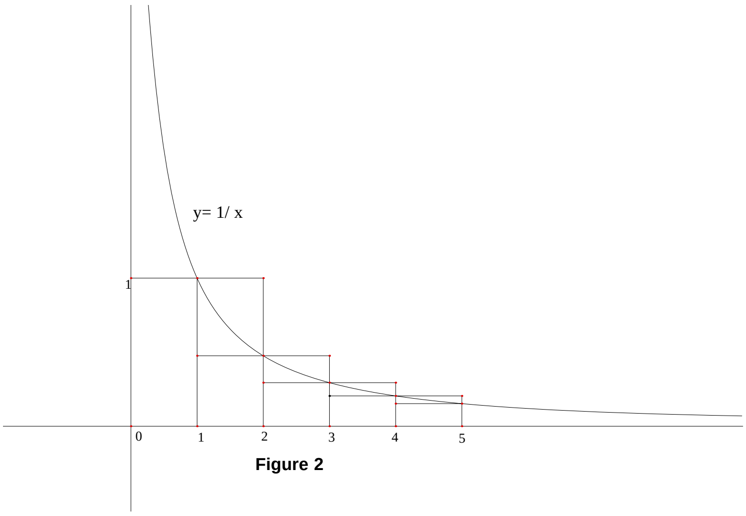

Figure 2

L'expérience montre que la plupart des étudiants de CAPES n'ont pas spontanément ce réflexe du dessin dans ce genre de situations. J'attribue cela, au moins partiellement, à un déficit de la pensée géométrique tout au long de leur scolarité.

1.2 Géométrie et raisonnement.

Sur l'intérêt de la géométrie pour l'apprentissage du raisonnement (je pense là encore à cet apprentissage pour tous les citoyens, pas seulement pour les futurs mathématiciens, ni même pour les futurs scientifiques), je renvoie le lecteur au rapport d'étape (notamment §1 b) et §3 c)). Je me contenterai de rappeler ce qui fait à mes yeux l'importance du raisonnement géométrique :
• Il s'agit d'un domaine qui peut être abordé dès le collège, où le raisonnement intervient dès le début et dans lequel on perçoit aisément les articulations logiques.
• Il s'agit d'un domaine riche, varié, utile, avec un aspect visuel et esthétique, voire ludique.

Il est essentiel cependant de ne pas sous-estimer deux difficultés :

• L'apprentissage des mathématiques en général et de la géométrie en particulier, est difficile.
• Le raisonnement géométrique ne doit pas être réduit à l'apprentissage formel de la démonstration.

Je n'insisterai pas sur le point de la difficulté, sauf pour souligner que c'est aussi l'un des charmes de la géométrie que des exercices élémentaires puissent faire sécher même les experts. Ainsi, voici deux petits problèmes, juste pour le plaisir du lecteur. J'emprunte le premier à [DPR] §4 (le problème "des segments décalés"). Le jeu n'est pas tant de trouver une solution que d'en trouver une différente de celles qui sont dans [DPR] (où il y en a déjà 9).

Soit ABC un triangle.
Construire des points $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ de sorte que les droites (BC) et (MN) soient parallèles et qu'on ait l'égalité $AN = MB$.

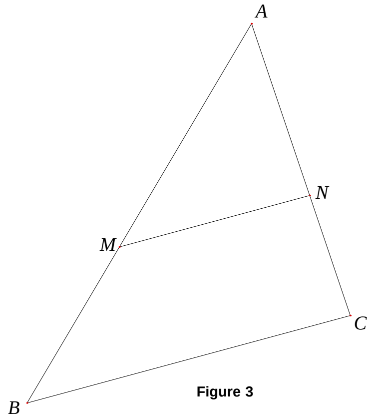

Figure 3

Le second est un problème de géométrie dans l'espace[4], un peu plus ardu.

Un deltaèdre est un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Pour déterminer tous les deltaèdres à similitude près on tombe sur deux jolis problèmes :

1) Montrer qu'un sommet d'ordre 3 (c'est-à-dire un sommet où aboutissent 3 arêtes) ne peut pas être voisin d'un sommet d'ordre 5.

2) Montrer qu'il n'y a pas de deltaèdre avec 1 sommet d'ordre 4 et 10 sommets d'ordre 5.

La distinction raisonnement-démonstration me semble, en revanche, fondamentale et il me paraîtrait désastreusement réducteur de les identifier. À cet égard, le commentaire des programmes de collège décrit fort bien ce que devrait être une réelle activité mathématique :

… identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié.

Dans cette optique, la preuve a deux fonctions essentielles. D'abord, lorsque le problème ne donne pas d'avance le résultat, la preuve est souvent le seul moyen de trouver celui-ci. C'est le cas par exemple, pour le problème des segments décalés ci-dessus où la construction n'est pas possible sans une amorce de démonstration.[5] Ensuite, la démonstration permet d'assurer les résultats avec certitude. Voici, par

[4] Si je parle essentiellement de géométrie plane dans ce texte, ce n'est pas que je n'accorde pas d'importance à la géométrie dans l'espace, bien au contraire !

[5] Pour un autre exemple (dans le domaine numérique et à l'école élémentaire) d'une situation dans laquelle les élèves doivent argumenter et raisonner, même s'ils n'ont pas les moyens d'une démonstration formelle, voir par exemple [Ermel], la situation du plus grand produit, p. 102. Je ne saurais trop conseiller la lecture de ce texte à tous les enseignants de mathématiques comme élément du débat entre preuve et argumentation.

exemple, un petit problème où la figure peut induire en erreur et où seul le raisonnement[6] permet d'être sûr de ce qu'on avance :

Soit $ABCD$ un carré de côté 8
et soient E, F portés par (AD) et (AB)
avec $DE = 5$ et $BF = 13$, cf. figure 4.
Les points E, C, F sont-ils alignés ?

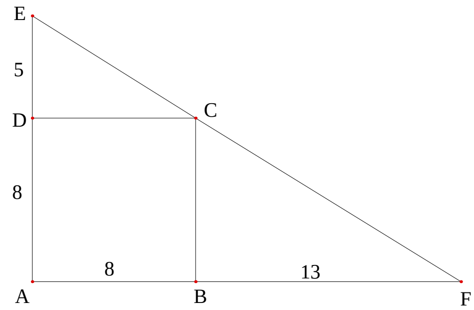

Figure 4

À l'opposé de cette conception de la preuve, il me semble qu'un usage trop précoce et trop rigide des règles de démonstration risque de faire que celle-ci perde les deux caractères évoqués ci-dessus pour n'être plus qu'un exercice de style stéréotypé, dans lequel les élèves de collège ne pourront rentrer que par une sorte de docilité qui n'est peut-être pas la chose la mieux partagée à l'heure actuelle.[7]

Je sais bien que mener, au collège, une réelle activité de recherche, dans la ligne de ce qui précède, n'est pas chose facile et que, dans certaines situations, l'existence d'un quelconque apprentissage est déjà problématique, mais cela demeure un objectif qui vaut la peine qu'on s'y attache. En tous cas, pour qu'une telle activité puisse vraiment avoir lieu, il y a un certain nombre de conditions :

• Il faut proposer aux élèves des problèmes ouverts, qui soient à la fois à leur portée, mais aussi suffisamment riches et complexes. En géométrie, les problèmes de lieux géométriques ou de constructions sont souvent les plus pertinents.

