# Géométrie euclidienne, invariants,

# cas d'isométrie et de similitude des triangles

## 0. Introduction.

Bonjour, je m'appelle Daniel Perrin et je suis membre de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques que préside Jean-Pierre Kahane. Dans cette commission j'ai été chargé de rédiger le rapport d'étape sur la géométrie paru au début de l'année (voir le bulletin APMEP de septembre). C'est à ce titre que l'on m'a demandé de parler ici.
Je voudrais d'abord préciser les rapports entre la commission Kahane et le GTD (groupe technique disciplinaire). Même s'il y a une intersection non vide entre ces organismes, ils ont des rôles tout à fait différents. Le GTD est chargé de l'élaboration des programmes au jour le jour, tandis que la commission est investie d'une mission à plus long terme. C'est pourquoi, même si nous comptons bien que les réflexions de la commission seront prises en compte par le GTD, il n'y a pas de rapport direct entre les deux. De plus, s'agissant des programmes de seconde qui font l'objet du débat d'aujourd'hui, ils ont été publiés avant le rapport sur la géométrie qui n'a donc pas pu les influencer. Cependant, on pourra noter un certain nombre de convergences entre eux et notamment sur deux points que je vais évoquer ici : l'importance des invariants et l'usage des cas d'isométrie (on disait autrefois d'égalité) ou de similitude des triangles.

Je voudrais dire tout de suite que, si je suis partisan d'une réhabilitation des invariants et des cas d'isométrie, je ne souhaite pas pour autant la disparition des transformations. Il s'agit plutôt de trouver un nouvel équilibre entre ces diverses approches de la géométrie.

## 1. Critique de la réforme des mathématiques modernes.

Le rapport de la commission contient en particulier une critique de la réforme des maths modernes. Bien entendu, cette critique n'a d'intérêt qu'en ce que cette réforme, bien qu'abandonnée depuis longtemps, a laissé des traces encore très présentes dans l'enseignement actuel. Nous avons recensé cinq points de désaccord essentiels avec les principes mathématiques et épistémologiques de cette réforme, en ce qui concerne la géométrie :

- *Le projet du "tout linéaire".*
- *La minoration systématique du rôle des figures.*
- *La minoration du rôle des invariants, notamment aire et angle.*
- *L'abandon des cas d'égalité des triangles.*
- *La disparition des géométries riches.*

Je ne vais aborder aujourd'hui que les points 3 et 4 (invariants et cas d'égalité).

En ce qui concerne les invariants je vais donner quelques exemples de leur efficacité pratique (notamment dans le cas des angles et des aires) et expliquer pourquoi cette efficacité est justifiée par la théorie.
En ce qui concerne les cas d'"égalité" (ou d'isométrie), j'essaierai de montrer là encore que leur abandon est un contresens, même si l'on pense la géométrie en termes de transformations et qu'ils constituent un outil incomparable pour faire de la géométrie.

## 2. Invariants.

*a) Le discours de Bourbaki.*

L'un des points de départ de ma réflexion en ce qui concerne les invariants est la citation suivante de Bourbaki sur la géométrie "élémentaire" :

*Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies" de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire. Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...*

Ce texte, qui date des années 60, explique la position des mathématiciens d'alors : la géométrie élémentaire est une science morte, donc à bannir des programmes, et c'est ce que mettra en pratique la réforme des maths modernes. Cependant, au point de vue mathématique, cette phrase est très intéressante et paradoxalement elle peut mener à des positions opposées à celles prises à l'époque.

*b) Un mot sur le programme d'Erlangen.*

Il s'agit de la thèse de Felix Klein soutenue à Erlangen en 1872. C'est un texte qui a beaucoup inspiré les promoteurs de la réforme des maths modernes.
Le travail de Klein se veut une unification de toutes les géométries que le dix-neuvième siècle a vu éclore, à côté de la géométrie euclidienne classique (géométries projective, anallagmatique, i.e. la géométrie de l'inversion, non euclidiennes, etc.).
Sa thèse est qu'une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble $X$ et d'un groupe $G$ de transformations de $X$. Les éléments de $G$ sont les transformations "permises" dans la géométrie en question et ils caractérisent cette géométrie. Il s'agit, par exemple, des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou des isométries affines pour la géométrie euclidienne plane ou encore des homographies pour la géométrie projective. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projectives) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe.
Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, Pappus, qui n'emploie que les notions de concourance et d'alignement, est un théorème projectif tandis que

Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien.

