L'enseignement de la géométrie au collège et au lycée

Daniel PERRIN

Ma foi, c'est fait de moi, car la CORFEM
M'a commandé de lui faire un rondeau.
Cela me met en une peine extrême.
Quoi ! treize vers, sept en eau, six en ème !
Ah, que voilà un bien pesant fardeau.
En voilà six pourtant en un faisceau.
Formons-en sept en invoquant Brousseau ;
Et puis mettons, par quelque stratagème,
Ma foi, c'est fait.
Si je pouvais encor de mon cerveau
Tirer cinq vers, l'ouvrage serait beau.
Mais cependant me voilà dans l'onzième ;
Et si je crois que je fais le douzième ;
En voilà treize ajustés au niveau.
Ma foi, c'est fait.

Librement inspiré de Voiture (1597-1648)

Introduction

Un texte sur la géométrie, encore !

Que le lecteur se rassure, ce n'est pas un rondeau que m'a commandé la CORFEM, mais bien un texte sur la géométrie. Il n'empêche que je suis moi aussi dans une peine extrême, non que je n'aie quelque idée sur le sujet, mais au contraire qu'il me semble avoir déjà tout dit. En effet, j'ai beaucoup, beaucoup écrit sur la géométrie, à la fois sur le plan théorique (voir [15] et toute sa suite) sur l'enseignement de la géométrie (voir [5], [9], [13], [14] ou [21] entre autres) et sur la formation des maîtres (voir [10] ou [22] par exemple). D'ailleurs, le lecteur peut trouver, à bon droit, que cet article n'est qu'un patchwork de tous ces textes. C'est vrai, mais c'est délibéré, en manière de vengeance, puisqu'il semble qu'on doive répéter sans cesse les mêmes discours pour qu'enfin on les entende. À cet égard, l'exemple des cas d'isométrie des triangles est emblématique. Certes, ils ont fini par revenir au collège dans les programmes de 2015, mais pourquoi a-t-il fallu attendre tout ce temps, alors que tous les arguments en leur faveur étaient déjà développés dès 2002 dans le rapport de la commission Kahane (voir [9] p. 123) ?

Cette mauvaise humeur étant évacuée, je vais reprendre la discussion sur ce thème, en essayant d'éviter trop de redites. Le lecteur qui trouverait que ce texte manque d'exemples en trouvera à foison dans les références.

Quelques principes

• Je ne discute pas ici l'importance de l'enseignement de la géométrie, renvoyant sur ce point à [9] ou [21] dont je retiens trois points essentiels [1] :

a) La géométrie est utile à la fois dans les mathématiques, les autres sciences et dans la vie courante.

b) Le fait de penser géométriquement [2] est un apport essentiel, et pas seulement en mathématiques.

c) La géométrie reste un lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement [3].

• Je n'aborde pas non plus la problématique, essentielle pourtant, de la géométrie comme modélisation du plan et de l'espace. Cet aspect sera évoqué dans l'autre texte concernant la géométrie, dans ce même volume.

• Dans ce qui suit je parle presque exclusivement de géométrie plane, mais cela ne signifie pas que la géométrie dans l'espace ne soit pas essentielle. Pour mesurer les raisons de cette importance, voir [9], pour un aperçu des thèmes que l'on peut aborder en classe, voir [25] Ch. 8, 9, 10.

• Mon point de départ est l'enseignement de la géométrie "élémentaire" (au sens de [9], c'est-à-dire celle qui est ou a été enseignée dans un passé pas trop lointain, disons depuis 1960, au collège ou au lycée). Cela concerne donc essentiellement la géométrie euclidienne, mais j'évoquerai aussi d'autres domaines (géométrie projective, géométries non euclidiennes, etc.).

• L'existence des programmes est une donnée incontournable, mais les conditions qui président à leur élaboration sont beaucoup trop contingentes

1. Je ne parle ici ni de la beauté de la géométrie, ni du plaisir qu'on peut retirer de son étude, mais je n'en pense pas moins.

2. Dans [15] je propose le parallèle suivant : *La géométrie est à l'algèbre ce que le cinéma est au livre, plus de choses sont dites parfois dans un seul plan (dans une seule figure) que dans de longs discours (de longs calculs).*

3. Comme le dit Alain Connes : *J'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant sur un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.*

pour qu'ils puissent être le point de départ d'une étude rationnelle du sujet. Je les évoquerai donc parfois, éventuellement pour les critiquer, mais le texte qui suit se veut essentiellement indépendant des programmes.

• L'un de mes soucis majeurs est la formation des maîtres (dont je m'occupe depuis bientôt 40 ans) et le troisième paragraphe ci-dessous y est entièrement consacré.

• Enfin, je rappelle que je suis un mathématicien, pas un didacticien, même si je ne nie pas mes accointances de ce côté. Ma légitimité pour parler de géométrie est donc une réflexion essentiellement mathématique, avec des nuances historiques et épistémologiques, doublée d'une grande expérience de son enseignement, notamment en formation des enseignants.

Plan de l'article

Ce texte comprend trois parties.
1) Une réflexion théorique sur la géométrie.
2) Conséquences pour l'enseignement.
3) Conséquences pour la formation des maîtres.

Le lecteur est averti que la première partie, de nature essentiellement mathématique, est sans doute un peu aride, mais c'est elle qui justifie, au moins partiellement, les positions prises dans les parties suivantes.

1 Une réflexion théorique sur la géométrie

Pour des précisions sur ce sujet, le lecteur ira lire l'introduction [15] de mon (projet de) livre et, s'il est courageux, la suite.

1.1 Programme d'Erlangen, transitivité, invariants

1.1.1 Erlangen

Chacun peut avoir son idée de la nature de la géométrie et la profusion d'adjectifs qui peuvent suivre ce mot légitime ces différentes visions. Il est donc nécessaire de faire des choix et de les expliciter. En ce qui me concerne, et c'est largement lié à ma formation mathématique initiale, plutôt tournée vers l'algèbre, j'adhère à la vision de Klein, telle qu'elle est exposée dans son fameux programme [4] d'Erlangen [5] [11] : une géométrie consiste, pour l'essen-

4. Il s'agit de la thèse de Felix Klein, soutenue en 1872 dans cette ville.

5. Cette réflexion sur le programme d'Erlangen peut sembler bien théorique. On verra plus loin qu'elle permet d'éclairer l'enseignement de la géométrie et de guider la formation

tiel, en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X, autrement dit d'un groupe G opérant sur X. Par exemple, ce groupe est celui des isométries (affines) pour la géométrie euclidienne, ou des transformations affines pour la géométrie du même nom, ou encore des homographies pour la géométrie projective.

Ce souci d'unification, qui fait suite à l'explosion des géométries du XIX-ième siècle (géométries projective, anallagmatique, non euclidiennes, etc.), permet d'abord de **classifier** les propriétés géométriques selon le groupe qui les laisse invariantes, ainsi que le dit Klein : *étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe* (voir [11] p.7).

Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, le théorème de Pappus [6], qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement, est un théorème projectif, tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une **niche écologique privilégiée**, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et, souvent, où il se démontre avec le plus de facilité.

