Quelques théorèmes de géométrie du triangle

Daniel PERRIN

Introduction

Les résultats qui suivent concernent la géométrie du triangle. L'auteur de ces lignes les tient de trois personnes : tout d'abord Gilbert Mahoux [1], physicien retraité, qui a mis en évidence les points dont nous allons parler et a montré les premiers théorèmes, puis Richard Cauche, professeur de collège, qui a remarqué la magnifique propriété des centres des cercles circonscrits et enfin Guy Auberson, autre physicien retraité, qui en a donné une démonstration. Il s'est avéré depuis qu'une partie au moins de ce qui suit était déjà connue des experts [2]. Cette incertitude est inévitable sur un tel sujet. Il n'empêche que ces résultats sont très beaux. On en donne ici des preuves géométriques [3].

1 Les points de Mahoux

1.1 Notations. Dans tout ce qui suit ABC désigne un triangle du plan. On note $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ses angles, A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectivement, ω le centre du cercle Γ inscrit dans ABC et I_A, I_B, I_C les points de contact de Γ avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1.1 Les deux points relatifs à C

1.2 Théorème. (Mahoux) *Avec les notations précédentes, les droites $(B'C')$, $(C\omega)$ et (I_CI_A) sont concourantes en un point M et les droites $(A'C')$, $(C\omega)$ et (I_CI_B) sont concourantes en un point N.*

Démonstration. On note d'abord que les deux assertions sont identiques à l'échange près de A et B. On prouve ensuite un lemme (voir figure 1) :

1. Gilbert Mahoux est décédé le 7 février 2024. Cet article est dédié à sa mémoire.
2. Voir `https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2023/02/cours.pdf` ex. 53 p.21.
3. Les preuves initiales étaient calculatoires. Pour une autre approche, voir `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livregeometrie/DPPartie5.pdf`

1.3 Lemme. *On a la formule* $BC + AB - AC = 2BI_C$.

Démonstration. On a $AC = AI_B + I_BC = AI_C + CI_A$ (car les tangentes à un cercle issues d'un même point sont égales). On en déduit $BC + AB - AC = (BC - CI_A) + (AB - AI_C) = BI_A + BI_C = 2BI_C$.

Soit M le point d'intersection des droites $(B'C')$ et (I_CI_A). Il s'agit de montrer que (MC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$ du triangle, donc de montrer que les angles $\theta = \widehat{BCM}$ et $\gamma = \widehat{MCA}$ sont égaux. Mais, comme la droite des milieux $(B'C')$ est parallèle à (BC), on a $\mu = \widehat{CMB'} = \theta$ car ce sont des angles alternes-internes [4]. Il suffit donc de montrer qu'on a $\gamma = \mu$ c'est-à-dire que CMB' est isocèle en B', ou encore qu'on a $B'C = B'M$. On note qu'on a $B'C = \frac{1}{2}AC$. Comme les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, les triangles $C'MI_C$ et BI_AI_C sont semblables, et comme on a $BI_A = BI_C$, on en déduit $C'M = C'I_C$. Il y a deux cas :