• Les enseignants doivent être très disponibles car certaines situations permettent de multiples approches qui conduisent parfois à des solutions originales (c'est le cas du problème des segments décalés évoqué ci-dessus) et il est important de ne pas brider l'imagination des élèves.

• Enfin, et c'est le point sur lequel je veux insister ici, la possibilité de mener une réelle activité de recherche n'est pas indépendante des outils dont disposent les élèves. De ce point de vue, il me semble que l'usage trop exclusif des transformations n'est pas le mieux adapté pour faire de la géométrie au collège le lieu d'un apprentissage du raisonnement.

---

6 il y a au moins trois arguments qui permettent de conclure

7 Comme le dit Rudolf Bkouche, cf. [Bkouche 1997] : *La démonstration risque d'apparaître comme une simple nécessité réglementaire du cours de mathématiques, renforcée par des assertions autoritaires du type : "en mathématiques, on ne s'appuie pas sur l'évidence, il faut démontrer" ; la conséquence en est que les mathématiques apparaissent sous un angle purement juridique où la démonstration tient lieu de règle, moins pour des raisons de savoir que pour des raisons d'autorité institutionnelle, le professeur devenant le garant de cette autorité.*

2. LES OUTILS POUR VOIR.

Dans les premiers temps de la réforme des mathématiques modernes, les figures ont été sinon totalement bannies des cours de géométrie, du moins regardées avec une forte suspicion. Sur cette question, Jean Dieudonné, l'un des promoteurs de la réforme, a le mérite de dire les choses clairement (cf. [Dieudonné]) :

C'est ainsi qu'il serait désirable de libérer l'élève dès que possible de la camisole de force des "figures" traditionnelles, en en parlant le moins possible (point, droite et plan exceptés, bien entendu), au profit de l'idée de transformation géométrique du plan et de l'espace tout entiers...

Mise en pratique au début des années 1970 (on consultera avec effarement les manuels de l'époque), cette doctrine s'est révélée désastreuse. Pour ma part, et comme beaucoup de mathématiciens d'aujourd'hui, je pense très exactement le contraire, à savoir que les figures sont essentielles pour apprendre à voir et à penser géométriquement, ce qui constitue l'un des objectifs avancés ci-dessus.

Bien entendu, depuis cette époque, les figures (ou configurations) sont réapparues dans les programmes, mais d'une certaine façon, la suspicion à leur encontre est restée vive et nombre de professeurs répugnent à s'en servir, souvent par souci de rigueur. La réflexion sur les liens entre figure, calcul, démonstration devrait en tous cas être une partie importante de la formation des maîtres.

J'ajouterai deux points encore sur ce sujet des outils pour voir.

Le premier est l'importance des logiciels de géométrie dynamique (je suis un utilisateur convaincu de CABRI). La facilité avec laquelle on peut réaliser, à volonté, des figures correctes, dans de multiples cas particuliers, en faisant varier les paramètres, est une aide extraordinaire, notamment pour produire et tester des conjectures. Je renvoie le lecteur à la conférence de Colette Laborde pour une étude de leur utilisation au collège.

Le second concerne la géométrie dans l'espace. Là, quelles que soient les qualités du dessinateur pour rendre la perspective (voir la conférence de Daniel Lehmann) ou les performances des logiciels, le plus efficace est encore souvent la construction de maquettes. J'utilise pour ma part systématiquement des maquettes, des pliages, voire des objets familiers (ballon de football, globe terrestre, etc.) lorsque j'enseigne la géométrie dans l'espace. Ainsi, pour revenir à un problème posé ci-dessus, il me semble difficile de comprendre pourquoi les sommets d'ordre 3 et 5 d'un deltaèdre ne peuvent être voisins tant que l'on n'a pas fabriqué une maquette.

3. LES OUTILS POUR PROUVER : LES INVARIANTS.

D'abord un mot d'explication sur ma position dans ce colloque et, plus généralement, par rapport à l'enseignement du second degré. Comme je n'y ai jamais enseigné moi-même et que je ne suis pas didacticien (sauf par alliance, ce qui n'est pas rien), ma position est, avant tout, celle d'un mathématicien dont la spécificité, depuis plus de 25 ans, est la formation des maîtres. Ainsi, au départ, c'est en enseignant la géométrie aux sévriennes que j'ai été amené à réfléchir sur les fondements mathématiques et épistémologiques de la géométrie. Ma position didactique, en faveur de l'usage des invariants et des cas d'isométrie au collège est donc sous-tendue essentiellement par cette réflexion mathématique, (avec quelques mots-clés comme groupes, transitivité, invariants). Cette réflexion peut sembler théorique, mais comme c'est mon seul apport au débat, je vais la présenter maintenant, en essayant d'être le plus bref et le moins technique possible.

3.1 Programme d'Erlangen et invariants.

Le discours dominant à l'époque des mathématiques modernes mettait en avant le programme d'Erlangen de Felix Klein (1872). Ce programme explique qu'une géométrie consiste essentiellement en la donnée d'un groupe (de transformations) opérant sur un ensemble. Ce point de vue, à mon avis, reste tout à fait valable, mais, tel quel, il est insuffisant car il n'explique pas par quel procédé on obtient les théorèmes de la géométrie en question. Or, cette question est résolue aussi, à peu près à l'époque de Klein, par la théorie des invariants. Le principe c'est que tout théorème d'une géométrie donnée, relative à un groupe donné, correspond à une relation entre les invariants (polynomiaux) de cette géométrie. Mon opinion est que la théorie des invariants est inséparable du programme d'Erlangen. Or, et c'est là un contresens majeur de la réforme des mathématiques modernes, ces invariants ont été largement occultés à l'époque et restent encore mal aimés aujourd'hui.

J'ai développé ces idées dans l'annexe 1 du rapport [R] (disponible sur le site Internet de la SMF) et dans l'article [P] (dans le cas des aires) et j'y renvoie le lecteur qui souhaiterait plus de détails. Je voudrais seulement donner ici quelques exemples.