*c) Erlangen et les invariants.*

Lorsqu'on lit Klein avec les yeux d'un mathématicien actuel on ne peut qu'être en accord avec ce qu'il écrit, mais on reste un peu sur sa faim : si le groupe des transformations permises indique bien dans quel type de géométrie on travaille, il ne dit pas comment obtenir les théorèmes de cette géométrie. En fait, ce problème est résolu au moyen de la théorie des invariants (à peu près contemporaine de Klein). C'est à cela que Bourbaki fait allusion. Notre opinion est que cette théorie est inséparable du programme d'Erlangen et, pour utiliser une image familière, que le programme d'Erlangen sans la théorie des invariants c'est comme un vélo sans pédales. D'ailleurs, Klein lui-même assigne à la géométrie l' objectif suivant : *on donne une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité ; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe.*

*d) Les invariants, version naïve.*

Considérons d'abord ces invariants en un sens intuitif. Il s'agit simplement alors des notions qui sont conservées par les transformations du groupe en question.

Dans le cas de la géométrie euclidienne les invariants les plus immédiats sont les notions usuelles de longueur, d'orthogonalité ou plus généralement d'angle (orienté ou non selon qu'on considère les isométries positives ou négatives).
Dans le cas de la géométrie affine, les notions de longueur et d'angle ne sont plus des invariants, mais on dispose d'un (semi-)invariant qui est l'aire (algébrique) des triangles, vue comme (moitié du) déterminant de deux vecteurs. ([1]) C'est un semi-invariant seulement car si $u$ est une transformation affine quelconque, l'aire est multipliée par $|\text{dét}\, u|$ (c'est un vrai invariant pour les transformations affines de déterminant $\pm 1$).
Dans le cas de la géométrie projective l'invariant fondamental est le birapport de quatre points, nous y reviendrons plus loin.
Nous allons rappeler quelques exemples d'utilisation des invariants, puis nous discuterons de la justification théorique de cette utilisation.

*e) Un exemple d'utilisation des invariants : le cas de l'aire en géométrie affine.*

Je vous renvoie à mon article [P] qui va paraître dans le bulletin de l'APMEP en novembre pour des détails sur ce cas. Je montre ici un exemple différent.
Je rappelle deux lemmes sur les aires (qui résultent par exemple de la formule : $base \times hauteur/2$) :
• Le lemme "du trapèze" qui dit que deux triangles qui ont même base et des sommets sur une parallèle à la base sont d'aires égales.

• Le lemme "des proportions" qui dit que si deux triangles ont un sommet commun $A$ et des bases $BC$ et $BC'$ portées par la même droite, le rapport de leurs aires est égal au rapport des bases.

Ce dernier lemme admet pour conséquence le lemme "du chevron" : Soit $ABC$ un triangle et $O$ un point du plan. Si $(OA)$ coupe $(BC)$ en $A'$, on a la formule

$$\frac{\mathcal{A}(OBA)}{\mathcal{A}(OCA)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

([1]) ou du produit vectoriel, si l'on préfère

Voilà le résultat que nous allons montrer :
*Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ et soient $E$ (resp. $F$) le point d'intersection des droites $(BD)$ et $(AC)$ (resp. $(AD)$ et $(BC)$). Alors, la droite $(EF)$ coupe les bases du trapèze en leurs milieux.*

Soit $M$ l'intersection de $(EF)$ et $(AB)$. Montrons que $M$ est le milieu de $[AB]$, on en déduira le résultat pour $N$ par Thalès.
En vertu du lemme du trapèze on a $\mathcal{A}(ACD) = \mathcal{A}(BCD)$, d'où en ajoutant $\mathcal{A}(CDF)$, $\mathcal{A}(ACF) = \mathcal{A}(BDF)$. On a aussi, en retranchant $\mathcal{A}(CDE)$, $\mathcal{A}(AED) = \mathcal{A}(BEC)$. Mais alors, par le lemme des proportions on a :

$$\frac{\mathcal{A}(AED)}{\mathcal{A}(ACD)} = \frac{AE}{AC} = \frac{\mathcal{A}(BEC)}{\mathcal{A}(BCD)} = \frac{BE}{BD} = \frac{\mathcal{A}(AEF)}{\mathcal{A}(ACF)} = \frac{\mathcal{A}(BEF)}{\mathcal{A}(BDF)}.$$

On en déduit $\mathcal{A}(AEF) = \mathcal{A}(BEF)$ et on conclut par le lemme du chevron appliqué au triangle $ABF$.

Bien entendu, on peut montrer ce résultat en considérant les homothéties de centres $E$ et $F$ qui échangent les bases du trapèze, mais les homothéties ne sont même plus au programme de seconde, alors que la démonstration précédente peut être donnée au collège.

