Quelques exercices de géométrie

Daniel PERRIN

Introduction

Les exercices qui suivent sont pour la plupart très classiques. Je les ai utilisés dans plusieurs textes que j'ai écrits sur la géométrie, voir les références. Je les pose délibérément ici sans donner d'indication de solution, afin que chacun puisse essayer de trouver son chemin (et il y en a souvent plusieurs possibles). Dans tous les cas, on essaiera de discuter les points suivants :

• Quels sont les prérequis des diverses méthodes, et donc à quels niveaux peuvent-elle être envisagées ?

• Quels sont les intérêts et les difficultés mathématiques et didactiques des diverses méthodes ?

• Comment peut-on éventuellement donner des indications à des élèves pour faire fonctionner ces méthodes ?

J'ai mis une étoile à certains de ces exercices que je trouve particulièrement intéressants. On pourrait commencer par examiner ceux là. C'est évidemment subjectif, et vous pouvez avoir des avis très différents.

1 Autour des cas d'isométrie et des transformations

1.1 *Exercice.* 1) Caractériser la médiatrice d'un segment $[AB]$ comme l'ensemble des points équidistants de A, B en utilisant les transformations ou les cas d'isométrie.

2) Caractériser la bissectrice d'un angle $\widehat{AOB}$ comme l'ensemble des points de l'angle équidistants des côtés en utilisant les transformations ou les cas d'isométrie.

Pour la réciproque on pourra prouver que le premier cas d'égalité "frauduleux" (deux triangles ABC et $A'B'C'$ qui vérifient $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$ sont isométriques) est valable si l'angle en A est obtus ou droit.

1.2 *Exercice.* (*)

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte sur (AB), à l'extérieur du triangle, un point E avec $BE = AB - BC$ et sur (BC), à l'extérieur du triangle du côté de C, un point D avec $CD = AB - BC$. Que peut-on dire du triangle ADE ?

1.3 *Exercice.* Soit ABC un triangle isocèle en A. La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D que l'on suppose extérieur à $[BC]$. On trace (AD) et on porte une longueur $AE = BD$ sur (AD), de l'autre côté de A par rapport à D. Que peut-on dire du triangle CDE ?

Question subsidiaire À quelle condition le point D est-il dans le segment $[BC]$? Comment faut-il modifier l'énoncé dans ce cas ?

1.4 *Exercice.* (*)

Dans un triangle ABC, les hauteurs BB' et CC' sont égales. Que peut-on dire de ce triangle ? (On peut produire au moins quatre démonstrations, deux par les cas d'isométrie, une par les transformations et une autre plus simple encore ...)

1.5 *Exercice.* Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit, à l'extérieur de $ABCD$, les triangles équilatéraux ADP et ABQ. Que peut-on dire du triangle PQC ?

1.6 *Exercice.* Un pentagone convexe $ABCDE$ dont les diagonales sont égales est-il régulier ?

Et si l'on suppose en plus qu'on a $AB = BC = CD = DE = EA$?

Et si l'on suppose en plus que A, B, C, D, E sont sur un même cercle ?

Et si l'on suppose en plus que les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, $\widehat{DEA}$, $\widehat{EAB}$ sont égaux ?

1.7 *Exercice.* (*)

Soit ABC un triangle. Construire, sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ et à l'extérieur du triangle, deux triangles rectangles isocèles PAB et QAC. Soit M le milieu de $[BC]$. Que peut-on dire du triangle PMQ ?

1.8 *Exercice.* On considère un quadrilatère croisé $ABCD$ dont les côtés $[BC]$ et $[AD]$ se coupent en O. On suppose qu'on a $AB = CD$ et $AD = BC$. Montrer qu'on a $OA = OC$ et $OB = OD$.

1.9 *Exercice.* Soit ABC un triangle équilatéral.

1) Soient A', B' et C' les symétriques de B par rapport à C, de C par rapport à A et de A par rapport à B respectivement. Que peut-on dire du triangle $A'B'C'$?

2) Les droites (BB') et (CC'), (CC') et (AA'), (AA') et (BB') se coupent respectivement en P, Q, R. Que peut-on dire du triangle PQR ?