D'abord que sont les invariants pour la géométrie du collège ? On peut les voir de deux façons. La première est géométrique : il s'agit de notions familières, longueur, angle, aire. La seconde est plus algébrique. En effet, si un vecteur $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$) a pour coordonnées (a_1, a_2) (resp. (b_1, b_2)), les invariants précédents correspondent respectivement au carré scalaire $(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OA}) = a_1^2 + a_2^2$ (c'est le carré de la longueur OA) ou au produit scalaire $(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OB}) = a_1b_1 + a_2b_2$, (qui correspond au cosinus de l'angle $\widehat{AOB}$) ou encore au "produit vectoriel"[8] $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = a_1b_2 - a_2b_1$ (le double de l'aire orientée du triangle AOB, ou encore la quantité $OA \times OB \sin \widehat{AOB}$). Ces invariants apparaissent ainsi comme des polynômes en les coordonnées des points, et ces polynômes sont invariants sous l'action du groupe des rotations (l'aire étant, de plus, invariante par le groupe de toutes les transformations affines de déterminant 1).

Bien entendu, quiconque a fait de la géométrie sait qu'il est utile d'utiliser les invariants géométriques pour prouver les théorèmes. Ce que je vais expliquer maintenant c'est que ces démonstrations, comme Janus, ont deux faces : celle de la géométrie et celle de l'algèbre. Voici deux exemples très simples : la concourance des médianes et celles des hauteurs dans un triangle.

3.2 Exemple 1 : les médianes.

Avant de parler de concourance des médianes, quelques détails techniques sur l'outil "aire". L'un des lemmes qui devrait être, à mon avis, un des résultats clés de

[8] En fait, le scalaire $a_1b_2-a_2b_1$ est plutôt le déterminant des deux vecteurs sur la base canonique, mais cela revient essentiellement au même.

la géométrie du collège est ce que je propose d'appeler le "lemme des proportions" :

Si deux triangles ont un sommet commun et des bases portées par la même droite, le rapport de leurs aires est égal au rapport des bases, cf. figure 5.

Un cas particulier de ce lemme est le lemme "de la médiane" qui affirme qu'une médiane partage un triangle en deux triangles d'aires égales.

Ces lemmes résultent par exemple de la formule $base \times hauteur\ /2$ (cf. [P] pour une discussion). Une conséquence du lemme des proportions est le "lemme du chevron" (la figure 6 explique ce nom dans le cas où O est un point intérieur du triangle) :

Soit ABC un triangle et O un point du plan. Si (OA) coupe (BC) en A', on a la formule $\dfrac{\mathcal{A}(OBA)}{\mathcal{A}(OCA)} = \dfrac{A'B}{A'C}$.

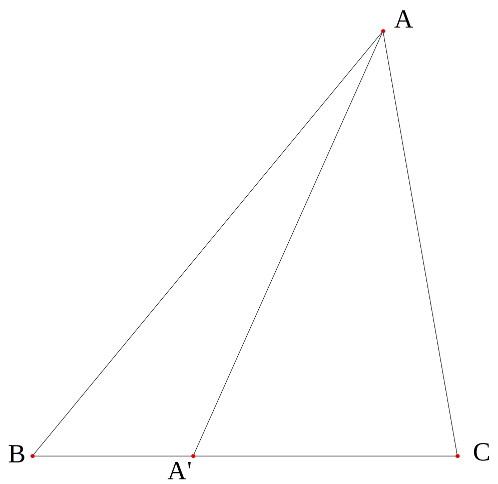

Figure 5

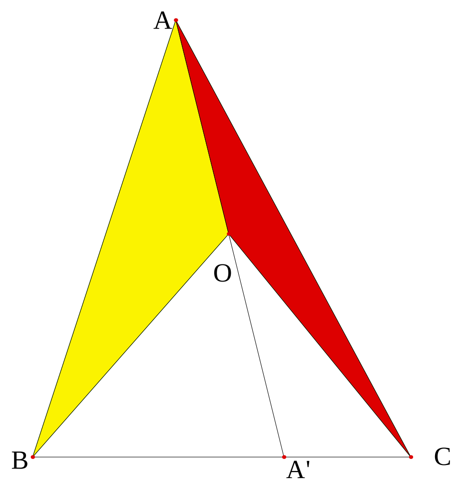

Figure 6

Ce lemme implique aussitôt le résultat suivant[9] :

Si ABC est un triangle, un point O (intérieur au triangle) est sur la médiane AA' si et seulement si on a l'égalité d'aires :

$$\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OAC). \tag{1}$$

La formule (1) peut se traduire en termes de produit vectoriel grâce à la formule $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2}\,||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}||$. Plus précisément, on a une variante orientée de (1) : le point O (quelconque) est sur la médiane si et seulement si on a :

$$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}. \tag{2}$$

(En effet, si on pose $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, la relation signifie que O, A, M sont alignés. Or, $OBMC$ est un parallélogramme, de sorte que (OM) passe par le milieu A' de

[9] Ce résultat peut se démontrer à l'aide du seul lemme de la médiane et d'un petit raisonnement par l'absurde. C'est d'ailleurs un bel exemple où les propriétés (de convexité essentiellement) sont évidentes sur la figure, mais pas tout à fait triviales à prouver.

$[BC]$ et on a bien le résultat.[10])

On peut alors montrer la concourance des médianes, d'abord par la voie géométrique. Si on note AA', BB', CC' les médianes et O le point d'intersection de (BB') et (CC') on a alors, par (1), $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OBC)$ et $\mathcal{A}(OBC) = \mathcal{A}(OAC)$, d'où $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OAC)$ et le résultat.

Mais cette preuve se lit aussi de manière algébrique. En effet, on a la relation

$$(*) \qquad \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} \wedge (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OC} \wedge (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0}$$

qui traduit la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel. Si on prend l'origine O à l'intersection de deux des médianes, la formule (2) montre que deux des produits vectoriels sont nuls, donc aussi le troisième.

Ce qu'il faut retenir de cette façon algébrique de voir les choses c'est que le théorème correspond à la **relation** $(*)$, d'ailleurs essentiellement triviale ici, entre les invariants.

3.3 Exemple 2 : les hauteurs.

Cette fois, le lemme de base est le suivant :

Soient ABC un triangle et O un point du plan. Alors O est sur la hauteur issue de A si et seulement si on a

$$(3) \qquad OB \cos \widehat{AOB} = OC \cos \widehat{AOC}.$$

(En effet, cette égalité traduit le fait que les projections de B et C sur la droite (OA) sont égales, et ceci, quel que soit le cas de figure.) En termes de produit scalaire, cette relation s'écrit

$$(4) \qquad (\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 0.$$

On peut alors montrer la concourance des hauteurs, d'abord en termes de longueurs et (de cosinus) d'angles. On appelle O l'intersection des hauteurs issues de B et C. On a donc

$$OA \cos \widehat{AOB} = OC \cos \widehat{BOC} \quad \text{et} \quad OA \cos \widehat{AOC} = OB \cos \widehat{BOC}$$

dont on déduit aussitôt la relation (3) ci-dessus, donc le fait que O est sur la troisième hauteur.