*f) Un autre exemple : longueurs et angles en géométrie euclidienne.*

Considérons le résultat bien connu suivant :

*Soit $ABC$ un triangle et soit $H$ son orthocentre. Le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit.*

C'est un résultat qui se démontre très facilement avec les angles et précisément avec deux ingrédients seulement : le théorème de l'angle inscrit et sa réciproque et la traduction angulaire de la symétrie.

Pour montrer que les points $A, B, C, H'$ sont cocycliques on va montrer que des angles inscrits interceptant le même arc sont égaux ou supplémentaires. Comme il y a dans un quadrilatère quatre côtés et deux diagonales, cela fait six possibilités, logiques *a priori*. Nous allons voir que toutes mènent au résultat. Nous traitons le cas où l'orthocentre $H$ est intérieur au triangle. Les autres cas sont analogues, mais si l'on n'utilise pas les angles orientés, il faut *a priori* distinguer les cas de figures.

Il suffit, par exemple, de montrer $\widehat{BCH'} = \widehat{BAH'}$ (réciproque du th. de l'angle inscrit). Or on a $\widehat{BCH'} = \widehat{BCH}$ (par la symétrie) et $\widehat{BCH} = \widehat{BAH'}$ (les points $A, C, A', C'$ sont sur le cercle de diamètre $[AC]$, ou encore, ces angles sont complémentaires des angles opposés par le sommet $\widehat{A'HC}$ et $\widehat{AHC'}$). On a évidemment un raisonnement similaire en échangeant les rôles de $B$ et $C$.
Préfère-t'on montrer $\widehat{AH'C} = \widehat{ABC}$ ? On a $\widehat{AH'C} = \widehat{CHH'}$ (symétrie). Or le supplémentaire de cet angle est $\widehat{C'HA'}$ qui est aussi supplémentaire de $\widehat{ABC}$ car $B, A', H, C'$ sont cocycliques. Ou encore : le complémentaire de cet angle est $\widehat{BCH}$ qui est aussi complémentaire de $\widehat{ABC}$. On a évidemment un raisonnement similaire en échangeant les rôles de $B$ et $C$.
On peut encore vouloir montrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BH'C}$ sont supplémentaires. Pas de problème, puisque l'on a $\widehat{BH'C} = \widehat{BHC}$ par symétrie et cet angle est opposé par le sommet à $\widehat{B'HC'}$ qui est supplémentaire de l'angle en $A$ car les points $A, B', H, C'$ sont cocycliques.

Enfin, on peut vouloir montrer que les angles $\widehat{ABH'}$ et $\widehat{ACH'}$ sont supplémentaires. On note qu'on a $\widehat{ABH'} = \widehat{ABC} + \widehat{CBH'}$ et $\widehat{ACH'} = \widehat{ACB} + \widehat{BCH'}$. On remarque ensuite que $\widehat{BCH'} = \widehat{C'CB}$ est complémentaire de $\widehat{ABC}$, tandis que $\widehat{ACB}$ est complémentaire de $\widehat{B'BC} = \widehat{CBH'}$ et on gagne en additionnant (cette démonstration reprend, en fait, la première).
Bref, quelle que soit l'option choisie, elle mène au résultat, et ce avec un minimum d'outils.

Lorsqu'on dispose des angles orientés de droites (angles modulo $\pi$) on peut donner une démonstration mécanique qui évite toute discussion de cas de figures : on a $(H'B, H'C) = -(HB, HC) = -(HB', HC') = (HC', HB') = (AC', AB')$ (car les points $A, B', H, C'$ sont cocycliques : $(C'A, C'H) = (B'A, B'H) = \pi/2 \pmod{\pi}$) et on arrive à l'angle $(AB, AC)$ comme souhaité.

Bien sûr, on peut aussi donner une démonstration *via* les transformations. On construit le point $A''$, diamétralement opposé à $A$ sur le cercle circonscrit $\Gamma$. On constate que $CHBA''$ est un parallélogramme (Le triangle $ACA''$ est rectangle en $C$, donc $(CA'')$ est perpendiculaire à $(AC)$ donc parallèle à $(BH)$ et de même de l'autre côté). Si $I$ est le milieu de $[BC]$ la symétrie de centre $I$ échange $H$ et $A''$. On passe donc de $A''$ à $H'$ par la composée de la symétrie par rapport à $I$ et de la symétrie par rapport à $(BC)$, c'est-à-dire par la symétrie par rapport à la perpendiculaire à $(BC)$ en $I$ : la droite $(OI)$ où $O$ désigne le centre du cercle circonscrit. Comme le cercle est invariant dans cette symétrie, il en résulte que $H'$ est sur $\Gamma$.