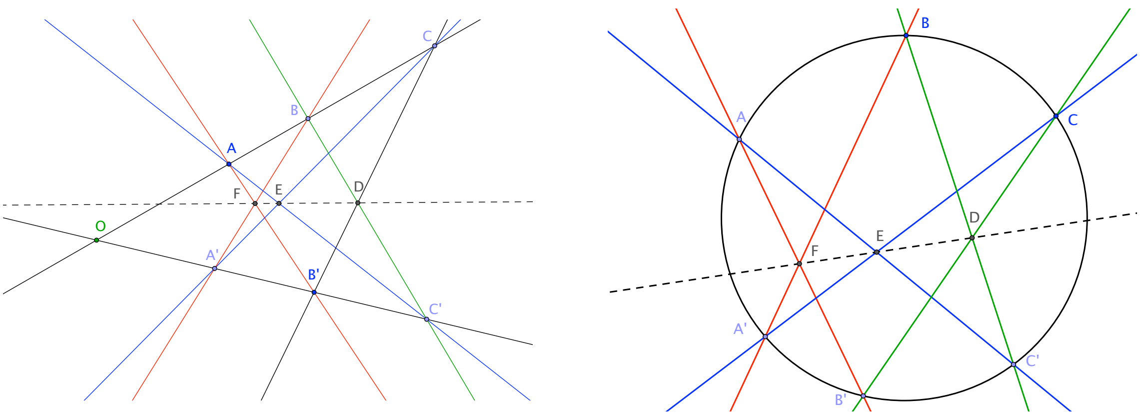

FIGURE 1 – Les théorèmes de Pappus et de Pascal (D, E, F sont alignés)

C'est particulièrement clair sur l'exemple du théorème de Pascal (voir figures 1 et 2) qui peut s'énoncer avec un cercle et se démontrer en utilisant le théorème de l'angle inscrit (ce serait donc un théorème euclidien ?).

des maîtres, voir 1.1.3 et 3.3.

6. Voir Figure 1. Les points A, B, C et A', B', C' sont alignés, les droites (BC') et (CB') se coupent en D, (CA') et (AC') en E, (AB') et (BA') en F. Alors D, E, F sont alignés. Pour Pascal, A, B, C, A', B', C' sont sur un cercle mais la suite est identique.

Pourtant, ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité puisqu'il vaut aussi pour une ellipse (ce serait donc un théorème affine ?). Mais il vaut aussi pour une parabole ou une hyperbole (finalement c'est un théorème projectif !). C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'il est le plus facile à prouver ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est ici débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles. On peut soit utiliser **l'invariant** fondamental associé à une conique projective : le birapport, soit prouver le résultat dans le cas euclidien et utiliser un argument de **transitivité** (voir plus loin) pour passer au cas général : il existe une homographie qui transforme un cercle en une conique quelconque. (Cette méthode est essentiellement celle de Pascal). On consultera au besoin :
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Perrin-Pascal.pdf`

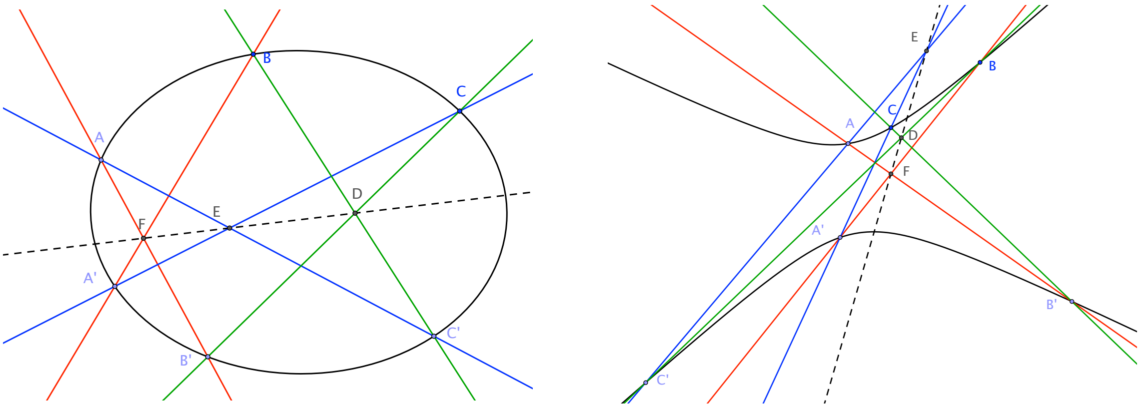

FIGURE 2 – Le théorème de Pascal (suite)

1.1.2 Transitivité et retour à Euclide

Dans la vision de la géométrie à laquelle je souscris, on suppose toujours vérifiée une propriété **d'homogénéité** : les objets de la géométrie (points, droites, etc.) doivent être identiques, quel que soit l'endroit de l'espace où ils se trouvent, ce qui signifie qu'il existe une transformation du groupe qui peut les transporter l'un sur l'autre. En termes mathématiques, on demande que le groupe soit **transitif** sur ces objets. Pour moi, cette propriété de transitivité est constitutive de la géométrie. On peut, bien entendu, contester cette affirmation et admettre des géométries plus molles, munies de peu d'automorphismes, mais on entre dans d'autres types de théories, dont les résultats et les méthodes sont différents.

En fait, la transitivité est présente de manière implicite dès le début des *Éléments* d'Euclide. Quand il démontre (?) le premier cas d'égalité des triangles par la méthode de superposition (comme on le faisait autrefois au collège), il dit [7] : *En effet, si l'on appliquait le triangle* $AB\Gamma$ *sur le triangle* ΔEZ *de manière à faire coïncider d'abord les points* A *et* Δ*, puis les côtés* AB *et* ΔE*, le point* B *coïnciderait avec* E*, car* $AB = \Delta E$ *etc.*

Il y a implicitement dans le mot *appliquait* une hypothèse de transitivité sur ce qu'on appelle maintenant les drapeaux (un point et une demi-droite issue de ce point). Une lecture moderne d'Euclide ne peut évidemment se satisfaire de cette hypothèse implicite et cela conduit à la recherche d'axiomatiques plus complètes (voir [7], [2], [26], etc.)

1.1.3 Erlangen et transitivité : une application en géométrie affine

Voici une application qui montre en quoi le programme d'Erlangen peut être utile et notamment deux des idées évoquées ci-dessus : la classification des géométries et la transitivité. Le cadre est celui de la géométrie affine et le principe est le suivant.

1) On repère que le problème est un problème affine. Cela signifie qu'il peut mettre en jeu les notions d'alignement, de concours, de parallélisme, de milieux, de rapports de mesures algébriques sur des droites parallèles, de barycentres, d'aires [8] (mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes).

2) On effectue une transformation affine f de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Cela revient souvent à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (un triangle quelconque devient équilatéral, un parallélogramme devient un carré, etc.). C'est dans cette phase qu'intervient la **transitivité**.

3) On résout le problème simplifié (éventuellement avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse f^{-1}.

Voici un exemple, élémentaire mais révélateur, d'application de cette technique. On veut montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Comme la notion de médiane est affine, on aura gagné si l'on montre qu'on peut transformer le triangle en un triangle équilatéral par une application affine. En effet, les médianes seront alors aussi les médiatrices et on montre facilement que celles-ci sont concourantes. Le point crucial est donc :

Lemme. *Le groupe affine est transitif sur les triangles.*

7. Traduction de Kayas.
8. Les aires (ou plutôt leurs rapports) sont un invariant affine, et pas seulement euclidien, comme on le voit en regardant la symétrie oblique par rapport à la médiane d'un triangle (voir le lemme de la médiane de [25]).

Démonstration. Il s'agit d'envoyer trois points A, B, C (non alignés) sur A', B', C'. On commence par envoyer A sur A' par une translation t. Ensuite, il y a au moins deux façons de faire.

1) Les points B et C sont transformés par t en B'' et C''. Il ne reste plus qu'à effectuer la transformation linéaire (avec A' comme origine) qui envoie la base $\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'C''}$ sur $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ et on a gagné.

2) On explicite la transformation en question en utilisant successivement une rotation, une homothétie, une transvection et une affinité.

Le lecteur vérifiera l'intérêt de la méthode en résolvant le problème suivant par réduction au cas équilatéral [9] (voir au besoin [15] p. 16) :

Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ au tiers le plus proche de B, C, A. Les droites (AI) et (BJ) , (BJ) et (CK), (CK) et (AI) se coupent respectivement en P, Q, R. Déterminer l'aire du triangle PQR en fonction de celle de ABC.