Mais cette preuve a sa traduction algébrique. En effet, on a la relation (essentiellement triviale là encore)

$$(**) \qquad (\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

qui traduit la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, de sorte que si on prend pour origine l'intersection de deux des hauteurs elle est aussi sur la troisième. Là encore, le théorème se résume en la relation $(**)$.

[10] On notera que l'égalité d'aires $\mathcal{A}(OAB)=\mathcal{A}(OAC)$ est équivalente à $\overrightarrow{OA}\wedge(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\vec{0}$ ou à $\overrightarrow{OA}\wedge(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\vec{0}$. Cette deuxième égalité correspond au cas où (OA) est parallèle à (BC), cf. le lemme du "trapèze" de [P] ou sa variante du "papillon".

3.4 Bilan.

L'intérêt théorique[11] de cette vision algébrique des invariants réside alors dans les trois points suivants :

1) On peut montrer (cf. par exemple [P]) que tout théorème d'une géométrie s'interprète comme une relation entre des invariants relatifs à cette géométrie, comme il est apparu dans les exemples ci-desssus.

2) On a une sorte de théorème de complétude pour les invariants : on montre que pour la géométrie euclidienne du triangle (resp. pour la géométrie affine), il n'y a pas d'autres invariants que ceux vus ci-dessus (produits scalaires et vectoriels).

3) On a aussi un théorème de complétude pour les relations : là encore on les connaît toutes, il n'y en a pas (de non triviale) en géométrie affine et, en géométrie euclidienne, elles se déduisent toutes de la relation

$$(***) \qquad (\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OC})^2 + \|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\|^2 = (\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OB})\,(\overrightarrow{OC}|\overrightarrow{OC}),$$

(dite identité de Lagrange) qui n'est autre que la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Ce qu'affirme la théorie c'est donc qu'on peut, en principe, obtenir mécaniquement tous les théorèmes de géométrie à partir de ces invariants et de leurs relations.

Par exemple, la relation fondamentale $(***)$ ci-dessus est exactement la traduction analytique, dans le cas du triangle O, B, C avec $O = (0, 0)$, de la célèbre propriété de la droite d'Euler : le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle O, B, C sont alignés. De même, le théorème affirmant que le symétrique de l'orthocentre du triangle par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit est lui aussi une traduction de la relation $(***)$.

3.5 Invariants et relations, encore un exemple.

Je propose au lecteur un petit détour en montrant un exemple, peut-être plus convaincant encore que ceux qui portent sur la géométrie euclidienne. Cet exemple est issu de la géométrie anallagmatique (celle de l'inversion) qui n'est plus enseignée à l'heure actuelle, encore que ce qui suit pourrait aisément être expliqué à un élève de terminale S d'aujourd'hui.

Un invariant de cette géométrie, bien connu des têtes chenues, est le birapport :

$$[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

Lorsque a, b, c, d sont 4 points distincts de $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, il est facile de calculer l'argument de $[a, b, c, d]$ en termes d'angles orientés de vecteurs et on en déduit que les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.

Mais, si on a 8 points a, b, c, d, p, q, r, s, on a une relation, évidente mais splendide, entre les birapports ("le théorème des six birapports") :

$$(5) \qquad [abrs]\,[bcps]\,[caqs]\,[pqcd]\,[qrad]\,[rpbd] = 1.$$

[11] et seulement théorique, car il n'est pas question de faire ce type de démonstrations calculatoires ("en tournant la manivelle" aurait dit Jean-Jacques Rousseau, cf. ci-dessous §5 a) au collège, ni même, à mon sens, au lycée, mais elles sont importantes pour saisir l'importance des invariants.

La traduction géométrique de cette condition est immédiate : si on a 8 points et si 5 des quadruplets ci-dessus sont cocycliques ou alignés, les birapports correspondants sont réels. Mais alors, le sixième birapport est aussi réel et donc les 4 derniers points sont aussi cocycliques ou alignés.

Cette relation entre les invariants et ses variantes sont à la source de nombreux théorèmes géométriques : le théorème de la droite de Simson, celui des 6 cercles de Miquel, etc. (cf. [Audin], exercice V.38) ; citons par exemple le suivant dans lequel on a pris $s = \infty$:

Soient a, b, c trois points non alignés et p, q, r trois points distincts de a, b, c, situés sur les droites $(bc), (ca), (ab)$. Alors les cercles circonscrits aux triangles cpq, brp, aqr ont un point commun appelé le "pivot".

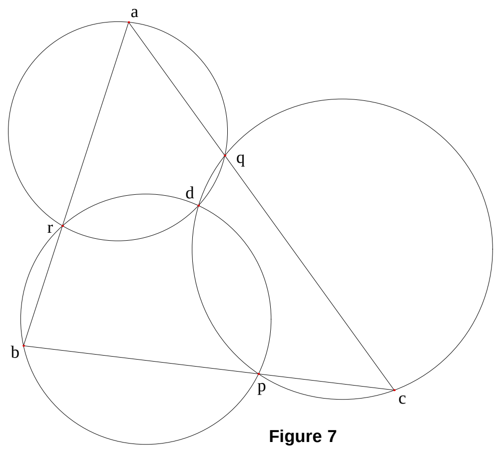

Figure 7

3.6 Deux exemples encore pour conclure.

Comme on l'a vu, ce que dit la théorie c'est que les théorèmes d'une géométrie proviennent toujours de relations entre invariants relatifs à cette géométrie. La conséquence pratique de ce fait c'est que la constatation empirique que les invariants sont efficaces pour faire de la géométrie est pleinement justifiée par la théorie : tout problème de géométrie affine (resp. euclidienne) doit pouvoir se résoudre par usage des aires (resp. des longueurs et des angles). C'est ce qui motive ma position en faveur d'un usage plus systématique des invariants au collège. Voici encore deux exemples pratiques pour achever de convaincre le lecteur de leur efficacité.

Le premier, qui utilise les aires, est le célèbre théorème de Ménélaüs.

Soit ABC un triangle. Une droite Δ coupe respectivement (BC), (CA), (AB) en A', B', C'. Montrer qu'on a :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

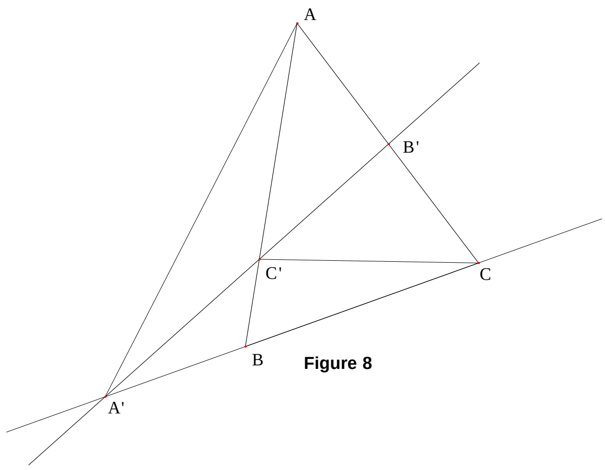

Figure 8

En vérité, les rapports ci-dessus peuvent être vus comme des rapports de mesures algébriques (sur une même droite) et non comme des distances. Cela montre que le problème est de nature affine. D'après les principes énoncés ci-dessus, on doit donc pouvoir le traiter au moyen des aires.