Cette démonstration est très jolie aussi, mais on peut mesurer la différence entre ces deux approches. Dans l'une, pas besoin d'imagination, mais seulement des principes à mettre en œuvre. Dans l'autre, la nécessité d'une idée (au moins), celle d'utiliser le point $A''$ et la symétrie de centre $I$. En contrepartie, la configuration obtenue dans cette démonstration mène assez vite à deux autres résultats importants : la droite et le cercle d'Euler.

Dans le même ordre d'idée, considérons le résultat suivant :
*Soit $ABCD$ un carré, $E$ (resp. $F$) un point intérieur (resp. extérieur) tel que le triangle $AEB$ (resp. $BFC$) soit équilatéral. Montrer que $D, E, F$ sont alignés.*
Bien sûr il y a des rotations partout, mais un simple calcul des angles en $E$, faisable dès le collège, donne la solution de manière immédiate.

*g) Justification de l'usage des invariants.*

Les exemples donnés ci-dessus, s'ils me semblent convaincants pour la pratique, posent néanmoins deux questions théoriques fondamentales :
1) Nous avons repéré certains invariants d'une géométrie donnée. Mais, n'y a-t'il pas d'autres invariants que ceux trouvés ?
2) Nous avons utilisé ces invariants pour montrer les théorèmes ci-dessus, mais ce recours aux invariants est-il obligatoire ?

Si ces questions ne peuvent être élucidées au niveau naïf où nous nous sommes placés, elles reçoivent en revanche une réponse très simple en termes algébriques dans le cadre de la théorie des invariants.

Prenons un exemple simple : celui de la géométrie (euclidienne) d'un triangle $a, b, c$

et choisissons le point $a$ comme origine (2). Les points $b$ et $c$ sont alors décrits par leurs coordonnées dans un repère orthonormé $a, e_1, e_2$ : $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$. Les invariants usuels : longueur, angle, aire correspondent alors aux produits scalaires $(b|b)$, $c|c$, $(b|c)$, ou vectoriel $b \wedge c$. Ces quantités sont des polynômes en les $b_i$ et les $c_i$ : $(b|c) = b_1c_1 + b_2c_2$, $(b|b) = b_1^2 + b_2^2$ et $(c|c) = c_1^2 + c_2^2$, $b \wedge c = b_1c_2 - b_2c_1$ et ces polynômes sont invariants par le groupe orthogonal (groupe des isométries vectorielles) dans son action naturelle sur les polynômes, *via* les matrices.

Le premier point fondamental de la théorie des invariants, c'est qu'on sait déterminer explicitement **tous** les invariants. Dans le cas ci-dessus, ils s'expriment polynomialement à partir des produits et carrés scalaires $(b|c)$, $(b|b)$ et $(c|c)$. C'est un résultat algébrique pas très difficile mais pas non plus trivial. En gros, il dit qu'un triangle est déterminé, à isométrie près, par les longueurs de deux côtés et l'angle qu'ils entourent : c'est le premier cas d'égalité des triangles ! Pour le groupe des rotations il y a, en plus, le polynôme $b \wedge c = b_1c_2 - b_2c_1$ (qui correspond au sinus de l'angle orienté ou encore à l'aire algébrique du triangle $abc$).
On a donc déjà la réponse à la question 1) ci-dessus : les invariants distance et angle sont bien, dans le cas de la géométrie euclidienne d'un triangle, les seuls possibles.

Dans le cas de la géométrie affine du plan, avec deux points $b$ et $c$ ($a$ étant toujours pris comme origine) il y a un seul invariant pour les transformations affines de déterminant 1 qui est le déterminant $b \wedge c = b_1c_2 - b_2c_1$ (qui correspond comme on l'a vu à l'aire algébrique du triangle $abc$), cf. [P].

*h) Relations et théorèmes.*

Le résultat fondamental qui relie la théorie des invariants à la géométrie affirme, dans le cas que nous considérons, que tous les théorèmes de la géométrie euclidienne d'un triangle $a, b, c$ (alignement, concourance, cocyclicité, etc.) s'expriment comme des **relations**, polynomiales, entre les invariants ci-dessus, cf. [P] pour des détails sur le cas affine.
Pour illustrer ce principe, voici la démonstration en termes de relations entre invariants, de la concourance des médianes et des hauteurs du triangle.

*Exemple 1 : les médianes.*

On considère un triangle $A, B, C$. Dire que l'origine $O$ du plan est sur la médiane de $[BC]$ signifie qu'on a $\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. En effet, si $A'$ est le milieu de $[BC]$, le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu) et la nullité du produit vectoriel assure que les points $O, A, A'$ sont alignés. On peut encore écrire cela, en revenant aux notations précédentes, $a \wedge (b + c) = 0$. Or, on a la relation

$$a \wedge (b + c) + b \wedge (c + a) + c \wedge (a + b) = 0$$

qui traduit la bilinéarité et l'antisymétrie du déterminant, de sorte que si on prend pour origine l'intersection de deux des médianes, elle est aussi sur la troisième.