Nous reverrons cette méthode au paragraphe 3 à propos de "temps d'avance". Ce type de technique est universel en géométrie, soit pour ramener un problème à un cas particulier : une conique à un cercle, voir l'exemple de Pascal, deux cercles disjoints à deux cercles concentriques, ou encore lorsqu'il s'agit de trouver une position propice aux calculs ou aux démonstrations.

1.1.4 Absence de transitivité : orbites et invariants

Ce qui précède montre l'importance de la transitivité dans l'application du programme d'Erlangen. Mais, bien entendu, l'action d'un groupe G sur un ensemble X n'est pas toujours transitive, par exemple l'opération du groupe des isométries du plan euclidien sur l'ensemble des couples de points du plan ne l'est pas, mais ce défaut de transitivité n'est pas moins intéressant, car il conduit à la notion d'**orbite** : l'orbite de x est l'ensemble des $y \in X$ que l'on peut atteindre à partir de x *via* G. La plupart du temps, les orbites sont repérées par des **invariants**. Dans le cas de la géométrie élémentaire, il s'agit de notions bien connues. Si l'on ne peut pas toujours envoyer par une isométrie un couple de points (A, B) sur un autre c'est qu'il y a une obstruction qui empêche cela, un invariant du couple de points qui ne change pas par isométrie. Pas besoin d'être grand clerc pour deviner que c'est la **longueur** AB. De la même manière, on ne peut envoyer un couple de demi-droites de même origine sur un autre que si leur **angle** est le même. La notion d'invariant est donc inhérente à la géométrie. Bien sûr, à un stade un peu plus avancé il y a des invariants plus sophistiqués, par exemple sur une

9. L'avantage du cas équilatéral, c'est que certains triangles comme AQR, BRP, CPQ ou BCP, CAQ, ABR sont isométriques, donc ont même aire.

droite projective, on peut envoyer trois points distincts sur trois autres par une homographie, mais avec quatre surgit un nouvel invariant, le birapport.

Nous verrons plus loin que cette notion d'orbite permet de mieux comprendre certains des outils légués par les Grecs comme les cas d'égalité ou de similitude des triangles.

1.1.5 Invariants, relations et théorèmes

En restant au niveau théorique, il y a une autre raison qui fonde l'importance des invariants, c'est qu'ils sont directement liés aux théorèmes. En effet, on montre que tout théorème d'une géométrie donnée correspond à une relation entre les invariants (algébriques) de cette géométrie. Le lecteur intéressé par cet aspect des choses ira lire [15], puis [17]. Pour l'allécher je lui propose juste un exemple élémentaire :

Soit ABC un triangle du plan euclidien et H un point quelconque. La symétrie et la linéarité du produit scalaire donnent la relation :

$$\big((\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC})|\overrightarrow{HA}\big)+\big((\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA})|\overrightarrow{HB}\big)+\big((\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB})|\overrightarrow{HC}\big)=0.$$

Cette relation fournit aussitôt le concours des hauteurs du triangle. En effet, si l'on choisit pour H l'intersection des hauteurs issues de A et B, les deux premiers produits scalaires sont nuls (par exemple, le premier n'est autre que $(\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{HA})$ par la relation de Chasles), donc aussi le troisième, et H est sur la troisième hauteur.

Le plus bel exemple que je connaisse sur ce thème est le lemme des six birapports, voir par exemple [1] p. 163 ou [20] p. 40, qui donne d'innombrables résultats de cocyclicité.

1.2 La géométrie ou les géométries : unité et singularité

Il me semble que l'une des erreurs de la réforme dite "des mathématiques modernes" a été de vouloir à tout prix mettre en avant, dans la géométrie euclidienne, ce qui était susceptible de se généraliser, soit en toutes dimensions, soit dans d'autres géométries, en gommant sa singularité. Certes, la géométrie euclidienne n'est pas la seule digne d'intérêt, mais en la comparant aux autres nous allons voir qu'elle est vraiment singulière.

1.2.1 Un cadre commun pour toutes les géométries

Selon Klein, toutes les géométries qui rentrent dans le cadre de son programme sont issues d'une géométrie mère : la géométrie projective. Par exemple, si l'on se limite à la géométrie plane, la donnée des notions de points et de droites avec l'axiome d'Euclide (*par deux points passe une droite et une seule*) mène aussitôt à la notion de plan projectif (voir [16] Ch. 4).

L'idée de Klein c'est qu'ensuite, toutes les autres géométries s'obtiennent à partir de la géométrie projective en lui adjoignant une donnée supplémentaire : une droite ou un hyperplan (à l'infini) et l'on obtient la géométrie affine, une forme quadratique, disons sur le dual, et l'on a une notion d'orthogonalité des droites, puis de distance. Dans le cas de la géométrie plane, on obtient ainsi la géométrie euclidienne et ses deux sœurs non euclidiennes, les géométries hyperbolique et elliptique. Les groupes qui apparaissent alors sont les groupes linéaires et orthogonaux (et plus généralement ce qu'on appelle les groupes classiques). Je renvoie à [15] pour plus de précisions.

1.2.2 Géométries riches et dimension

Un mot sur la dimension. Dans un premier temps, il est naturel de ne s'intéresser qu'aux dimensions 2 et 3, car ce sont les dimensions immédiatement perceptibles par nos sens. Cependant, il y a une autre raison, plus mathématique, de privilégier les petites dimensions, qui tient à la nature des groupes classiques. En effet, lorsqu'on travaille en petite dimension (disons ≤ 5) il apparaît entre ces groupes des isomorphismes (dits exceptionnels). On peut citer, par exemple, les suivants [10] :

• L'isomorphisme entre le groupe des homographies de la droite réelle $PGL(2, \mathbf{R})$ et celui des homographies du plan conservant une conique, $PO(q)$, où q est une forme de Lorentz réelle à 3 variables, c'est à dire une forme de signature $(2, 1)$.

• L'isomorphisme entre le groupe des homographies du plan complexe $PGL(2, \mathbf{C})$ et celui des transformations de l'espace des cercles, $PO^+(q)$ (la forme q est une forme de Lorentz réelle à 4 variables, donc de signature $(3, 1)$, qui représente le carré du rayon d'un cercle).

Mon opinion est que ces isomorphismes sont la caractéristique de géométries **riches**. En effet, on a vu ci-dessus l'importance de la notion d'invariant. Lorsque le groupe d'une géométrie se présente sous deux habits différents, la géométrie possède les deux types d'invariants correspondants. Par exemple, dans le cas du second isomorphisme, qui correspond à la géométrie de l'inversion, enseignée autrefois en terminale, on a à la fois le birapport, invariant de $PGL(2, \mathbf{C})$, directement lié aux propriétés de cocyclicité [11] des points du plan,

10. Tous ces objets sont essentiellement des groupes de matrices. Le lecteur non familier avec les horribles notations qui suivent pourra consulter [24] Ch. 8. Qu'il se rassure, c'est l'idée, plus que les détails techniques, qui importe ici.

11. Quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.

et la forme quadratique q, invariante par $PO^+(q)$ et liée aux propriétés d'orthogonalité ou de contact des cercles et des droites. La présence de ces deux types d'invariants produit deux types de théorèmes, par exemple côté cocyclicité, le théorème des six cercles de Miquel, voir [20] p. 40, et côté contacts, le théorème de Feuerbach, voir [20] p. 24. Deux fois plus de théorèmes, donc une géométrie deux fois plus riche.

Or les isomorphismes entre groupes classiques ont été déterminés de manière systématique (voir [4] p. 107) et on montre qu'il n'y en a qu'en dimension vectorielle ≤ 5. Autrement dit, si l'on accepte la notion de géométrie riche proposée ci-dessus, il n'y a de telles géométries qu'en petite dimension.

1.2.3 La singularité de la géométrie euclidienne

Lorsqu'on compare la géométrie euclidienne avec ses sœurs hyperbolique et elliptique, il apparaît de nombreuses singularités, dont on a sans doute sous-estimé l'importance. J'explique brièvement ce point ci-dessous, renvoyant à [21] p. 22 à 25 pour des détails.