Variante On suppose que A', B', C' sont sur les droites (BC), (CA), (AB), à l'extérieur du triangle, et à une même distance de C, A, B respectivement. Mêmes questions.

1.10 *Exercice.* Soit ABC un triangle. La médiatrice de $[BC]$ coupe la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ en D. On appelle E et F les projetés orthogonaux de D sur $[AB]$ et $[AC]$. Montrer qu'on a $AE = AF$, $BE = CF$ et calculer ces longueurs en fonction de AB et AC.

2 Autour des cas de similitude

2.1 *Exercice.* **Dans le triangle rectangle** (*)

1) Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A. Montrer les égalités de moyennes géométriques : $AH^2 = BH \times CH$, $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times CB$ de plusieurs manières (en utilisant les triangles semblables, la trigonométrie, Pythagore, le produit scalaire, etc.)

2) On suppose qu'on a montré 1) en utilisant les triangles semblables. En déduire une preuve de Pythagore.

3) Construire un carré d'aire égale à celle d'un rectangle donné.

4) On donne deux longueurs m et s. Construire des longueurs x, y telles que l'on ait $s = x + y$ et $m^2 = xy$. Discuter

2.2 *Exercice.* **Le triangle** $36 - 72 - 72$ (*)

Soit ABC un triangle dont les angles en A, B, C sont respectivement égaux à $36, 72$ et 72 degrés. On pose $a = BC$ et $b = AB = AC$. On construit $D \in [AC]$ tel que $AD = BD$. Calculer les angles de BDC et en déduire le rapport b/a.

Comment peut-on construire un tel triangle ? Comment peut-on en déduire la construction du pentagone régulier ?

2.3 *Exercice.* Soit $ABCD$ un carré de centre E, F le milieu de $[DE]$ et G celui de $[AB]$. Que peut-on dire du triangle CFG ?

2.4 *Exercice. (Cet exercice utilise le théorème de l'angle inscrit.)*

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R et A un point non situé sur Γ. Deux droites Δ et Δ' passant par A coupent respectivement Γ en B, C et B', C'. Montrer qu'on a $\overline{AB}\,\overline{AC} = \overline{AB'}\,\overline{AC'}$. (À défaut de mesures algébriques on montrera le résultat avec des longueurs.)

2.5 *Exercice. (Cet exercice utilise le théorème de l'angle inscrit.)*

Soit ABC un triangle isocèle en A et D un point de (BC). La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit à ABC en E. Montrer l'égalité $AD \times AE = AB^2$.

On voit dans ces deux derniers exercices que l'usage des triangles semblables est beaucoup moins efficace si l'on ne dispose pas du théorème de l'angle inscrit.

3 Plaidoyer pour les transformations

3.1 *Exercice.* (*)

Construire un carré $ABCD$, de sens direct, dont le centre O est donné et tel que les points A et B soient respectivement sur deux droites données Δ_A et Δ_B.

3.2 *Exercice.* On se donne deux droites parallèles Δ et Δ' et deux points A et B situés de part et d'autre de la bande limitée par Δ et Δ'. Construire les points $M \in \Delta$ et $M' \in \Delta'$ tels que (MM') soit perpendiculaire à Δ et qui satisfont en outre l'une des propriétés suivantes :

i) $AM = BM'$.

ii) (AM) perpendiculaire à (BM').

iii) $AM + MM' + M'B$ est minimum.

3.3 *Exercice.* Construire un triangle équilatéral dont les trois sommets sont sur trois cercles concentriques donnés.

4 Utilisation des angles

4.1 *Exercice.* (*)

Soit $\mathcal{K} = ABCD$ un carré. On construit à l'intérieur de $\mathcal{K}$ un triangle équilatéral ABE et à l'extérieur de $\mathcal{K}$ un triangle équilatéral BCF. Que peut-on dire des points D, E, F ?

4.2 *Exercice. Cet exercice m'a été suggéré par Bernard Parzysz qui en propose une solution purement visuelle.*

On considère un triangle équilatéral ABC et un point M intérieur. On prend $P \in [BC]$, $Q \in [CA]$ et $R \in [AB]$ tels que (MP), (MQ) et (MR) soient respectivement parallèles à (AB), (BC) et (CA). Que vaut la somme $MP + MQ + MR$?