*Exemple 2 : les hauteurs.*

(2) Voir aussi [P] Bulletin APMEP.

On considère un triangle $a, b, c$. Dire que l'origine $o$ du plan est sur la hauteur issue de $b$ signifie qu'on a $(b|a-c) = 0$. Or on a la relation

$$(b|a-c) + (c|b-a) + (a|c-b) = 0$$

qui traduit la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, de sorte que si on prend pour origine l'intersection de deux des hauteurs elle est aussi sur la troisième.

*i) Relations et théorèmes, suite.*

L'intérêt d'avoir identifié les théorèmes d'une géométrie et les relations entre les invariants de cette géométrie vient alors du second résultat fondamental de la théorie des invariants. En effet, ce résultat affirme que non seulement les invariants sont connus, mais que les relations entre eux le sont aussi. Par exemple, dans le cas de la géométrie euclidienne plane avec seulement deux points $b, c$ en plus de l'origine, il n'y en a aucune pour les invariants $(b|b)$, $(c|c)$ et $(b|c)$ relatifs à $O(2)$ (hormis la bilinéarité et la symétrie). Dans le cas de $O^+(2)$ où l'on a l'invariant supplémentaire $b \wedge c$, elles se déduisent toutes de la relation

$$(b|c)^2 + (b \wedge c)^2 = (b|b)(c|c), \tag{1}$$

(identité de Lagrange) qui n'est autre que la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

De fait, on constatera en faisant quelques calculs que cette relation magique donne beaucoup de résultats classiques de géométrie euclidienne. Ainsi la relation fondamentale (1) ci-dessus est exactement la traduction analytique, dans le cas du triangle $a, b, c$ avec $a = (0, 0)$, de la célèbre propriété de la droite d'Euler : le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle $a, b, c$ sont alignés. De même, le théorème affirmant que le symétrique de l'orthocentre du triangle par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit, que nous avons étudié ci-dessus, est lui aussi une traduction de la relation (1). On perçoit bien ici le fait que Bourbaki signale dans le texte cité plus haut : il n'est pas évident de déterminer à quel phénomène géométrique va correspondre une relation donnée. De plus, et c'est la richesse de la géométrie, une même relation algébrique simple peut recouvrir une multitude de situations géométriques.

*j) Invariants et syzygies, encore un exemple.*

Cet exemple, qui est peut-être plus convaincant encore que ceux qui portent sur la géométrie euclidienne, est issu de la géométrie anallagmatique, géométrie de l'inversion ou de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (le plan complexe plus un point à l'infini) qui permet de voir droites et cercles dans leur ensemble (les droites passant par le point à l'infini). Le groupe correspondant est le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies (à coefficients complexes) $z \mapsto \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, avec les conventions usuelles sur le point à l'infini.
Un invariant bien connu de ce groupe est le birapport :

$$[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a},$$

avec là encore les conventions usuelles sur le point à l'infini. Lorsque $a, b, c, d$ sont 4 points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}$, il est facile de calculer l'argument de $[a, b, c, d]$ en termes

d'angles orientés de vecteurs et on en déduit que les points $a, b, c, d$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.
Or, si $a, b, c, d, p, q, r, s$ sont 8 indéterminées, on a une relation, évidente mais splendide, entre les birapports :

$$[abrs]\,[bcps]\,[caqs]\,[pqcd]\,[qrad]\,[rpbd] = 1. \tag{2}$$

Cette relation entre les invariants ("le théorème des six birapports") est source de nombreux théorèmes géométriques ; citons par exemple le suivant dans lequel on a pris $s = \infty$ :
*Soient $a, b, c$ trois points non alignés du plan et $p, q, r$ trois points distincts de $a, b, c$, situés respectivement sur les droites $bc, ca, ab$. Alors les cercles circonscrits aux triangles $cpq, brp, aqr$ ont un point commun $d$ (appelé le "pivot").*
Il y a une kyrielle de résultats classiques et spectaculaires qui ne sont que des avatars de la formule (2) : le théorème de la droite de Simson, celui des 6 cercles de Miquel. Là encore, comme avec la formule (1), on a vraiment l'impression que tous les théorèmes de cocyclicité-alignement de ce style ne sont que des variantes de cette relation entre les birapports.

