Quelques réflexions sur la géométrie et son enseignement

Daniel PERRIN

0. Introduction.

Le thème de ce texte est d'abord une réflexion mathématique sur la nature de la géométrie, à la lumière du programme d'Erlangen de Félix Klein et de la notion d'invariant.
Mais ce texte se veut aussi un élément d'un débat sur l'enseignement de la géométrie : pourquoi et comment enseigner cette discipline dans l'enseignement secondaire ? L'importance de ce débat m'est apparue en fréquentant certaines commissions ministérielles où s'élaborent les changements de programme. Il m'a semblé en effet que ceux-ci n'étaient pas toujours opérés après une réflexion suffisante[1]. Il est d'autant plus indispensable d'éclaircir nos positions en ces temps où l'allégement des programmes est à l'ordre du jour et où certains verraient volontiers la géométrie et les mathématiques en général réduites à la portion congrue.
Mon propos n'est pas de discuter ici quels arguments on peut avancer en faveur d'un enseignement de la géométrie au collège et au lycée, mais d'examiner le contenu de l'enseignement de la géométrie élémentaire du point de vue d'un mathématicien. Ce qui m'a convaincu de la nécessité d'un tel travail de clarification c'est une référence historique au débat qui, dans les années 1950-60, a précédé l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement. Bien que ce débat ait été mené de manière large et profonde par les différents acteurs, il est clair, *a posteriori* qu'il a été insuffisant sur deux points au moins. C'est le cas d'abord sur le plan didactique et pédagogique. Il est clair, en particulier, que l'introduction de l'algèbre linéaire au lycée se heurte à des difficultés didactiques profondes (c'est encore le cas à l'université) que les auteurs de la réforme n'avaient pas prévues et il a fallu renoncer à cette introduction précoce. Je considère qu'il s'agit là de faits maintenant bien établis et je n'y reviendrai pas.
Mais, au-delà de ces difficultés liées à l'enseignement, je crois que, même sur le plan mathématique, la réflexion à l'époque a été insuffisante. En particulier, cette réforme, sous couvert d'un dépoussiérage et d'un changement de point de vue sans doute nécessaires, a évacué, dès le début, une grande partie du contenu de la géométrie, sans que la plupart de ses promoteurs ne mesurent que le changement ainsi opéré était qualitativement essentiel.
C'est donc aussi en pensant à cette réforme, dont l'échec pèse encore aujourd'hui sur l'enseignement des mathématiques, que je vais mener la réflexion qui suit.

[1] Je pense notamment cela à propos de la suppression récente de la notion de fonction continue en terminale S.

1. Géométrie, groupes et invariants.

Mon objectif, ici, est d'analyser les résultats de la géométrie élémentaire, leur cohérence et leur unité. Les points que je vais développer concernant groupes et invariants sont bien connus depuis plus d'un siècle, mais pas toujours explicités par les mathématiciens et rarement enseignés à l'université, même en formation des maîtres.

a) Introduction.

Le point de vue qui a le plus influencé la géométrie jusqu'à une époque relativement récente est celui des grecs. Il est centré sur les deux notions de figure et de démonstration et repose sur un système d'axiomes, celui d'Euclide (dont on a une version totalement rigoureuse depuis les travaux de Hilbert).
Un autre point de vue, plus récent, est celui de la géométrie analytique[2], initié par Descartes. Dans l'enseignement français les deux points de vue ont longtemps cohabité, de manière plus ou moins conflictuelle, certains répugnant à l'usage du calcul en géométrie. Voici ce qu'écrit par exemple Jean-Jacques Rousseau dans Les confessions :
Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais pas cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle. La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite ; mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes ; autrement je n'y comprenais plus rien.
D'une certaine façon, je vais prendre exactement le contrepied de cette position, en cherchant à déterminer, dans les théorèmes de géométrie, quelles sont les formules algébriques sous-jacentes. L'objectif de cet effort est de parvenir à une classification de ces résultats, qui sinon peuvent sembler disparates et anecdotiques.

L'étape historique suivante a été l'introduction des notions vectorielles et affines (au dix-neuvième siècle). Ces notions représentent du point de vue mathématique une simplification considérable du système d'axiomes. Au niveau de la géométrie élémentaire, le simple apport de la structure vectorielle du plan donne déjà une multitude de résultats par la simple utilisation des outils vectoriels et affines (relation de Chasles, utilisation des bases, barycentres, etc.)
Le lien entre le point de vue vectoriel et celui de la géométrie analytique s'effectue alors *via* les repères (orthonormés ou non).

Je vais m'intéresser ici à la géométrie plane, essentiellement dans un plan affine euclidien, et je n'hésiterai pas à utiliser un repère (c'est-à-dire une origine et deux vecteurs de base), donc des coordonnées, ce qui revient finalement à travailler dans $\mathbf{R}^2$. Bien entendu on sait que, selon le problème, il peut être intéressant de

[2] Il serait plus exact de dire algébrique sans doute, si ce terme n'avait pris une autre dimension.

changer de repère. La question est donc de savoir quels changements de repère on s'autorise. C'est essentiellement la perspective du programme d'Erlangen dont je vais parler maintenant.

b) Le programme d'Erlangen.