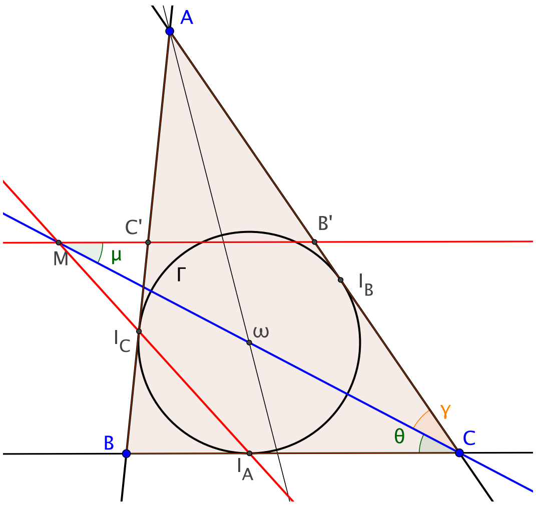

Figure 1 –

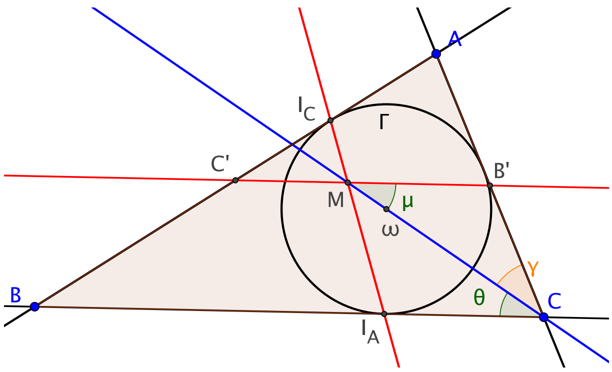

Figure 2 –

1) Si M est extérieur au triangle, voir figure 1, C' est entre B' et M et I_C entre B et C' et on a $B'M = B'C' + C'M = \frac{1}{2}BC + C'M = \frac{1}{2}BC + C'I_C$ et $C'I_C = BC' - BI_C = \frac{1}{2}AB - BI_C$. En définitive, on a $B'M = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - BI_C = \frac{1}{2}AC = B'C$ en vertu du lemme 1.3.

2) Si M est intérieur, voir figure 2, M est entre C' et B' et on a $B'M = \frac{1}{2}BC - C'M$ et $C'M = C'I_C = BI_C - \frac{1}{2}AB$. On a donc $B'M = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - BI_C = \frac{1}{2}AC = B'C$, toujours par 1.3

4. Voir en annexe la preuve du fait que B' et B sont de part et d'autre de (CM).

1.2 D'un point à l'autre

La propriété suivante va être essentielle pour la suite.

1.4 Théorème. (Auberson) *Avec les notations de 1.2, les points M et N sont échangés par l'inversion de centre ω et de cercle Γ.*

Démonstration. Le lemme crucial est le suivant :

1.5 Lemme. *Les points A, I_B, I_C, ω, M sont cocycliques.*

Démonstration. C'est évident pour les quatre premiers car les triangles $A\omega I_B$ et $A\omega I_C$ sont deux triangles rectangles accolés par leur hypoténuse donc inscrits dans le cercle Ω de diamètre $[\omega A]$. Pour voir que M est aussi sur Ω il suffit de montrer l'égalité d'angles [5] $\mu' := \widehat{I_C M \omega} = \alpha := \widehat{I_C A \omega} = \frac{1}{2}\widehat{A}$. On a vu qu'on a $\mu := \widehat{\omega M C'} = \gamma = \widehat{\omega C B'} = \frac{1}{2}\widehat{C}$. Par ailleurs, on a $\mu + \mu' = \widehat{I_C M C'} = \widehat{I_C I_A B}$ comme angles alternes-internes et cet angle est égal à $\widehat{B I_C I_A}$, donc à $\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}$. On en déduit $\mu' = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} = \alpha$ comme attendu.

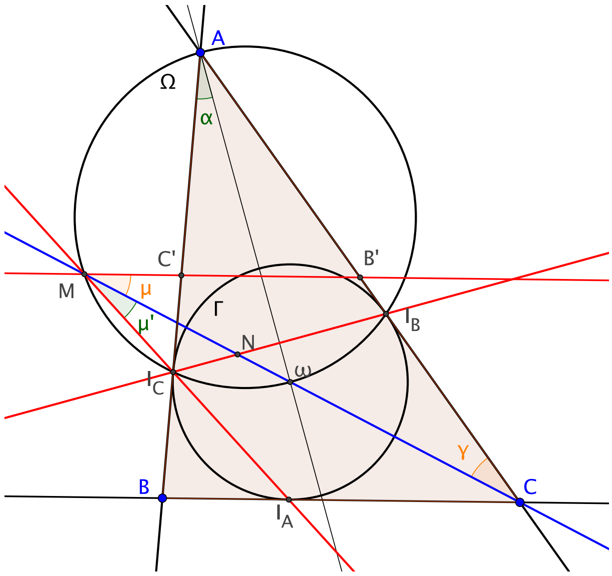

FIGURE 3 –

Le théorème est alors immédiat. En effet, comme le cercle Ω contient le pôle d'inversion ω, son image est une droite, qui contient les points I_C et I_B qui sont sur le cercle d'inversion. C'est donc la droite $(I_C I_B)$ et l'image du point M est l'intersection de $(I_C I_B)$ et de $(\omega M) = (\omega C)$, c'est-à-dire N.