*k) Conclusion.*

Nous retiendrons de l'étude précédente l'importance des invariants associés à un groupe de transformations. Dans le cas de la géométrie euclidienne plane cela veut dire l'importance cruciale des notions de produit scalaire et vectoriel (si l'on est dans un cadre vectoriel) ou encore, à un niveau plus élémentaire, des notions de longueur, angle et aire (si l'on est dans le cadre usuel du plan régi par les axiomes d'Euclide).
Bien entendu, dans la plupart des exemples discutés ci-dessus on peut aussi résoudre les problèmes en utilisant les transformations. L'avantage de l'utilisation des invariants est double :
• ils permettent de donner certaines preuves plus tôt (au collège) lorsqu'on ne dispose pas encore de tout l'attirail des transformations,
• les démonstrations par les invariants sont souvent plus naturelles que celles par les transformations.

## 3. Cas d'égalité et de similitude des triangles.

Un mot sur le vocabulaire tout d'abord. L'appellation "cas d'égalité" est évidemment mauvaise. Les canons de langage actuels (selon lesquels égalité signifie identité) imposent de parler plutôt de cas d'isométrie (ou de congruence comme disait Hilbert et comme disent les italiens). ([3]) Je considère pour ma part que l'abandon des cas d'isométrie est une des erreurs importantes commises au moment de la réforme des maths modernes, et ce, même si on pense la géométrie en termes de transformations, dans la ligne du programme d'Erlangen. On peut dire sans exagération qu'en les supprimant on a privé plusieurs générations d'élèves de l'outil le plus simple pour faire de la géométrie.

([3]) En revanche je ne vois pas pourquoi le GTD a préféré parler de triangles de même forme plutôt que de triangles semblables.

*a) Justification théorique.*

Un problème crucial qu'on rencontre lorsqu'un groupe $G$ opère sur un ensemble $X$ est de dire s'il est transitif, c'est-à-dire si on peut transformer n'importe quel élément de $X$ en n'importe quel autre par l'action du groupe. Par exemple, dans le plan, le groupe des isométries opère transitivement sur l'ensemble des points. Il est aussi transitif sur l'ensemble des demi-droites, puisqu'on peut commencer par transporter une origine sur l'autre par translation, puis effectuer une rotation pour amener une demi-droite sur la deuxième. En revanche, il n'est pas transitif sur l'ensemble des segments, ou sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des couples de demi-droites de même sommet.

Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre, sans être obligé d'exhiber la transformation qui fait effectivement le travail. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :
*Deux éléments de $X$ peuvent être échangés par l'action de $G$ (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.*
Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.
Dans un autre domaine, on peut passer d'une matrice à une autre par changement de base si et seulement si elles ont même réduite de Jordan. (cf. aussi l'invariant anallagmatique, le birapport, etc.)

S'agissant des triangles, on peut les échanger par une application affine, mais pas, en général, par une isométrie.
Or, que font les cas les cas d'"égalité" des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci. En un certain sens, c'est l'analogue du sketch de Pierre Dac et Francis Blanche :
*Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle sur cet autre ?*
— *Oui,*
— *Vous pouvez le faire ?*
— *Oui,*
— *Il peut le faire !*
Je vais donner des exemples de cette situation ci-dessous et j'espère vous convaincre de l'efficacité des cas d'isométrie des triangles, comparée à l'usage direct des transformations. En vérité, dans le plan, comme on connaît toutes les isométries, il est souvent assez facile de repérer quelle isométrie employer. En revanche, ce qui est plus délicat c'est de prouver qu'elle fait bien ce qu'on suppose. On y arrive, mais c'est souvent lourd et, presque toujours, inutile.
Le même argument vaut évidemment pour les similitudes, avec, dans ce cas, deux avantages :
• le critère (notamment celui avec deux angles égaux ) est d'une simplicité biblique,

• on connaît encore toutes les similitudes planes mais c'est déjà nettement plus compliqué de repérer celle qui va faire le travail que dans le cas des isométries.

*b) Exemples.*

Voici quelques exemples, très simples, pour illustrer ce qui vient d'être dit.

*Exemple 1.*

*Soit $ABC$ un triangle isocèle de base $[BC]$. La médiatrice de $[AC]$ coupe $(BC)$ en $D$ que l'on suppose extérieur à $[BC]$. On trace $(AD)$ et on porte une longueur $AE = BD$ sur $(AD)$, de l'autre côté de $A$ par rapport à $D$. Montrer que $CDE$ est isocèle.*

On montre facilement que les triangles $ADB$ et $CEA$ sont isométriques en on conclut grâce à l'égalité des angles $\widehat{CEA}$ et $\widehat{ADB}$.