• **Le caractère affine de la géométrie euclidienne**

La définition de la géométrie euclidienne à partir du plan projectif et d'une forme **dégénérée** sur le dual (voir [19]), si elle est inhabituelle, met bien en évidence l'existence d'une droite canonique dans le plan projectif (le noyau de la forme), qui va servir de droite à l'infini. Rien de tel n'existe en hyperbolique et en elliptique et cela a deux types de conséquences.

— Qui dit droite à l'infini dit plan affine (le complémentaire de cette droite) et parallèles (les droites qui se coupent sur la droite à l'infini). On sait bien que les parallèles jouent un rôle capital en géométrie euclidienne, chez Euclide (penser aux liens avec les perpendiculaires, aux angles alternes-internes, à Thalès, etc.) et plus tard (penser à l'importance des parallélogrammes pour définir les vecteurs). En revanche – et c'est un paradoxe puisque c'est à partir du problème des parallèles que sont nées les géométries non euclidiennes – elles n'ont à peu près aucun intérêt en géométrie non euclidienne. C'est évident en géométrie elliptique puisqu'il n'y a pas de parallèles. C'est vrai aussi en géométrie hyperbolique. En effet, la notion naïve (deux droites qui ne se coupent pas) est trop grossière (c'est une propriété ouverte) et l'expérience montre que la variante forte (elles se coupent sur l'horizon) n'est guère plus intéressante.

— À partir du moment où l'on dispose d'un plan affine, on a un invariant associé qui est **l'aire**. Cette notion est porteuse de nombreux résultats (ceux que j'appelle les "lemmes du collège", voir [25] p. 214 et qui ne font que traduire l'invariance de l'aire par le groupe affine, voir [12]), gouvernant toute la partie affine de la géométrie élémentaire (par exemple le théorème de Thalès, voir plus loin). En revanche, même si l'on peut définir l'aire en géométrie non euclidienne, elle n'est pas d'un grand intérêt puisque, dans le cas du triangle par exemple, la formule de Gauss-Bonnet montre qu'elle est égale à la valeur absolue de la différence entre π et la somme des angles. Elle ne constitue donc pas à proprement parler un invariant supplémentaire.

• **Le groupe des similitudes**

Dans les trois géométries usuelles, le groupe des isométries est un groupe de dimension 3 et c'est un de leurs points communs (qui explique qu'il y a toujours besoin de trois invariants pour déterminer un triangle). Mais une autre singularité de la géométrie euclidienne est l'existence, au-delà du groupe des isométries, de celui des similitudes $\mathrm{Sim}\,(X)$, qui est de dimension 4, et qui donne à cette géométrie une souplesse incomparable : on peut non seulement déplacer les figures, mais les augmenter ou les réduire en conservant les angles et les rapports de longueurs, donc la *forme*. Il n'y a rien de tel en géométrie non euclidienne, ni homothéties, ni similitudes.

• **Les sous-groupes distingués et les invariants orientés**

Dans le cas des géométries non euclidiennes, le groupe des isométries est simple[12] (ou presque). Cela confère à ces géométries une rigidité que n'a pas la géométrie euclidienne. En effet, au contraire, le groupe $\mathrm{Sim}\,(X)$ est totalement dévissé par la suite de sous-groupes distingués :

$$\{\mathrm{Id}\} \subset \mathrm{T}(X) \subset \mathrm{Is}^+(X) \subset \mathrm{Is}\,(X) \subset \mathrm{Sim}\,(X),$$

où $\mathrm{T}(X)$ est le groupe des translations, $\mathrm{Is}^+(X)$ le groupe des déplacements et $\mathrm{Is}\,(X)$ celui des isométries. Ces sous-groupes étant distingués donnent naissance à des quotients qui sont **tous abéliens**. Cela fournit à chaque pas des invariants algébriques **orientés**, successivement les vecteurs, les angles orientés, le signe des transformations, le rapport de similitude. De plus, le fait d'avoir des homomorphismes à valeurs dans les quotients assure que tous ces invariants se comportent de manière convenable par rapport à la composition des transformations : le vecteur de la translation composée est la somme des vecteurs, l'angle de la rotation composée est la somme des angles, etc. Il n'y a rien de tel en géométrie non euclidienne. On peut bien essayer de définir l'angle d'une rotation ou le vecteur d'une translation, mais ces objets se comportent à peu près aussi mal qu'il est possible (voir [18] Ch. 8) : ils ne s'ajoutent que si les rotations ont même centre ou les translations même direction. En un mot, on perd en géométrie non euclidienne l'un des outils les plus puissants[13] de la géométrie euclidienne : **la relation de Chasles**. C'est

12. Cela signifie qu'il n'a pas de sous-groupe distingué non trivial.

13. Ce n'est pas parce qu'il s'agit d'une relation connue dès le lycée (autrefois dès le

d'ailleurs aussi une différence [14] entre la géométrie euclidienne de dimension 2 et celle de dimension 3 où il n'y a plus d'angles orientés.

• **Un point crucial des différences : la notion d'angle**

Lorsqu'on pratique la géométrie euclidienne à la manière d'Euclide, c'est-à-dire en utilisant les cas d'égalité et de similitude des triangles, on est aussitôt confronté à la nécessité d'établir des égalités de longueurs et d'angles. Ce dernier point repose sur plusieurs accessoires qui permettent de faire efficacement ce travail. J'en répertorie quatre types :

– les notions de complémentaire et supplémentaire [15],
– les propriétés des angles vis à vis des parallèles (alternes-internes, etc.),
– la somme des angles d'un triangle,
– le théorème de l'angle inscrit.

En géométrie non euclidienne, à l'exception du premier point, tous ces outils disparaissent : les propriétés des parallèles ne subsistent pas, la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à deux droits, il n'y a plus de théorème de l'angle inscrit. Autrement dit, on n'a plus à disposition de quoi utiliser les cas d'isométrie (pour la similitude, c'est encore plus radical puisqu'elle n'existe plus).

Cette difficulté d'utilisation des angles en géométrie non euclidienne ne fait que renforcer en creux leur importance en euclidien où l'on dispose d'outils efficaces pour les utiliser : **l'invariant angle est vraiment l'un des fondements essentiels de la géométrie euclidienne**.

2 Conséquences pour l'enseignement

2.1 Résister à la tentation

L'expérience de la réforme dite “des mathématiques modernes” nous instruit sur un certain nombre d'écueils à éviter. Autant je suis convaincu que la définition d'un enseignement quel qu'il soit doit prendre en compte l'état de la connaissance dans le domaine, et c'est ce qui justifie le paragraphe

collège), ni parce que nos élèves l'utilisent parfois à tort et à travers, qu'elle n'est pas essentielle !

14. Sur ce point, je suis en désaccord total avec ce que disait G. Choquet à propos des angles orientés : *Pourquoi les monter en épingle ainsi que la cocyclicité alors que dans* $\mathbf{R}^3$ *cette notion n'a plus de sens. En fait l'essentiel de la géométrie euclidienne peut être traité sans les angles.* (Conférence pour Math. en Jeans, 1995) On voit ici en action ce que je décrivais plus haut : le refus de prendre en compte la richesse et la singularité de la géométrie euclidienne plane.

15. Et la relation de Chasles si l'on utilise des angles orientés.

précédent, autant je suis conscient qu'elle nécessite une profonde adaptation. Dans le cas présent, il y a deux dérives à éviter :

1) La tentation de la généralité. Elle consiste à privilégier dans l'enseignement ce qui est susceptible de généralisation (par exemple en dimension plus grande, sur des corps autres que $\mathbf{R}$, en géométrie non euclidienne). Comme on l'a vu, le risque est d'appauvrir la géométrie euclidienne et de la priver de certains outils essentiels.

2) La tentation d'utiliser le plus tôt possible les outils les plus performants (par exemple l'algèbre linéaire, les transformations, les invariants orientés). C'est faire fi d'une nécessaire maturation sans laquelle ces outils ne peuvent pas acquérir de sens [16].