5. En toute rigueur il faut montrer une égalité d'angles orientés, voir Annexe ci-dessous.

1.3 Les six points de Mahoux

Bien entendu, ce qu'on a fait ci-dessus avec les points M, N situés sur la droite (ωC) peut se décalquer sur les droites (ωA) et (ωB) en permutant circulairement les points A, B, C. On obtient ainsi six points (les six points de Mahoux) que l'on nomme M_A, N_A (sur (ωA)), M_B, N_B (sur (ωB)) et M_C, N_C (sur (ωC)) et ces six points sont deux à deux inverses dans l'inversion de cercle Γ, cercle inscrit dans ABC.

1.6 *Remarque.* Le lemme 1.5 montre aussi que l'angle $\widehat{CMA} = \widehat{\omega MA}$ est droit puisque M est sur le cercle de diamètre $[\omega A]$. Il en résulte que les points de Mahoux sont les projetés orthogonaux des sommets de ABC sur les bissectrices.

1.4 Annexe : les questions de position

En vérité, les raisonnements ci-dessus sont souvent tributaires d'assertions de position que nous explicitons ici. Pour des précisions on pourra se reporter, par exemple, à la Brochure numéro 100 de l'IREM de Paris (*Enseigner la géométrie au cycle 4*).

1) Pour montrer que les angles $\widehat{BCM}$ et $\widehat{CMB'}$ sont alternes-internes, il faut vérifier que B et B' sont de part et d'autre de (CM), ou encore que M est dans le secteur $[\widehat{BCA}]$. Comme M est sur $(B'C')$ qui est parallèle à (BC), il est clair qu'il est dans le demi-plan limité par (BC) qui contient A. Si B et M étaient de part et d'autre de (AC), il en serait de même de M et I_A et $[MI_A]$ couperait (AC), et même $[AC]$, en P. Mais alors les points $P \in [AC]$, $I_A \in [BC]$ et $I_C \in [AB]$ seraient alignés, contrairement à ce qu'affirme l'axiome de Pasch.

2) Dans la preuve de 1.5 on peut raisonner en termes d'angles de droites orientés (angles modulo π), ce qui évite de distinguer les cas de figure. Il s'agit de montrer l'égalité d'angles $(MI_C, M\omega) = (AI_C, A\omega) = \frac{1}{2}(AB, AC)$. Mais on a $(MI_C, M\omega) = (MI_C, MB') + (MB', M\omega)$, puis $(MI_C, MB') = (I_AI_C, I_AB)$, comme angles alternes-internes et $(MB', M\omega) = (CB, CM) = \frac{1}{2}(CB, CA)$ comme angles à la base du triangle isocèle $MB'C$. La somme des angles du triangle BI_AI_B donne $(I_AI_C, I_AB) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(BC, BA)$ et on conclut avec la somme des angles du triangle ABC.

2 Les centres des cercles circonscrits

2.1 Le théorème

Le résultat est le suivant :

2.1 Théorème. (Cauche-Auberson) *Avec les notations du paragraphe 1.3, les centres des cercles circonscrits*[6] *aux triangles formés par les points de Mahoux* $M_AM_BM_C$ *et* $N_AN_BN_C$ *(resp.* $M_AM_BN_C$ *et* $N_AN_BM_C$*, resp.* $M_BM_CN_A$ *et* $N_BN_CM_A$*, resp.* $M_CM_AN_B$ *et* $N_CN_AM_B$*) sont alignés avec le centre* ω *du cercle inscrit dans* ABC*.*