Dans cet exemple, il n'est pas difficile de repérer la transformation pertinente : il s'agit de la rotation $\rho$ de centre $O$ (centre du cercle circonscrit à $ABC$) et d'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$, qu'on peut encore voir comme composée des symétries d'axes $(OA)$ et $(OD)$ si l'on préfère. Ce n'est pas difficile, mais il faut déjà le voir. De plus, de quelque manière qu'on prenne les choses, il n'est pas tout à fait évident de montrer qu'on a bien $\rho(D) = E$ (il faut utiliser l'égalité des angles en $\widehat{DBA}$ et $\widehat{EAC}$, comme lorsqu'on utilise le cas d'isométrie, et en faisant attention à leur sens). Bref, cet exemple illustre bien l'avantage d'utiliser les cas d'isométrie : il n'est pas besoin d'expliciter la transformation adéquate, ni de montrer qu'elle fait bien ce qu'on pense.

*Exemple 2.*

*Soit $ABC$ un triangle. On suppose que les hauteurs $BB'$ et $CC'$ sont "égales". Montrer que $ABC$ est isocèle.*

Le cas d'isométrie des triangles rectangles permet de montrer que les triangles rectangles $BC'C$ et $CB'B$ sont isométriques et on conclut par l'égalité des angles à la base du triangle $ABC$.
Une solution alternative encore plus simple est d'utiliser les aires.
On peut aussi arriver au résultat en utilisant directement les transformations, mais c'est plus ardu. En effet, il est clair que la figure est symétrique par rapport à la médiatrice de $[BC]$, mais ce n'est pas tout à fait évident à montrer. Soit $\sigma$ cette symétrie. On a $\sigma(B) = C$. On considère le demi-cercle de diamètre $[BC]$. Il est invariant par $\sigma$ et contient $B'$ et $C'$. D'autre part, par $\sigma$, les cercles de centres $B$ et $C$ et de rayon $BB'$ et $CC'$ s'échangent. On en déduit qu'on a $\sigma(B') = C'$. L'orthocentre du triangle est fixe par $\sigma$ donc est sur la médiatrice de $[BC]$ qui est donc aussi hauteur et on a gagné, mais c'est bien compliqué, non ?

*Exemple 3.*

Il s'agit de ce que nos amis Suisses appellent le théorème de Thalès (vérité en deçà du Jura, erreur au delà !), c'est-à-dire le résultat très élémentaire suivant :

*Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ et $AH$ la hauteur issue de $A$. Alors on a l'égalité $AH^2 = BH \times CH$.*

Une démonstration de ce résultat par les transformations est possible : on effectue d'abord une rotation de centre $H$ et d'angle $\pi/2$ qui amène $A$ en $A' \in (BC)$ et $C$

en $C' \in (AH)$. Les droites $(AB)$ et $(A'C')$ sont alors parallèles, on a $AH = A'H$ et $CH = C'H$ et on conclut par Thalès (le nôtre) ou une homothétie. Pour montrer le parallélisme, si l'on ne dispose pas de la transformation vectorielle associée à la rotation, on utilise un argument d'angles : on a $\widehat{HAC} = \widehat{HBA}$ (même complémentaire) et $\widehat{HAC} = \widehat{HA'C'}$ (conservation de l'angle par rotation), de sorte que les angles en $B$ et $A'$ sont "correspondants" et on en déduit le parallélisme.

Cette méthode, tout à fait correcte, présente à mon avis deux défauts. D'abord, elle nécessite une construction supplémentaire et cela n'est jamais facile pour les élèves, ni peut-être pour les professeurs. Ensuite, pour montrer le parallélisme, on passe par l'égalité d'angles $\widehat{HAC} = \widehat{HBA}$. Mais cette seule égalité d'angles donne à elle seule le résultat, soit qu'on invoque la similitude des triangles $ABH$ et $AHC$ (deux angles égaux), soit, ce qui revient essentiellement au même, qu'on écrive l'égalité des tangentes de $\widehat{CAH}$ et $\widehat{ABH}$.
On voit sur cet exemple l'intérêt de l'usage des invariants et/ou des cas de similitude.

*Exemple 4.*

*Soit $ABC$ un triangle isocèle en $A$. Une droite passant par $A$ coupe le côté $[BC]$ en $D$ et le cercle circonscrit en $E$. Montrer qu'on a $\overline{AD}\,.\,\overline{AE} = AB^2$.*

C'est immédiat en montrant que les triangles $ABD$ et $AEB$ sont semblables. En revanche ce n'est pas évident d'exhiber la transformation qui donne le résultat. Il s'agit en effet de la similitude indirecte, composée de la symétrie d'axe la bissectrice de $\widehat{BAE}$ et de l'homothétie de centre $A$ et de rapport $AB/AD$, mais pour le voir il faut construire les points $B'$ et $D'$ symétriques de $B$ et $D$ par rapport à la bissectrice et il n'est pas encore évident de montrer que $(B'D')$ est parallèle à $(BE)$ (il faut utiliser l'égalité des angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{ADB}$ de toutes façons alors que cette égalité est l'unique ingrédient du cas de similitude !).