Pour cela, on interprète les rapports comme des rapports d'aires (grâce au lemme des proportions). Ainsi, on a $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{\mathcal{A}(A'BC')}{\mathcal{A}(A'CC')}$. On notera qu'on a choisi le triangle $A'BC'$ car il fait intervenir deux des longueurs en jeu ($A'B$ et $C'B$) et on réutilise ce triangle pour le troisième rapport : $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{\mathcal{A}(A'AC')}{\mathcal{A}(A'BC')}$. L'égalité à prouver devient alors $\dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{\mathcal{A}(A'CC')}{\mathcal{A}(A'AC')}$: c'est le lemme du chevron !

Le second exemple, très classique également, utilise les angles et il est aussi étudié dans [DPR] :

Soit $ABCD$ un carré.
On construit à l'intérieur de $ABCD$
(resp. à l'extérieur)
le triangle équilatéral ABE (resp. BCF).
Montrer que les points D, E, F sont alignés.

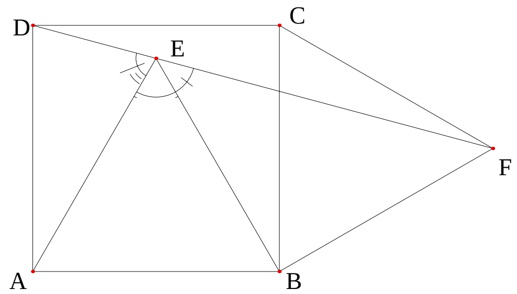

Figure 9

La solution en termes d'angles est très simple : on calcule les angles en E. On a $\widehat{DEA} = 75°$, $\widehat{AEB} = 60°$, $\widehat{BEF} = 45°$ et comme la somme vaut $180°$, les trois points D, E, F sont alignés.

Dans la pratique, pour que l'utilisation des invariants aire et angle soit efficace il est nécessaire de disposer d'un petit nombre d'outils. Pour les aires il s'agit essentiellement des "lemmes du collège", cf. [P] ; pour les angles, on peut citer en vrac la somme des angles d'un triangle, l'usage du complémentaire et du supplémentaire, les angles alternes-internes et correspondants, et enfin, le théorème de l'angle inscrit.

4. LES OUTILS POUR PROUVER : LES CAS D'"ÉGALITÉ".

4.1 La réforme des mathématiques modernes.

Parmi les cibles préférées des promoteurs de la réforme des mathématiques modernes on trouve les cas d'égalité et de similitude des triangles. Voilà, par exemple, ce que dit Dieudonné à ce sujet :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles ...

C'est un des points que je conteste le plus dans le discours de l'époque et dont les conséquences demeurent importantes à l'heure actuelle puisque les cas d'égalité[12] et de similitude ne font plus partie des outils des collégiens.[13]

4.2 Fondements théoriques de l'usage des cas d'isométrie comme outil.

Un problème crucial qu'on rencontre lorsqu'on travaille avec un groupe de transformations G d'un ensemble X est de dire si G est transitif, c'est-à-dire si on peut transformer n'importe quel élément de X en n'importe quel autre par l'action du groupe. [14] Par exemple, dans le plan, le groupe des isométries opère transitivement sur l'ensemble des points ou sur celui des demi-droites. En revanche, il n'est pas transitif sur l'ensemble des segments, ou sur l'ensemble des couples de demi-droites de même sommet.

Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :

Deux éléments de X peuvent être échangés par l'action de G (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.

Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.

Or, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) **sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci**. D'ailleurs leur démonstration est une parfaite illustration de ce principe de transitivité : on envoie un sommet sur un autre, puis une demi-droite sur une autre, etc. et peu importe qui est la transformation finale. Parodiant le célèbre sketch de Pierre Dac et Francis Blanche on pourrait avoir ce dialogue :

— *Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur cet autre triangle $A'B'C'$?*

---

[12] Contrairement à certains, cf. [Cuppens], je pense vraiment qu'il faut éviter le mot "égalité". Bien sûr, toute relation d'équivalence est une égalité dans l'ensemble quotient et je n'hésite pas à écrire égal quand je calcule dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ou dans des endroits bien pires encore. Bien sûr, Euclide en faisait bien d'autres puisque l'égalité des triangles pouvait signifier pour lui aussi bien l'isométrie que la seule égalité des aires. Cependant, si les mathématiciens sont capables de se retrouver dans une telle jungle grâce au contexte, je crois qu'il ne faut pas compliquer inutilement la tâche de nos élèves. Dans ce cas il me semble que cela ne coûte pas très cher de parler de triangles isométriques (ou congruents si l'on préfère).

[13] Ils ont fait leur réapparition en seconde dans les derniers programmes. Je m'en réjouis dans la mesure où cela suscite une réflexion sur le sujet, mais je pense que cette introduction est trop tardive et les arguments que je vais donner en leur faveur, tant du point de vue de l'efficacité de l'outil que de l'axiomatique, en témoignent.

[14] On se reportera à [DPR], §8 pour quelques illustrations de l'intérêt de ce type de résultat de transitivité.

— *Oui*
— *Vous pouvez le faire ?*
— *Oui*
— *Il peut le faire !*

Nous allons donner ci-dessous des exemples de cette situation en espérant convaincre le lecteur de l'efficacité des cas d'isométrie des triangles, par rapport à l'usage direct des transformations. En vérité, dans le plan, comme on connaît toutes les isométries, il est souvent assez facile de repérer laquelle employer. En revanche, ce qui est plus délicat c'est de prouver qu'elle fait bien ce qu'on suppose. On y arrive, mais c'est souvent lourd et, presque toujours, inutile.

Le même argument vaut évidemment pour les similitudes, avec, dans ce cas, deux avantages supplémentaires :
• il y a un critère (avec deux angles égaux) d'une simplicité enfantine,
• on connaît encore toutes les similitudes planes mais il est nettement plus compliqué que dans le cas des isométries de repérer celle qui va faire le travail.

4.3 Des exemples.

Il y a dans [DPR] de nombreux exemples de cette utilisation des cas d'isométrie ou de similitude dans lesquels cette voie est plus simple que le recours aux transformations. À la lumière de ces exemples, je reprendrais volontiers la citation de Dieudonné, en la renversant :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en utilisant les "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions, afin de se ramener vaille que vaille à la transformation pertinente ...