2.2 Quelques principes

J'explicite ici les principes qui sous-tendent mes propositions. Les trois premiers sont dans la droite ligne d'Euclide :

1. *L'entrée par l'algèbre linéaire est à bannir avant l'enseignement supérieur.*
2. *L'idée de transitivité est essentielle, l'une de ses manifestations principales étant les cas d'isométrie et de similitude des triangles.*
3. *Le rôle des invariants (longueur, angle, aire) est primordial.*

   Les trois suivants, en revanche, constituent des progrès par rapport à la mathématique grecque :
4. *Les nombres sont un outil essentiel de toute géométrie.*
5. *L'existence d'invariants algébriques orientés (vecteurs et angles) est l'un des avantages de la géométrie euclidienne.*
6. *La notion de groupe est l'une des plus importantes des mathématiques.*

2.3 L'algèbre linéaire ?

C'est l'un des enseignements majeurs de la réforme des mathématiques modernes : vouloir enseigner l'algèbre linéaire avant la géométrie c'est mettre la charrue avant les bœufs. Il est préférable de réserver cette introduction au début de l'enseignement supérieur, en la préparant dans le second degré par une pratique de la géométrie vectorielle (voir sur ce sujet [9] ou [6]). Ce point ne fait plus vraiment débat aujourd'hui.

16. Ainsi, l'intérêt des angles orientés n'apparaît clairement que lorsqu'on s'est trouvé confronté à la prolifération des cas de figure. Voir `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/circonscrit.pdf` pour un bel exemple.

2.4 La transitivité en action : les cas d'isométrie et de similitude des triangles

Les cas d'isométrie des triangles étaient un des outils essentiels des collégiens d'autrefois pour faire de la géométrie. Bannis par la réforme des mathématiques modernes, ils ont fait leur réapparition en seconde dans les années 1990, avant d'être balayés par les dernières modifications de programmes de lycée en 2008, puis de réapparaître dans les programmes de collège de 2015 ! Je considère que ces tergiversations sont très préjudiciables à l'enseignement, notamment au regard de la formation des maîtres, voir plus loin. Pourtant, il y a en leur faveur de solides arguments, à la fois théoriques et didactiques.

En effet, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des éléments autres que ceux utilisés) **sans être obligé** [17] **d'exhiber celle-ci**.

Côté didactique, je me contenterai d'un exemple très simple, mais révélateur de l'intérêt des cas d'isométrie.

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points D et E sur (AB) et (BC) tels que $BD = CE = AB - BC$. Montrer que ADE est isocèle.

C'est très facile avec les cas d'isométrie. En effet, on considère ACE et EBD. Ils sont isométriques (deux côtés et un angle, vu comme supplémentaire). On en déduit $AE = DE$.

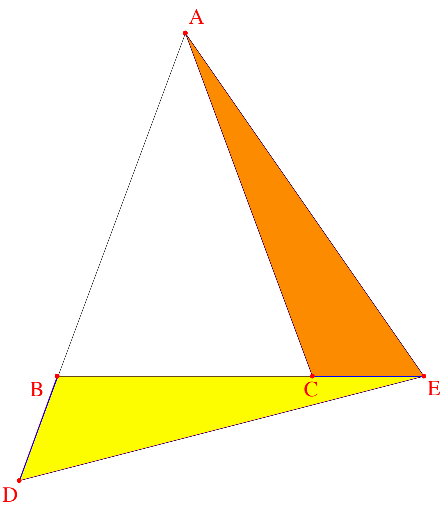

FIGURE 3 – Cas d'isométrie ?

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations [18].

17. Envoyer ce triangle sur cet autre ? *Il peut le faire !* comme auraient dit Pierre Dac et Francis Blanche.

18. Pour revenir à Francis Blanche, il n'est pas évident de trouver la transformation qui

Comme ABC est isocèle, on dispose de la symétrie σ_1 par rapport à la médiatrice de $[BC]$ qui transforme E en F. On compose ensuite par la symétrie σ_2 par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$. Comme les triangles ABE et FBD sont isocèles en B, cette bissectrice est aussi médiatrice de $[AE]$ et de $[FD]$ et la conservation des longueurs par symétrie donne $AE = AF$ (par σ_1) puis $AF = ED$ (par σ_2).

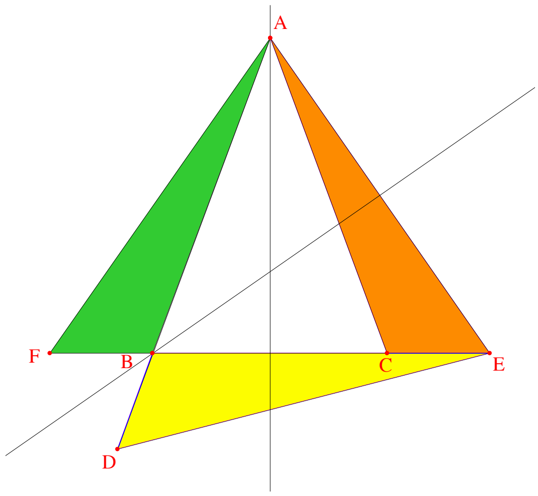

FIGURE 4 – Ou transformations ?

La principale critique que l'on peut faire à cette seconde preuve c'est qu'elle nécessite **l'introduction d'un objet intermédiaire** : le point F ou le triangle ABF. C'est une difficulté essentielle pour les élèves, qui obligerait sans doute à donner une indication.

Il y a bien d'autres arguments en faveur de l'usage des cas d'isométrie par rapport à celui des transformations (voir [9], [5] ou [13]) : les triangles peuvent se voir comme des surfaces, donc sont plus immédiatement perceptibles par les enfants que les points ou les lignes, la rédaction d'une solution par les cas d'isométrie est souvent plus simple. Un autre point est important : pour que l'usage des transformations soit efficace, il faut pratiquement les avoir toutes, ce qui n'est pas le cas au début du cursus. Les nouveaux programmes de collège réintroduisent ces deux outils sans établir de hiérarchie, ce qui ne me semble pas raisonnable. À mon avis, l'efficacité commande de privilégier résolument les cas d'isométrie.

2.5 Erlangen en action : l'usage des invariants

Là encore, les justifications théoriques ne font que voler au secours de l'évidence : chacun sait que les invariants sont des outils fondamentaux du géomètre. Je n'insisterai que sur les plus mal-aimés d'entre eux : angles et aires.

On a vu plus haut qu'on dispose en géométrie euclidienne d'excellents atouts pour travailler avec les angles : les notions de complémentaire et de

passe de ACE à EBD. L'examen du sens des angles montre que c'est une rotation. On la trouve évidemment comme composée des symétries σ_1 et σ_2 définies ci-après.

supplémentaire, la somme des angles d'un triangle, les propriétés relatives aux parallèles et le théorème de l'angle inscrit [19] et sa réciproque. Avec ces accessoires, l'outil angle devient performant et souple. Profitons-en ! C'est d'autant plus intéressant que la manipulation des angles est un excellent moyen d'éduquer les élèves à la vision géométrique. Voici un exemple classique : le fait que, dans un triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit. L'intérêt didactique de cet exercice est de montrer que toute idée raisonnable mène à une solution, voir [5] p. 475 pour des détails.

Vu la réciproque du théorème de l'angle inscrit, il s'agit de montrer (par exemple) que les angles marqués en H' et C sont égaux. Par symétrie, l'angle en H' est égal à celui en H et on conclut car $\widehat{H}$ et $\widehat{C}$ sont tous deux complémentaires de $\widehat{B'BC}$, l'un dans $BA'H$, l'autre dans $BB'C$. Il y a bien d'autres manières de faire, voir [5].