*Remarque.* Il est clair que l'utilisation des cas d'isométrie, et plus encore de similitude, nécessite une certaine maîtrise de quelques manipulations élémentaires sur les angles : complémentaire, supplémentaire, lien avec le parallélisme, angle inscrit.

*c) Axiomatique, dièse et bémol.*

Il y a une autre raison qui plaide en faveur de l'utilisation des cas d'isométrie (voilà le dièse). On sait en effet qu'Euclide prétendait démontrer les cas d'isométrie, mais que la méthode de superposition qu'il utilisait n'était pas vraiment correcte (en fait, il admettait implicitement l'existence d'une transformation, ou d'un mouvement, cf. [Bk], qui amenait une demi-droite sur une autre). Dans la version de la géométrie euclidienne revue par Hilbert, les cas d'isométrie sont des axiomes (au moins le premier cas), sur lesquels repose tout le reste de la géométrie, y compris, ensuite, les aspects vectoriels.
Dans l'enseignement d'avant les maths modernes les cas d'"égalité" fournissaient aussi un fondement de la géométrie (le système d'axiomes d'Euclide y était implicitement sous-jacent), imparfait certes, mais sur lequel là-aussi les autres résultats reposaient à peu près solidement. Je continue à penser que, sur le plan de la cohérence de l'enseignement, la situation était finalement plus claire que celle qui prévaut actuellement. (même si on peut aussi fonder la géométrie sur la symétrie axiale, cf. [Gu] ou [CF]).

Voici maintenant le bémol : attention, il faut se garder, en la matière de commettre l'erreur inverse de celle commise autrefois et de sous-estimer le rôle des transformations pour retomber dans le travers que dénonçait Choquet en 1961 (cf. [Cho]) :
*On rencontre fréquemment la situation paradoxale suivante : le professeur étudie avec ses élèves une figure dotée d'un axe de symétrie évident ; pour établir l'égalité de deux segments, la tendance naturelle de l'élève est d'utiliser cette symétrie ; son professeur le lui interdit, au profit d'un cas d'égalité de triangles. Ne parlons pas de la faute pédagogique ainsi commise ; mais, d'une part, le professeur oublie que sa démonstration des cas d'égalité était basée implicitement sur la symétrie ; d'autre part, il présente les mathématiques comme un jeu vain, dans lequel des propriétés évidentes doivent être démontrées à partir d'autres propriétés qui le sont beaucoup moins.*
Les arguments contenus dans ce texte, qui sont tout à fait recevables et expliquent en partie la position prise à l'époque, doivent nous guider pour trouver une voie médiane entre le "tout transformations" et le "tout cas d'égalité".

*e) Discussion.*

On aura compris que je suis partisan de l'usage des cas d'isométrie et de similitude, mais, comme pour le bon vin, avec modération, et sans négliger pour autant les transformations.
En fait, ce que je propose comme "doctrine" (avec toutes les précautions que l'on imagine) c'est le principe suivant qu'on a vu à l'œuvre dans les exemples ci-dessus :
• Il est naturel d'utiliser les transformations quand elles sont évidentes (c'est-à-dire quand on les voit et qu'on sait prouver qu'elles font bien ce qu'on voit !). Sur ce point je souscris à l'argument de Choquet, il est stupide de ne pas s'en servir alors.
• Sinon, si on ne les aperçoit pas ou s'il n'est pas évident de montrer leur effet (et cela dépend bien entendu des aptitudes et des connaissances de chacun), plutôt que d'essayer à toute force de les faire apparaître, il est toujours possible et souvent plus simple d'utiliser les invariants et les cas d'isométrie et de similitude.

Je suis donc satisfait que les nouveaux programmes de seconde prévoient de réintroduire ces outils dans notre enseignement de la géométrie, car cela permet une prise de conscience des professeurs. Cependant, le moment choisi me paraît trop tardif. En particulier, je pense que ces résultats seraient d'excellents outils dans les classes de collège. En effet, même s'il est vrai qu'on peut se passer des cas d'isométrie dès lors qu'on a à sa disposition toutes les transformations, leur avantage, si on en dispose de manière précoce est de permettre de montrer beaucoup plus de résultats. Mon opinion est qu'on peut les admettre à ce niveau du collège, avec une justification intuitive, pas très éloignée de ce que disait Euclide (la superposition des figures) et qu'ils permettent alors de faire beaucoup de géométrie. Cependant, avant de proposer une telle introduction, une réflexion supplémentaire me semble obligatoire, qui prenne en compte à la fois les aspects mathématique, épistémologique et didactique, mais aussi la formation des professeurs.