4.3 *Exercice. Cet exercice utilise le théorème de l'angle inscrit.*

Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés de ABC sont sur le cercle circonscrit au triangle.

5 Avec les aires

On renvoie à [9] pour toutes précisions. Les résultats suivants peuvent par exemple être prouvés avec la formule *base* $\times$ *hauteur*$/2$.

• **(Lemme du demi-parallélogramme)** Les diagonales d'un parallélogramme le partagent en deux triangles de même aire.

• **(Lemme du trapèze)** Deux triangles de même base et dont les sommets sont situés sur une parallèle à la base ont même aire.

• **(Lemme des proportions)** Le rapport des aires de deux triangles qui ont un même sommet et des bases, alignées est égal au rapport des bases.

En particulier, si ABC est un triangle et A' un point de $[BC]$, les aires $\mathcal{A}(ABA')$ et $\mathcal{A}(ACA')$ sont égales si et seulement si A' est le milieu de $[BC]$.

• **(Lemme du chevron)** Soit ABC un triangle, M un point du plan. On suppose que (AM) coupe (BC) en $A' \neq B, C$. Alors on a $\dfrac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ACM)} = \dfrac{A'B}{A'C}$.

5.1 *Exercice.* Montrer le théorème de Thalès en utilisant les aires.

5.2 *Exercice.* (*)

Montrer le concours des médianes d'un triangle en utilisant les aires (utiliser le lemme du chevron).

5.3 *Exercice.* Soit ABC un triangle. Une droite ne passant pas par les sommets coupe respectivement (BC), (CA) et (AB) en A', B', C'. Montrer l'égalité : $\dfrac{A'B}{A'C} \times \dfrac{B'C}{B'A} \times \dfrac{C'A}{C'B} = 1$. Réciproque ?

5.4 *Exercice.* Soit ABC un triangle et M un point du plan non situé sur les côtés du triangle. Les droites (AM), (BM) et (CM) coupent respectivement les côtés (BC), (CA) et (AB) en A', B', C'.

Montrer l'égalité : $\dfrac{A'B}{A'C} \times \dfrac{B'C}{B'A} \times \dfrac{C'A}{C'B} = 1$. Réciproque ? (Attention, il y a un piège ...)

5.5 *Exercice.* Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ? Même question avec $AMCD$, AMB et BMC.

5.6 *Exercice.* Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, au tiers le plus proche de B, C, A. Les droites (BJ) et (CK), (CK) et (AI), (AI) et (BJ) se coupent respectivement en P, Q, R. Déterminer l'aire de PQR en fonction de celle de ABC.

5.7 *Exercice.* Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient I, J, K, L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ respectivement. Les droites (DI) et (AJ), (AJ) et (BK), (BK) et (CL), (CL) et (DI) se coupent respectivement en P, Q, R, S. Montrer que les quadrilatères $APSL$, $BQPI$, $CRQJ$ et $DSRK$ ont même aire.

5.8 *Exercice. Proposé par le journal Le Monde* Soit ABC un triangle. On prolonge les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, du côté de C, A, B respectivement, d'une longueur égale à leur moitié. On obtient un triangle DEF. Quel est le rapport entre les aires de DEF et ABC ? Les côtés du triangle initial recoupent ceux du grand triangle en des points P, Q, R respectivement. Préciser la position des points P, Q, R dans $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

Références

[1] Duperret Jean-Claude, Perrin Daniel, Richeton Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 472-497, 2001.

[2] Kahane Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 2002.

[3] Perrin Daniel, *L'exemple de la géométrie affine du collège, vu au travers du programme d'Erlangen et de la théorie des invariants*, Bull. APMEP 431, 758-784, 2000.

[4] Perrin Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations*, Repères IREM, 53 : 91–110, 2003.

[5] Perrin Daniel, *La géométrie : un domaine hors programme*, Bull. APMEP, 496, 587–600, 2011.

[6] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Introduction*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPintro.pdf`

[7] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Postface*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPostface.pdf`

[8] Perrin Daniel, *Problèmes ouverts : pourquoi et comment*, 2015
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/IREM2015/IREM2015redaction.pdf`

[9] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.