Voici un exemple que j'emprunte à la thèse (en cours) de Sophie Gobert [Gobert] :

Soit $ABCD$ un parallélogramme.
On construit, à l'extérieur de $ABCD$
les triangles équilatéraux ADP et ABQ.
Montrer que PQC est équilatéral.

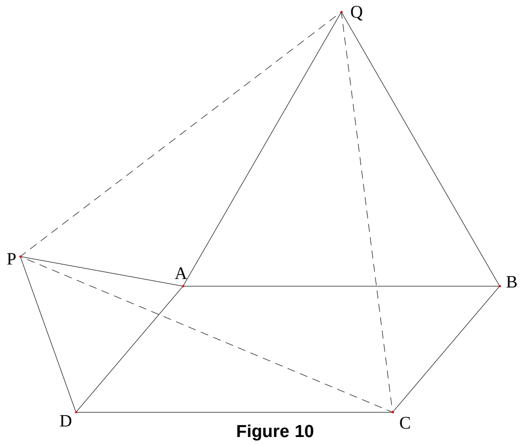

Figure 10

On voit aussitôt que les triangles BQC et DCP sont isométriques ce qui donne $CP = CQ$. Pour conclure, deux méthodes sont possibles. On peut montrer que l'angle en C de PQC vaut $\pi/3$ en notant que son supplémentaire est égal à celui de $\widehat{QBA}$. On peut aussi montrer que le triangle AQP est isométrique à l'un quelconque des précédents (il faut un petit calcul d'angles pour montrer $\widehat{D} = \widehat{A}$ ou $\widehat{D} = \widehat{B}$).

Bien entendu, on peut aussi montrer le résultat en utilisant les transformations. Il faut, soit montrer que la rotation de centre O (le centre de PQC) conserve ce triangle (mais cela ne semble pas évident), soit montrer que la rotation de centre

Q[15] et d'angle $-\pi/3$ transforme C en P. Pour cela, on envoie C en P comme on peut, c'est-à-dire en passant par D. Autrement dit, on considère la composée $f = \rho\tau$ de la rotation de centre A et d'angle $-\pi/3$ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$. La transformation f est une rotation de $-\pi/3$ et on a bien $f(C) = \rho(D) = P$. Il reste à trouver le centre de f. Soit Q' tel que $\tau(Q) = Q'$. Le triangle AQQ' est équilatéral. On a donc $f(Q) = \rho(\tau(Q)) = \rho(Q') = Q$ ce qui montre que f est de centre Q et que PQC est équilatéral.

Je considère que cette preuve est doublement plus compliquée que l'autre. En effet, outre qu'il faut parfaitement maîtriser la composition des isométries[16], il faut une construction supplémentaire. Qui parlait d'un échafaudage complexe ?

Voici un autre exemple, qui concerne la similitude et qui est étudié dans [DPR] :

Soit ABC un triangle isocèle en A.
Une droite passant par A
coupe le côté $[BC]$ en D
et le cercle circonscrit en E.
Montrer qu'on a $\overline{AD}\,.\,\overline{AE} = AB^2$.

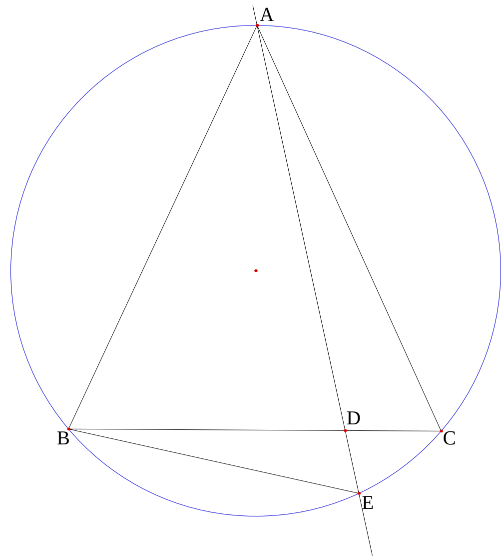

Figure 11

La relation est immédiate en montrant que les triangles ABD et AEB sont semblables, (il faut utiliser le théorème de l'angle inscrit). En revanche il n'est pas évident d'exhiber la transformation qui donne le résultat. Il s'agit en effet de la similitude indirecte, composée de la symétrie d'axe la bissectrice de $\widehat{BAE}$ et de l'homothétie de centre A et de rapport AB/AD, mais pour le voir il faut construire les points B' et D' symétriques de B et D par rapport à la bissectrice et il n'est pas encore évident de montrer que $(B'D')$ est parallèle à (BE). Échafaudage, vous avez dit échafaudage ?

4.4 Cas d'isométrie et axiomatique.

Il y a un dernier argument en faveur des cas d'isométrie, c'est celui des fondements de notre enseignement de la géométrie. En effet, avant la réforme des mathématiques modernes, le fondement de la géométrie, plus ou moins implicite, était un système

15 En fait, le plus simple est d'utiliser la rotation de 60 degrés de centre P.

16 Le fait que la composée d'une rotation d'angle θ et d'une translation soit une autre rotation d'angle θ est trivial si l'on dispose de la transformation vectorielle associée à une transformation affine, ce qui est le cas à l'Université. C'est encore assez facile en terminale avec la décomposition en produit de réflexions. En revanche, au collège, cela n'est pas du tout évident !

d'axiomes inspiré d'Euclide. Dans ce système, on "démontrait" les cas d'égalité par la méthode de superposition qui, si elle est convaincante pour l'intuition, n'était pas vraiment rigoureuse sur le plan mathématique. On sait, depuis Hilbert, qu'il faut au moins mettre le "premier cas d'égalité" dans les axiomes. Mais, une fois qu'on disposait des cas d'égalité, la suite pouvait être alors parfaitement justifiée.

La perspective des réformateurs des années 60-70 était clairement de substituer à ce système d'axiomes celui issu de l'algèbre linéaire. Choquet parle d'une "route royale" et Dieudonné dit :

Il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline (l'algèbre linéaire)*, à lui apprendre à "penser linéairement" ...*

Cette doctrine a d'ailleurs été mise en œuvre au lycée, au début des années 70 avec le succès que l'on sait.

Dans la période suivante on a renoncé à cette idée du tout linéaire et proposé une sorte de système intermédiaire, fondé sur l'introduction progressive des transformations, mais la base théorique n'en était pas toujours très claire (il y a bien eu des tentatives intéressantes de ce point de vue, dont celle d'Annie Cousin-Fauconnet [Cousin-Fauconnet], mais elles étaient assez peu connues, même en formation des maîtres).

Tout bien pesé, mon sentiment est que finalement, pour les élèves de collège, c'est encore Euclide, convenablement adapté, qui est le plus simple !