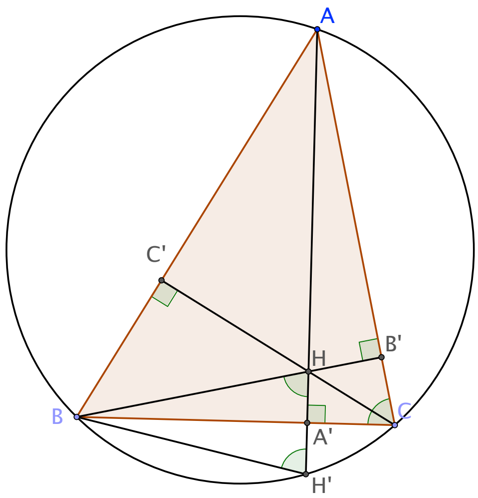

Figure 5 – Le symétrique de l'orthocentre

Il y a ainsi une multitude d'exercices utilisant les angles, consistants et formateurs, qu'il est urgent de réhabiliter.

S'agissant de l'outil "aire", il requiert lui aussi quelques accessoires que j'appelle les "lemmes du collège", lemme du demi-parallélogramme, de la médiane, du trapèze, des proportions et du chevron, (voir [25] p. 214, mais presque tous ces lemmes sont dans Euclide, et tous peuvent être prouvés par découpage ou apparaître comme conséquences de la formule *base* $\times$ *hauteur*/2). L'exemple le plus simple de leur usage est la preuve du théorème de Thalès par les aires, voir Figure 6, mais il y a beaucoup d'autres exemples sur ce thème : le concours des médianes, les théorèmes de Céva, Ménélaus, Gergonne, etc. voir [12], [25], [17], [13].

19. L'angle inscrit est malheureusement absent des nouveaux programmes de collège.

On suppose (BC) et $(B'C')$ parallèles et on montre qu'on a $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$. On a $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{\mathcal{A}(AB'C)}{\mathcal{A}(ABC)}$ et $\dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{\mathcal{A}(ABC')}{\mathcal{A}(ABC)}$ (c'est le lemme des proportions). Mais, on a $\mathcal{A}(BB'C') = \mathcal{A}(CB'C')$ (c'est le lemme du trapèze) et, en ajoutant $\mathcal{A}(AB'C')$, on obtient $\mathcal{A}(AB'C) = \mathcal{A}(ABC')$ et le résultat.

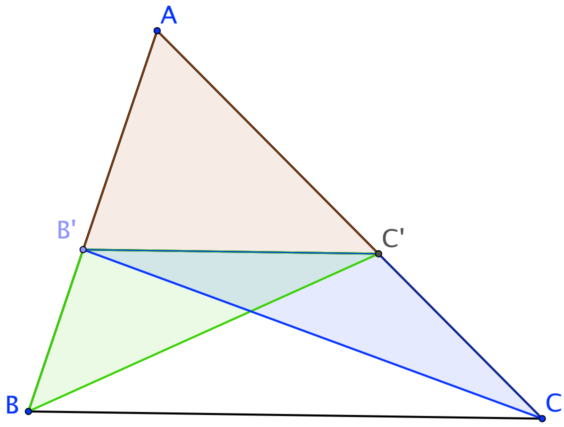

Figure 6 – Le théorème de Thalès

2.6 Les nombres

C'est le talon d'Achille de la mathématique grecque. Les Grecs ne voient pas les rationnels comme des nombres mais comme des rapports de grandeurs, au travers de la théorie des proportions, qui contient aussi en germe les nombres réels. Cette théorie est une magnifique construction, parfaitement rigoureuse, mais à peu près impossible à utiliser. On peut penser que c'est cette frilosité sur les nombres qui les a empêchés notamment de résoudre les problèmes classiques de constructions à la règle et au compas (duplication du cube, trisection de l'angle, etc.). Heureusement, Stevin a inventé les décimaux, et nous disposons ainsi d'un outil que l'on peut enseigner dès le primaire. Heureusement aussi, Descartes a inventé la géométrie analytique. Là encore, profitons-en, mais avec modération : la géométrie ne se réduit pas à ses aspects numériques. En particulier, le traitement d'un problème de géométrie par le seul calcul fait souvent perdre une large part des intérêts principaux de l'apprentissage : la vision géométrique et le raisonnement.

2.7 Les invariants orientés

Je pense ici aux vecteurs et aux angles orientés. Par rapport aux Grecs, il s'agit d'un progrès essentiel, notamment, dans le cas des vecteurs, par leur usage en physique. Dans le cas des angles, l'usage des angles orientés, essentiel pour définir les rotations, permet aussi d'éviter d'avoir à traiter pléthore de cas de figures. Attention, toutefois, je suis partisan de ne pas les introduire trop tôt, et là encore avec modération : au collège et au début du lycée, les angles non orientés sont bien suffisants.

2.8 Groupes

Que la notion de groupe soit essentielle en mathématiques n'est pas une découverte ! Dans *Récoltes*[20] *et Semailles*, A. Grothendieck n'hésite pas à parler de l'invention du zéro et de l'idée de groupe comme des deux plus grandes innovations mathématiques de tous les temps. On a vu aussi que cette notion est le fondement de la géométrie au sens de Klein. Il est donc important que les lycéens en aient un aperçu. Or, hormis les groupes[21] abéliens qui interviennent dans le domaine numérique, ils n'ont plus jamais l'occasion d'en rencontrer. Pourtant, avec les transformations (qui reviennent au collège dans les programmes de 2015) et leur composition (qui, elle, a disparu corps et biens), les groupes sont tout proches du programme. Alors, même si je pense qu'il faut limiter l'usage des transformations au collège et lui préférer celui des cas d'isométrie, il me semble déplorable que cette notion ne soit plus du tout abordée au lycée : c'est un recul de plus de soixante-dix ans, voir [3] par exemple[22].

2.9 Comment enseigner la géométrie ?

Je résume souvent ma position vis à vis des mathématiques par une formule ambitieuse et modeste à la fois : *faire des mathématiques c'est poser et, si possible, résoudre des problèmes.*

Il est bon de rappeler cela car ce principe n'est pas toujours apparent dans les manuels, même si certains font des efforts en ce sens. J'entends par là qu'il faut, de temps en temps, poser aux élèves des problèmes **ouverts**, où les réponses ne sont pas données (en évitant le sempiternel *Montrer que ...*) et dont les énoncés ne sont pas détaillés à l'extrême. La géométrie est l'un des domaines où il est facile de trouver de tels problèmes, par exemple les problèmes de lieux ou de constructions. Sur ce thème, je renvoie à [5], [9], [21], [23], etc.

20. Voir `http://lipn.univ-paris13.fr/~duchamp/Books&more/Grothendieck/RS/pdf/RetS.pdf`

21. On ne prononce d'ailleurs pas ce nom, sans doute considéré comme un gros mot.

22. Il s'agit du cours de terminale de Deltheil et Caire dont la première édition date tout de même de 1939.

3 Conséquences pour la formation des maîtres

3.1 Quelques textes

Je m'occupe de formation des maîtres depuis presque 40 ans, ce qui explique que j'aie eu le temps d'y réfléchir et d'écrire sur ce sujet. On pourra donc trouver sur ma page web plusieurs textes dont je suis auteur ou coauteur qui l'abordent et font des propositions :

• le rapport sur la formation des maîtres élaboré par la commission Kahane, voir [10],

• la conférence que j'ai faite lors du colloque en l'honneur de Michèle Artigue, voir [22],

• le contenu du module *Projet de géométrie* enseigné de 2010 à 2012 à Orsay, voir `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projetgeometrie.html`.

Mon postulat de départ c'est que, pour enseigner de manière efficace un domaine de la connaissance, deux points sont essentiels, la **culture**, pour connaître de manière approfondie ce qu'on doit enseigner, et la **posture**, pour passer d'une position d'étudiant à une position d'enseignant. Je décline ces points dans le cas de l'enseignement de la géométrie.

