Sur le théorème de Céva

Daniel PERRIN

On travaille sur un corps commutatif k quelconque.

1. Un lemme sur les involutions.

Lemme 1.
Soit D une droite projective et soient α, β, γ, α', β', γ' six points distincts de D. Soit $f : D \to D$ l'homographie définie par $f(\alpha) = \alpha'$, $f(\beta) = \beta'$, $f(\gamma) = \gamma'$. Alors f est une involution si et seulement si on a la relation suivante entre birapports :

$$(*) \qquad [\alpha, \beta, \gamma, \gamma']\,[\beta, \gamma, \alpha, \alpha']\,[\gamma, \alpha, \beta, \beta'] = -1.$$

Démonstration. On vérifie que la relation $(*)$ équivaut à

$$[\gamma', \alpha', \beta, \gamma] = [\gamma', \beta', \gamma, \alpha]^{-1} = [\gamma', \beta', \alpha, \gamma] = [\gamma, \alpha, \beta', \gamma']$$

(on peut supposer, pour la commodité du calcul, que les points sont à distance finie). Il en résulte que l'homographie qui envoie γ' sur γ, α' sur α, β sur β' envoie aussi γ sur γ'. C'est donc une involution. Mais alors elle envoie α sur α', donc cette involution n'est autre que f.

Remarque 2. On peut affaiblir l'hypothèse que les six points sont distincts.

2. Désargues et concourance.

Théorème 3.
Soient a, b, c trois points non alignés d'un plan projectif P et soient a', b', c' des points de (bc), (ca) et (ab) respectivement, distincts de a, b, c. Soit D une droite de P ne passant ni par les points a, b, c, a', b', c', ni par les points d'intersections de (aa'), (bb'), (cc') ("la sécante"). La droite D coupe respectivement (bc), (ca), (ab), (aa'), (bb'), (cc') en des points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ (voir figure).
Alors les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes si et seulement si l'homographie de D qui envoie α sur α', β sur β', γ sur γ' est une involution.

Démonstration. Supposons $(aa'), (bb'), (cc')$ concourantes en d. Alors le résultat n'est rien d'autre que le théorème de Desargues sur les pinceaux de coniques, appliqué au pinceau défini par les quatre points a, b, c, d dont les trois coniques dégénérées $(ab) \cup (cd)$, $(ac) \cup (bd)$ et $(ad) \cup (bc)$ découpent sur D des points en involution.

La réciproque est facile en utilisant encore le théorème de Desargues.

Application.

On déduit du théorème 3 la concourance des hauteurs d'un triangle. Pour cela on plonge le plan affine euclidien dans un plan projectif et on prend pour D la droite de l'infini. L'involution sur D_∞ est l'orthogonalité.

Corollaire 4.
Avec les notations ci-dessus, les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes si et seulement si on a la relation

$$(*)\qquad [\alpha,\beta,\gamma,\gamma']\,[\beta,\gamma,\alpha,\alpha']\,[\gamma,\alpha,\beta,\beta'] = -1,$$

ou encore la relation

$$(**)\qquad [b,a,\gamma,c']\,[c,b,\alpha,a']\,[a,c,\beta,b'] = -1.$$

Démonstration. Le premier point vient du lemme 1 (car les six points $\alpha,\cdots,\gamma'$ sont distincts). Pour le second on montre successivement les égalités $[\alpha,\beta,\gamma,\gamma'] = [b,a,\gamma,c']$, $[\beta,\gamma,\alpha,\alpha'] = [c,b,\alpha,a']$ et $[\gamma,\alpha,\beta,\beta'] = [a,c,\beta,b']$ en utilisant les perspectives de centres c,a,b.

3. Le théorème de Céva.

Il s'agit de la variante usuelle de la relation $(**)$:

Théorème 5.
Soient a,b,c trois points non alignés d'un plan affine Π et soient a',b',c' des points de (bc), (ca) et (ab) respectivement, distincts de a,b,c.
Alors les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a l'égalité :

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1.$$

Démonstration. On plonge Π dans un plan projectif P et on applique la formule $(**)$ du corollaire 4 en prenant pour D la droite de l'infini. Comme les points α,β,γ sont à l'infini les birapports se réduisent aux rapports de mesures, par exemple $[b,a,\gamma,c'] = \dfrac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$.

Conclusion.

Le théorème de Céva, sous la forme des variantes énoncées au corollaire 4 apparaît bien comme un énoncé projectif ! Le théorème 5 n'est affine que parce qu'on particularise la droite D (la sécante) en la prenant à l'infini. Cela montre, s'il en était besoin, que l'infini n'est pas une notion projective, mais affine.