5. LES AUTRES OUTILS POUR PROUVER : LE CALCUL, LES TRANSFORMATIONS.

5.1 Le calcul.

Je voudrais dire ici que le calcul aussi est un outil important pour faire de la géométrie. À un stade plus avancé, il n'y a d'ailleurs pas de géométrie qui ne soit liée au calcul. Par exemple, on ne comprend la solution négative des problèmes des grecs (duplication du cube, quadrature du cercle, etc.) qu'en traduisant les propriétés géométriques en propriétés des nombres. Voici ce que dit Descartes à ce sujet dans un texte magnifique (cf. [Descartes]) :

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t'on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que de leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une des deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est *le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.*

De même, le problème, anodin en apparence, de savoir combien de coniques du plan sont tangentes à cinq coniques données[17] relève typiquement de ce qu'on appelle la géométrie algébrique, qui, comme son nom l'indique, instaure un dialogue profond et difficile entre calcul et géométrie.

À un niveau plus élémentaire il ne s'agit pas de calculer **au lieu** de faire de la géométrie, mais de calculer **en faisant** de la géométrie. La citation suivante de Jean-Jacques Rousseau (dans Les confessions) illustre bien ce point :

Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais pas cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle. La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite ; mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes ; autrement je n'y comprenais plus rien.

Je trouve que ce défaut de faire de la géométrie “en tournant une manivelle” est assez répandu, notamment parmi les étudiants de CAPES avec qui je dois souvent lutter pour qu'ils ne déroulent pas un calcul vectoriel à grands coups de relations de Chasles, hors de toute intuition géométrique.

En revanche, l'apport du calcul, lorsqu'il est lié à la géométrie, est souvent décisif, cf. par exemple [DPR], §4.

5.2 Les transformations.

Les arguments des paragraphes précédents me conduisent à critiquer un usage trop exclusif de l'outil “transformations” au collège. En effet, ce choix présente au moins deux défauts essentiels : il appauvrit et il complique.

• *Il appauvrit*

Les transformations ne constituent un outil réellement efficace que lorsqu'on dispose de toute la panoplie des isométries, voire des similitudes planes. Cela conduit, en attendant, à n'utiliser que la transformation qui relève du programme de la classe considérée (et, dans le meilleur des cas, de celui des classes précédentes), ce qui appauvrit beaucoup les problèmes que l'on peut poser. Ce défaut de complexité conduit, de plus, à un autre effet pervers, qui est d'insister sur l'aspect formel des démonstrations dont j'ai déjà dit qu'il n'est pas l'essentiel. Les invariants et les cas d'isométrie, en revanche, sont des outils qui, dès qu'on en dispose, permettent de faire à peu près toute la géométrie du collège et de poser dès le début des problèmes où une vraie réflexion, appuyée sur la figure, est possible.

• *Il complique*

Comme on l'a vu ci-dessus, il y a de nombreux cas où l'usage des transformations, en lieu et place des cas d'isométrie, conduit, au niveau du collège, à des contorsions

[17] la réponse est 3264 si l'on travaille dans le plan projectif complexe !

pénibles, notamment lorsqu'il faut calculer explicitement des composées de transformations, au lieu d'utiliser la transitivité. Une conséquence inéluctable de cette complication est la suivante : pour que les élèves puissent résoudre les problèmes on est obligé de leur donner beaucoup d'indications, de sorte que les tâches qui leur restent sont trop parcellaires et ne donnent pas lieu à une véritable recherche. Comme les élèves n'ont plus vraiment à trouver quelque chose, ce qu'on leur demande est donc plutôt de l'ordre de la mise en forme et cela ne fait que renforcer le défaut que je signalais plus haut : la démonstration réduite à un exercice de style.

Attention, même si j'ai essayé de vous convaincre que les transformations ne sont pas toujours le meilleur outil pour faire de la géométrie, notamment au collège, il convient de se garder de retomber dans le travers que dénonçait Choquet en 1961 (cf. [Choquet]) : *On rencontre fréquemment la situation paradoxale suivante : le professeur étudie avec ses élèves une figure dotée d'un axe de symétrie évident ; pour établir l'égalité de deux segments, la tendance naturelle de l'élève est d'utiliser cette symétrie ; son professeur le lui interdit, au profit d'un cas d'égalité de triangles. Ne parlons pas de la faute pédagogique ainsi commise ; mais, d'une part, le professeur oublie que sa démonstration des cas d'égalité était basée implicitement sur la symétrie ; d'autre part, il présente les mathématiques comme un jeu vain, dans lequel des propriétés évidentes doivent être démontrées à partir d'autres propriétés qui le sont beaucoup moins.*

Les arguments contenus dans ce texte, qui sont tout à fait recevables et expliquent en partie la position prise à l'époque, doivent nous guider pour trouver une voie médiane entre le “tout transformations” et le “tout cas d'égalité”.

Voici d'ailleurs un exemple, emprunté à [DPR] §7 où les transformations sont l'outil le mieux adapté :

Construire un carré $ABCD$ dont le centre O est donné et tel que les points A et B soient respectivement sur deux droites données Δ_A et Δ_B.

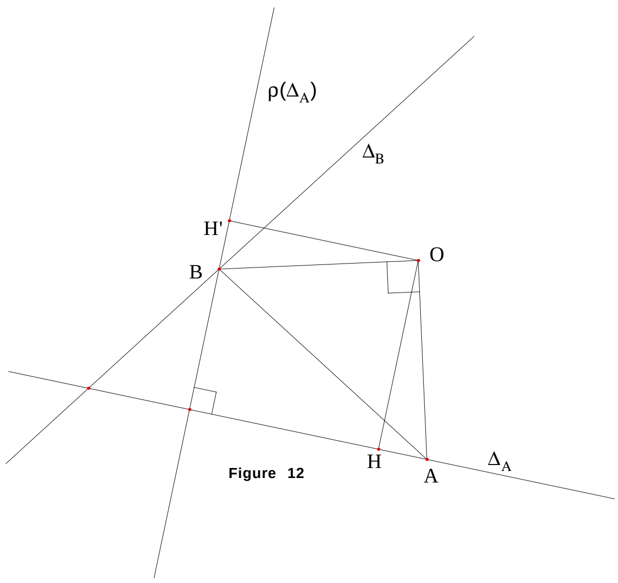

Figure 12

Dans ce cas, la considération de la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est décisive, cf. figure 12 pour le cas indirect.

Pour conclure sur ce point, je retiendrais volontiers le principe suivant : il est naturel d'utiliser les transformations quand elles sont évidentes (c'est-à-dire quand on les voit !). Sinon, si on ne les aperçoit pas, ou si on ne sait pas montrer que leur effet est bien celui qu'on pense (et cela peut dépendre des aptitudes et des connaissances de chacun), plutôt que d'essayer à toute force de les faire apparaître, il est toujours possible et souvent plus simple d'utiliser les invariants et les cas d'isométrie.