Pour la démonstration nous aurons besoin du résultat suivant :

2.2 Proposition. *Soit* Γ *un cercle de centre* ω *et* i_Γ *l'inversion de cercle* Γ*.*

Si $\mathscr{C}$ *est un cercle ne passant pas par* ω*, l'image* $\mathscr{C}'$ *de* $\mathscr{C}$ *par* i_Γ *est un cercle* $\mathscr{C}'$*. Les cercles* Γ*,* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *sont dans un même pinceau*[7] *et, en particulier, leurs centres sont alignés.*

Démonstration. C'est un résultat classique sur l'inversion. Le fait que l'image soit un cercle, homothétique du premier dans une homothétie de centre ω (ce qui donne l'alignement des centres) est dans le livre de Deltheil et Caire, voir [DC] leçon 21, N° 170. L'assertion sur le pinceau ne semble pas être explicitement dans [DC], mais elle est facile. En effet, si Γ et $\mathscr{C}$ se coupent en deux points A, B, ces points sont fixes par l'inversion et $\mathscr{C}'$ est donc dans le pinceau défini par ces points. Si Γ et $\mathscr{C}$ ne se coupent pas on se ramène au cas précédent en considérant le pinceau orthogonal, voir [DC] leçon 22 N°177. Pour une version moderne, voir [DP] 4.1.8.

On peut alors montrer le théorème 2.1. Vu 1.4 et §1.3, le résultat est une conséquence immédiate du lemme suivant, qui est une conséquence de 2.2 :

2.3 Lemme. *Soient* Γ *un cercle de centre* ω*,* A, B, C *trois points et* A', B', C' *leurs inverses dans l'inversion de cercle* Γ*. On suppose que les points* A, B, C *(resp.* A', B', C'*) sont non alignés. Alors, le cercle* Γ *est dans le pinceau déterminé par les cercles* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *circonscrits à* ABC *et* $A'B'C'$ *et les centres de* Γ*,* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *sont alignés.*

2.4 *Remarque.* Parmi les quatre pinceaux de cercles ainsi obtenus, l'expérience montre que trois sont à points base et un à points de Poncelet. Le lecteur attentif ne manquera pas de prouver ce résultat.