3.2 Replacer la discipline dans une perspective historique

Plus encore que dans d'autres domaines, la connaissance de l'histoire est indispensable pour enseigner la géométrie. En effet, cette science remonte aux Grecs qui l'avaient déjà portée à un haut degré de sophistication et il n'est pas inutile pour un futur professeur de regarder leurs écrits, ceux d'Euclide bien sûr, mais aussi ceux d'Archimède. Cela ne pourra que l'inciter à une salutaire modestie. Ensuite, on pourra évoquer Descartes et l'irruption du nombre dans la géométrie, progrès décisif pour résoudre notamment les problèmes de constructions sur lesquels les Grecs avaient achoppé. Enfin, les révolutions apportées par les géomètres du XIX-ième siècle (la géométrie projective avec Poncelet, les vecteurs avec Grassmann, les groupes avec Klein) permettront au futur professeur de mesurer la chance qu'il a d'être né après ces illustres mathématiciens.

3.3 Le temps d'avance : l'exemple du programme d'Erlangen

La culture est un atout pour le professeur en ce qu'elle lui donne un *temps d'avance* sur l'élève, qui lui permet, face à un exercice, de trouver rapidement le résultat et d'envisager les méthodes possibles. C'est important pour comprendre les procédures des élèves, justes ou non, leurs intuitions, même non abouties, et ainsi de ne pas les rejeter de manière dogmatique.

Une des possibilités en ce sens est offerte par le programme d'Erlangen. Bien entendu, il n'est pas question de l'enseigner, sous quelque forme que ce soit, au collège et au lycée. Mais si les professeurs en ont compris le principe, cela peut leur être utile comme le montre l'exemple suivant. Il s'agit d'un exercice [23] de collège ou de seconde :

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ?

Le professeur, avec les idées d'Erlangen, notera d'abord que le problème est affine et qu'on peut donc le transformer sans risque en supposant que $ABCD$ est un carré. Il verra alors aussitôt, en comparant les hauteurs des triangles, que M doit être sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Comme les notions de hauteurs et de bissectrice ne sont pas affines, il devra traduire cette condition dans le cas général par le fait que M doit être sur la diagonale $[BD]$. Le maître aura donc ici un temps d'avance [24] sur les élèves puisqu'il aura immédiatement trouvé le résultat cherché. Il devra ensuite imaginer une preuve accessible à des élèves. Ce n'est pas difficile pourvu qu'il dispose des outils adaptés (les "lemmes du collège" au sens de [25], lemme du demi-parallélogramme et de la médiane, donnent facilement le résultat).

3.4 La rigueur : le problème des cas de figure

La formation des professeurs est parfois paradoxale. Il arrive que le but essentiel des éléments qu'elle apporte soit de ne pas les utiliser. L'exemple type en ce sens est celui des problèmes liés aux cas de figure et à la convexité. Cette question est épineuse en géométrie car il y a parfois pléthore de cas à considérer. De plus, l'une des difficultés des élèves dans l'apprentissage de la géométrie est cette question récurrente : pourquoi démontrer des propriétés qui sont bien évidentes sur la figure ? Cette difficulté est encore renforcée par le fait que certaines des propriétés sont effectivement lues sur la figure, principalement les questions de position. Il devient d'autant plus difficile pour les professeurs de faire comprendre aux élèves quelles sont les propriétés qu'ils sont en droit d'admettre et quelles sont celles qu'ils doivent démontrer. À mon avis, sur ce point, une formation des maîtres cohérente doit mettre l'accent sur trois éléments.

23. Proposé dans le document d'accompagnement des programmes de seconde de 2000.

24. Bien sûr, il n'y a pas qu'Erlangen qui donne ce temps d'avance. Une bonne pratique des lemmes de découpage évoqués ci-dessus peut aussi avoir cet effet.

1) La différence entre deux types de propriétés, des propriétés “fermées” au sens topologique (disons des égalités d’angles, de longueurs, des propriétés de concours, d’alignement, etc.) qui doivent être en principe prouvées, et des propriétés “ouvertes” (position d’un point par rapport à une droite, à un secteur, etc.) qui peuvent, en général, être admises par lecture sur la figure.

2) Le fait qu’on peut **démontrer** les assertions de position, à partir d’axiomes. Bien entendu, ces axiomes doivent être les plus proches possibles de la pratique et ceux de Hilbert (éventuellement adaptés) conviennent assez bien. C’est un véritable travail, difficile et parfois aride, mais nécessaire. J’ai trop vu des professeurs refuser d’utiliser un résultat commode sous prétexte qu’il requérait un argument de convexité (l’exemple type est celui du théorème que j’appelle le mal-aimé [25] : *si un quadrilatère* **convexe** *a deux côtés parallèles et égaux, c’est un parallélogramme*).

3) Le garde-fou d’un discours précisant l’objectif, qui n’est pas d’asséner aux élèves ce type d’arguments, mais, au contraire, d’être rassuré quant aux assertions admises sur les figures : on peut toujours convoquer les mathématiques si l’on veut absolument les prouver. Cela permet de ne pas hésiter à admettre les choses si cela apporte une simplification.

Dans ce cas, la formation donne la caution des mathématiques et libère l’initiative des professeurs. Le lecteur se reportera au module *Projet de géométrie* évoqué plus haut pour plus de précisions.

3.5 Les changements de programme : cas d’isométrie, transformations

J’ai expliqué plus haut pourquoi l’usage des cas d’isométrie et de similitude, au collège, me semblait plus pertinent que celui des transformations. Cet exemple est très instructif pour la formation des maîtres. En effet, avant la réforme des mathématiques modernes, les cas d’égalité étaient connus à la fois des élèves et des professeurs qui les utilisaient sans problème. Leur suppression des programmes, au début des années 1970, a entraîné leur disparition de la formation des maîtres, toujours trop arrimée aux programmes. Le résultat c’est que lorsqu’on les a réintroduits en seconde vers l’année 2000, comme les professeurs formés pendant les 30 ans qui venaient de s’écouler ignoraient jusqu’à l’existence de ces résultats et ne voyaient pas l’intérêt qu’ils pouvaient présenter, ces outils ne se sont pas imposés. La meilleure

25. Voici un exemple très simple qui utilise ce théorème : *Soit $ABCD$ un parallélogramme, M, N les milieux des côtés $[AB]$, $[CD]$. Alors $AMCN$ est un parallélogramme.* Voir aussi, pour en comprendre les risques, l’exemple du problème des *Aires égales* dans [23] p. 14-18.

preuve est que peu de voix se sont fait entendre quand ils ont de nouveau été supprimés [26] en 2009. Bonne surprise, ils font leur réapparition dans les programmes de collège de 2015 ! Mais bien sûr, entre temps, ils avaient de nouveau cessé d'être enseignés en formation des maîtres ! Attention, même si cet outil est pertinent, il est nécessaire d'y avoir réfléchi un peu pour l'utiliser de manière efficace, voir par exemple [8] : il y a évidemment un travail important et urgent à faire sur ce sujet en formation continue, si l'on ne veut pas que ces thèmes restent lettre morte.

Pour ma part, je persiste à penser que les cas d'isométrie et de similitude sont des outils indispensables pour faire de la géométrie et qu'il est nécessaire de les enseigner en formation des maîtres, indépendamment de leur présence ou non dans les programmes dont on vient de voir la versatilité. Mais le même discours vaut aussi pour les transformations (rotations, homothéties, etc.) qui avaient elles aussi pratiquement disparu des programmes de collège et de lycée en 2010 et donc aussi de la formation des maîtres [27]. Comme elles reviennent au collège en 2015, le même problème d'adaptation va se poser pour les jeunes professeurs !

On aura compris que je considère cette gestion chaotique des programmes, dont je doute qu'elle repose sur de véritables débats scientifiques, comme une totale aberration. Cela impose d'autant plus que la formation des maîtres n'en soit pas esclave, voir 3.8 ci-dessous.