6. CONCLUSION.

6.1 Des propositions.

En ce qui concerne la géométrie du collège, les deux orientations que j'ai envie de proposer (et qui sont sous-jacentes dans le rapport d'étape) sont les suivantes :
• une plus grande utilisation des invariants, notamment aires et angles,
• la réintroduction des cas d'isométrie au collège.

Le premier point ne représente pas un changement considérable. C'est plus un changement d'état d'esprit qu'autre chose. Le second point est plus conséquent et, avant de passer à sa réalisation, il y a tout un travail préalable à faire :
• Il faut mener une réflexion (collective) sur la cohérence générale des programmes et l'ordre dans lequel les notions doivent être introduites, sur l'axiomatique (en un sens assez large) qui est sous-jacente et sur les conséquences didactiques de tels choix et faire des propositions en ce sens (cf. par exemple [Bkouche 2000]). Il y a beaucoup de questions dont la réponse n'est pas évidente : quel équilibre transformations-cas d'isométrie ? quand introduire ces notions ?[18]
• Un grand effort est nécessaire pour convaincre les maîtres de l'intérêt de cette évolution et de ce qu'elle peut leur apporter, en tenant compte de l'expérience qu'ils ont accumulée au cours des années sur les transformations. C'est ce que j'essaie de faire ici. Mais je sais que ce n'est pas facile. Le proverbe russe qui dit : *le plus court chemin est celui que tu connais* est valable pour chacun de nous.
• Un effort important de formation initiale et continue est indispensable car, à l'exception des anciens qui ont été formés aux cas d'égalité (mais qui, d'abord, ont oublié ces techniques qu'ils n'ont pas ou peu enseignées et qui, ensuite, vont bientôt partir à la retraite !), les autres n'en ont pratiquement jamais entendu parler. Je reviens sur ce point au paragraphe suivant.

6.2 La formation des maîtres en géométrie.

Il est clair que la formation des maîtres, à l'heure actuelle, présente de graves insuffisances en ce qui concerne la géométrie. Cela est dû notamment au fait que les cursus actuels de DEUG et de licence contiennent, en général, très peu de géométrie. Je recense ici quelques thèmes sur lesquels la formation devrait, à mon avis, être complétée (cela pourrait être en licence, voire en maîtrise, afin que tout ne repose pas sur l'année de préparation au CAPES).
• L'axiomatique : il faudrait montrer (brièvement) aux futurs professeurs, à côté de la présentation par les espaces affines et vectoriels (essentiellement inutile pour

[18] Une façon de faire, pas trop brutale, consisterait à partir du libellé des actuels programmes qui demandent : *Construire un triangle connaissant la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents, etc.*. En effet, cette construction s'appuie implicitement sur les cas d'isométrie. Il ne serait pas très difficile de justifier alors les conséquences de ce qu'on vient de faire, c'est-à-dire l'égalité des autres éléments.

enseigner au collège[19]), un système cohérent d'axiomes du style Euclide-Hilbert, en explicitant au moins les axiomes d'incidence élémentaires, les axiomes de congruence (le premier cas d'égalité), le postulat des parallèles et enfin les axiomes des aires. Il y a maintenant des références abordables, cf. [Arsac], [Hartshorne], [Lion]. Un complément important de cette étude devrait être de montrer quelques rudiments d'une géométrie non euclidienne (par exemple la géométrie du demi-plan de Poincaré, voir le livre de G. Lion [Lion]).

• Parmi les points qui devraient être approfondis figure certainement la notion d'angle, ou plutôt les notions d'angles (orientés ou non, de demi-droites, de droites, etc.), avec notamment le théorème de l'angle inscrit et ses applications.

• Il y a un travail important à faire sur la figure, afin de donner aux futurs professeurs les moyens de maîtriser les difficultés qui s'y rapportent. Je renvoie à [R] §3 d) pour une analyse de ce travail nécessaire qui tourne surtout autour de la convexité.

• Un autre point noir de notre enseignement universitaire concerne les notions de mesure des longueurs, des aires et des volumes. C'est un point qu'il faut corriger pour permettre aux futurs professeurs d'être au clair sur la mesure des angles, ou encore sur la limite de $\sin x/x$ en 0, ou enfin sur l'existence des primitives.

• Enfin, la géométrie dans l'espace est un point essentiel et redouté des candidats au CAPES. Il devrait y avoir en licence ou en maîtrise un moment pour étudier les polyèdres, la formule d'Euler, les polyèdres réguliers, etc.

J'ai prononcé ici, à plusieurs reprises, le mot maîtrise. Je pense en effet que vouloir former en 3 ans (plus l'année de CAPES) des professeurs qui dominent à la fois, la géométrie, l'algèbre, l'arithmétique, l'analyse, les statistiques et les probabilités, qui aient des connaissances solides dans les disciplines voisines (pour les TPE), qui soient aussi formés en informatique, que sais-je encore, c'est la quadrature du cercle, et ce d'autant plus qu'il va falloir former beaucoup de professeurs dans les années qui viennent. Je suis donc un partisan résolu de l'allongement d'un an des études pour les futurs professeurs de mathématiques[20], mais ceci est une autre histoire ...

7. RÉFÉRENCES.

[Arsac] Arsac G., *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, IREM de Lyon, 1998.

[Audin] Audin M., *Géométrie*, Belin, 1998.

[Bkouche 1997] Bkouche R., *Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie*, Repères IREM 26, 1997.

[Bkouche 2000] Bkouche R., *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.

[Choquet] Choquet G., *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire*, Brochure APM numéro 3, 1961.

[19] Comme le dit G. Arsac (cf. [Arsac]) : *un enseignant est aussi bien armé avec cette axiomatique qu'une poule avec un couteau pour résoudre les problèmes de l'enseignement de la géométrie.*

[20] et je le dis chaque fois que j'en ai l'occasion. Après tout, à force de répéter "il faut détruire Carthage", elle a fini par être détruite !

[Cousin-Fauconnet] Cousin-Fauconnet A., *Enseigner la géométrie au collège*, A. Colin, 1995.

[Cuppens] Cuppens R., *Enseigner la géométrie avec un ordinateur ?* Bull. APMEP 431, novembre 2000.

[Descartes] Descartes R., *La géométrie*, nouvelle édition, Hermann, 1886.

[Dieudonné] Dieudonné J., *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1968.

[Duperret & Perrin & Richeton]= [DPR] Duperret J.-C., Perrin D., Richeton J.-P., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, à paraître au Bulletin de l'APMEP.

[Ermel] ERMEL, *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, INRP, 1999.

[Gobert] Gobert S., *Thèse*, Université Paris 7, en préparation.

[Hartshorne] Hartshorne R., *Geometry : Euclide and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[Lion] Lion G., *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

[Perrin]=[P] Perrin D., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, novembre 2000.

[Rapport]=[R] *Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.

Pour les annexes, voir le site Internet de la SMF :
http://www.emath.fr/Serveur/Smf/smf.emath.fr/Enseignements