6. En toute rigueur, il faut montrer que les points en question sont non alignés, voir Annexe ci-dessous.

7. Autrefois on disait “faisceau”.

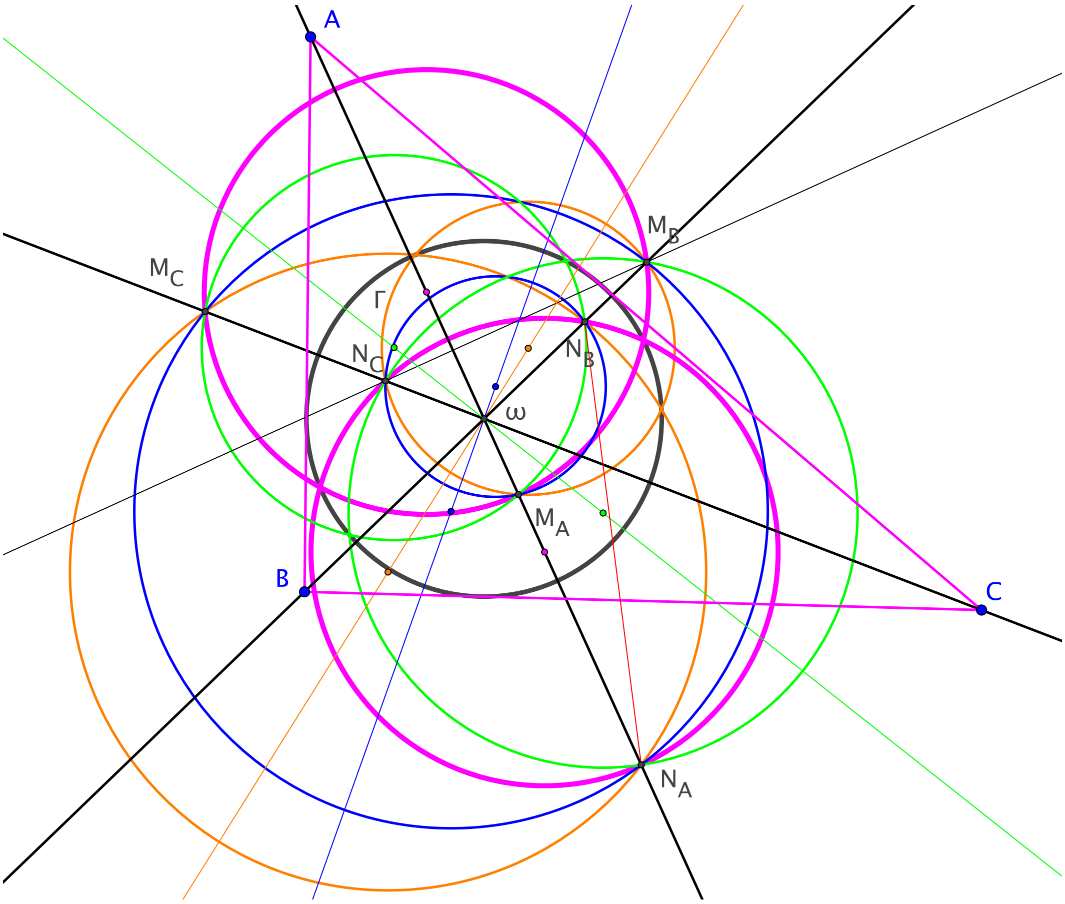

Figure 4 – Tous les cercles circonscrits et les alignements des centres

2.2 Annexe : le non alignement

2.5 Proposition. *Trois quelconques des points de Mahoux* M_A, M_B, M_C, N_A, N_B, N_C *admettant les trois indices* A, B, C *sont non alignés.*

On commence par un lemme :

2.6 Lemme. *Les points* M_C *et* N_C *sont dans la demi-droite ouverte* $]\omega C')$ *opposée à* $[\omega C)$.

Démonstration. On note d'abord que l'angle $\widehat{A\omega C}$ vaut $\pi - \widehat{A}/2 - \widehat{C}/2$ et il est donc obtus. On sait que M_C est le projeté orthogonal de A sur (ωC), de sorte que AM_C réalise la plus courte distance de A à cette droite et on a en particulier $AM_C < A\omega$ (puisque $\widehat{A\omega C}$ n'est pas droit). Il suffit donc de montrer que, pour tout point $P \in]\omega C)$, on a $AP > A\omega$. Mais on a $\widehat{A\omega C} = \widehat{A\omega P}$ et cet angle est obtus, de sorte que le côté AP du triangle $A\omega P$ est le plus grand. L'argument est analogue pour N_C.

On peut alors prouver 2.5. Montrons par exemple que M_A, M_B, M_C sont non alignés, les autres cas sont analogues. On montre d'abord que M_C est dans le secteur saillant $[\widehat{A\omega B}]$. En effet, C est dans le demi-plan limité par $(A\omega)$ qui ne contient pas B et dans celui limité par $(B\omega)$ qui ne contient pas A, donc dans le secteur opposé à $[\widehat{A\omega B}]$, donc M_C, qui est dans la demi-droite opposée à $[\omega C)$ en vertu du lemme, est dans $[\widehat{A\omega B}]$. Si les points M_A, M_B, M_C sont alignés sur une droite Δ, cette droite coupe les côtés du secteur $[\widehat{A\omega B}]$, ce qui contredit l'assertion du lemme pour M_A et M_B.

Références

[DC] Deltheil Robert, Caire Daniel, *Géométrie*, Jacques Gabay, Paris, 1989.

[DP] Perrin Daniel, *Géométrie projective et applications aux géométrie euclidienne et non euclidiennes, Partie VI, La géométrie anallagmatique*, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livregeometrie/DPPartie6.pdf`