3.6 Les logiciels de géométrie

Il est clair que, de nos jours, la maîtrise d'un logiciel de géométrie dynamique fait partie des compétences indispensables pour un professeur. Au temps de l'image reine, il ne peut être question d'ignorer ces outils. Outre les aspects de réalisation de figures, d'illustration, d'animation, dont l'attractivité est indéniable, l'utilisation de ces logiciels comme aide à la conjecture et à la démonstration est essentielle (voir sur ce sujet l'exemple du "problème de Magali" dans [23] p. 20).

J'ajoute que les logiciels modernes comme Geogebra ou CaRMetal, permettent aussi (plus encore que ne le faisait Cabri) un dialogue fructueux entre le calcul et la géométrie.

26. Alors que le projet de suppression des vecteurs a provoqué un tollé général.

27. Ce n'est pas une prédiction alarmiste mais la réalité, comme je le vois sur la formation dont je m'occupe : depuis quelques années, nous n'enseignons plus ces notions.

3.7 La culture

Il me semble que nous devons veiller à former des professeurs qui ne soient pas des ignorants. J'ai évoqué plus haut l'histoire, essentielle dans le cas de la géométrie. Une des conséquences que j'en tire est que les futurs professeurs doivent au moins avoir une idée de quelques-uns des problèmes qui ont motivé les géomètres d'autrefois.

• **Le problème des axiomatiques**

Dans la plupart des cursus universitaires, la géométrie est tout simplement absente et lorsque qu'elle est enseignée c'est en général dans le cadre des espaces vectoriels et affines. Or, si cette approche est importante, elle n'est d'aucun secours [28] pour un enseignant de collège. Il me semble plus important, pour les professeurs de collège, d'avoir une connaissance (modeste) du début d'une axiomatique du type de celle d'Euclide-Hilbert. Sur ce point je renvoie à la rubrique *Projet de géométrie* de ma page web. Un autre point culturellement important est de donner une ouverture (modeste elle aussi) vers certaines géométries non euclidiennes (hyperbolique et sphérique).

• **Les constructions à la règle et au compas**

C'est un domaine où les Grecs avaient une expertise remarquable : la construction du pentagone régulier est un sommet de la mathématique d'Euclide. Cependant, leur échec sur d'autres problèmes (duplication du cube, trisection de l'angle, etc., voir [25] Ch. 6) est révélateur du déficit de leur culture sur les nombres et source d'une réflexion épistémologique très intéressante pour les professeurs.

• **Les polyèdres réguliers**

Là encore, il s'agit d'un des sommets de la mathématique grecque, mais la plupart des étudiants qui préparent le CAPES ignorent jusqu'à leur existence, de même qu'ils n'ont que rarement entendu parler de la formule d'Euler liant les nombres de faces, arêtes et sommets d'un polyèdre. Il n'est pourtant pas très difficile d'étudier ces objets, y compris en réalisant des maquettes, et il y a nombre de questions intéressantes qui s'y rattachent, voir [25] Ch. 9.

• **Aires, intégrales et primitives**

Dans leurs cursus universitaires, les étudiants rencontrent l'intégrale de Riemann, voire celle de Lebesgue, et c'est une bonne chose. Mais, il est exceptionnel qu'on ait attiré leur attention sur les rapports entre ces notions et le problème de la mesure des aires ou des volumes. Par exemple, un théorème comme celui de Bolyai, qui dit que deux polygones de même aire sont équivalents par puzzle, voir [25] Ch. 7 p. 226, est rarement enseigné,

28. *Aussi utile qu'un couteau à une poule* dit Gilbert Arsac.

bien qu'il constitue la justification théorique des pratiques de découpage et recollement que l'on utilise à l'école et au collège.

3.8 Pour un programme spécifique du CAPES

Ce dernier point est plus technique, mais néanmoins important. Entre l'agrégation et le CAPES, il y a 40 ans que je m'occupe de préparation aux concours d'enseignement et je suis convaincu que ces préparations sont un moment important dans la formation des maîtres. Cependant, notre tâche a été compliquée récemment par une décision absurde. En effet, il y avait jusqu'il y a quelques années un programme du CAPES, qui valait pour l'écrit et partiellement pour l'oral et qui était tout à fait raisonnable. Ce programme a été supprimé et remplacé par le programme des classes de collège et de lycée, auquel est adjoint celui des classes préparatoires pour l'écrit. Cela pose de très importants problèmes pour l'oral. Par exemple, puisqu'il n'y a plus actuellement ni transformations, ni cas d'isométrie dans les programmes du secondaire, tous les titres d'exposés qui portent sur ces thèmes ont disparu. Autrement dit, nous sommes en train de fabriquer une génération d'ignorants en géométrie, avec la conséquence négative déjà évoquée plus haut : le retour dans les programmes des notions évoquées ci-dessus sera rendu très difficile par l'absence de formation des professeurs.

Ma proposition est donc de rétablir [29], au plus vite, un programme du CAPES qui permette d'atténuer les effets des changements de programmes des classes.

Ma foi c'est fait !

Références

[1] Audin Michèle, *Géométrie*, Belin, 1998.

[2] Cousin-Fauconnet Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[3] Deltheil Robert et Caire Daniel, *Géométrie, classe de mathématiques*, Jacques Gabay, Paris, 1989.

29. Dans les textes sur le CAPES parus récemment, on lit : *Elle* [l'épreuve] *prend appui sur les programmes de mathématiques du collège et des différentes séries du lycée général et technologique. Les notions traitées dans ces programmes doivent pouvoir être abordées avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master.* Le problème, en ce qui concerne la géométrie, c'est, comme on l'a dit plus haut, qu'elle est rarement enseignée à l'université.

[4] Dieudonné Jean, *La géométrie des groupes classiques*, Springer, Berlin, 1970.

[5] Duperret Jean-Claude, Perrin Daniel, Richeton Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 472-497, 2001.

[6] Gueudet Ghislaine, *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Thèse, Grenoble (2000).

[7] Hilbert David (trad. Paul Rossier), *Les fondements de la géométrie*, Paris, Dunod, 1971, Gabay 1997.

[8] Horoks Julie, *Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages*, Recherche en Didactique des Mathématiques, 28(3), 319-416, 2008.

[9] Kahane Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 2002.

[10] Kahane Jean-Pierre (dirigé par), *La formation des maîtres en mathématiques*,
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Debats-et-controverses/Sur-la-FdM/FdMKahane.pdf`

[11] Klein Felix, *Le programme d'Erlangen*, Jacques Gabay, 1974.

[12] Perrin Daniel, *L'exemple de la géométrie affine du collège, vu au travers du programme d'Erlangen et de la théorie des invariants*, Bull. APMEP 431, 758-784, 2000.

[13] Perrin Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations*, Repères IREM, 53 : 91–110, 2003.

[14] Perrin Daniel, *La géométrie : un domaine hors programme*, Bull. APMEP, 496, 587–600, 2011.

[15] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Introduction*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPintro.pdf`

[16] Perrin Daniel *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Géométrie projective linéaire*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie1.pdf`

[17] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Les invariants de la géométrie projective linéaire*, 2014.

http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie2.pdf

[18] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Les géométries non euclidiennes*, 2014.
http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie4.pdf

[19] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, La géométrie euclidienne*, 2014.
http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie5.pdf

[20] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, La géométrie anallagmatique*, 2014.
http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie6.pdf

[21] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Postface*, 2014.
http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPostface.pdf

[22] Perrin Daniel *Quelles mathématiques pour la formation des maîtres*, Conférence en l'honneur de Michèle Artigue, 2012.
http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Artigue2012.pdf

[23] Perrin Daniel, *Problèmes ouverts : pourquoi et comment*, 2015
http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/IREM2015/IREM2015redaction.pdf

[24] Perrin Daniel, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[25] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.

[26] Perrin Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), 2050.

Je remercie vivement Marie-Jeanne Perrin-Glorian pour sa lecture critique et ses remarques nombreuses et pertinentes.