Il s'agit de la dissertation inaugurale de Félix Klein soutenue à Erlangen en 1872 (il a 23 ans). La thèse de Klein est qu'une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X, les éléments de G étant les transformations "permises" dans la géométrie en question. Il s'agit, par exemple, des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou des isométries affines pour la géométrie euclidienne plane ou encore des homographies pour la géométrie projective. Le plus souvent, l'ensemble X est muni de données supplémentaires, par exemple un ensemble $\mathcal{D}$ de parties remarquables (les droites, les cercles,...) et les transformations de G conservent globalement $\mathcal{D}$. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projectives) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe, ainsi que le dit Klein (cf. [K] p.7) :
"*Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*"
Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, Pappus, qui n'emploie que les notions de concourance et d'alignement, est un théorème projectif tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien.
On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une niche écologique privilégiée qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité. C'est le cas, par exemple, du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit. Ce théorème s'énonce d'abord dans un cercle : si a, b, c, a', b', c' sont six points d'un cercle et si les droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, resp. (ab') et $(a'b)$) se coupent en u (resp. v, resp. w), les points u, v, w sont alignés.
Il n'est pas difficile de montrer ce théorème dans ce cadre par des arguments d'angles (voir par exemple le problème du CAPES interne de 1991) c'est alors un théorème euclidien.
Il est clair cependant que ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité. On peut en effet le montrer aussi pour une ellipse, à partir du cas du cercle, soit par projection en utilisant un cône, soit en utilisant une affinité orthogonale. C'est devenu un théorème affine.
On peut enfin le montrer pour une parabole ou une hyperbole, toujours par projection, ou en se plaçant dans le plan projectif et en transformant l'ellipse par une homographie[3].

[3] En fait, le plus simple pour prouver ce théorème c'est de le faire pour une conique quelconque du plan projectif (dans ce cadre ellipse, parabole, hyperbole sont toutes équivalentes). C'est finalement la démonstration la plus facile, ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est ici débarassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles et qu'il se démontre en utilisant l'invariant fondamental associé à une conique : le birapport.

L'utilisation systématique des groupes de transformations permet, comme on vient de le voir sur cet exemple, d'obtenir de nouveaux théorèmes simplement en faisant agir le groupe. C'est ce que note Chasles avec un brin d'amertume (cf. [C] p. 268) : *Aujourd'hui, chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque, et la soumettre aux divers principes généraux de transformation ; il en retirera d'autres vérités, différentes ou plus générales ; et celles-ci seront susceptibles de pareilles opérations ; de sorte qu'on pourra multiplier, presque à l'infini, le nombre des vérités nouvelles déduites de la première ...*
Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie ; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice.

c) Les invariants, version naïve.

Lorsque l'on a reconnu, avec le groupe des transformations permises, dans quel type de géométrie on travaille, le pas suivant est d'examiner quels sont les invariants de cette géométrie.
Considérons d'abord ces invariants en un sens intuitif. Il s'agit simplement alors des notions qui sont conservées par les transformations du groupe en question. Dans tous les cas qui nous intéressent, les groupes considérés sont formés d'applications linéaires ou déduites de celles-ci (applications affines, homographies). Ces applications conservent donc les structures vectorielles (resp. affines, projectives), notamment les propriétés d'alignement, les barycentres, etc. Nous examinons ici les invariants qui s'ajoutent à cette structure première qu'est la structure vectorielle, dont on a déjà dit qu'elle donne à elle seule un certain nombre de résultats. Nous verrons cependant que cette structure vectorielle en elle-même est assez pauvre. En revanche, dès qu'on ajoute "du second degré " (en introduisant des formes quadratiques), la géométrie devient beaucoup plus riche.

Dans le cas de la géométrie euclidienne les invariants les plus immédiats sont les notions usuelles de longueur, d'orthogonalité ou plus généralement d'angle (orienté ou non selon qu'on considère les isométries positives ou négatives).
Dans le cas de la géométrie affine, les notions de longueur et d'angle ne sont plus des invariants, mais on dispose d'un (semi-)invariant qui est l'aire (algébrique) des triangles, vue comme (moitié du) déterminant de deux vecteurs[4]. C'est un semi-invariant seulement car si u est une transformation affine quelconque, l'aire est multipliée par $\text{dét}\, u$ (mais c'est un vrai invariant pour les transformations affines de déterminant 1, ou encore, le rapport d'aires est un invariant).
Dans le cas de la géométrie projective l'invariant fondamental est le birapport de quatre points (dont un avatar est la notion de division harmonique), nous y reviendrons plus loin.

d) Invariants naïfs et théorèmes.

Dès que l'on est amené à faire des démonstrations en géométrie on se rend compte de l'intérêt d'employer les invariants de la géométrie concernée.

Ainsi, en géométrie euclidienne on utilise évidemment longueurs et angles.
Montrons par exemple, en utilisant les angles orientés de droites, le concours des hauteurs d'un triangle. On considère un triangle abc et les hauteurs bb' et cc' qui se

[4] C'est aussi le produit vectoriel, mais cette notion n'a pas vraiment de sens hors du cadre euclidien.

coupent en h. On a les égalités suivantes : $(ah, bc) = (ah, bb') + (bb', bc)$ (Chasles), $(bb', bc) = (c'b', c'c) = (c'b', c'h) = (ab', ah)$ (angle inscrit). On en déduit, par Chasles, $(ah, bc) = (ab', bb') = \pi/2$, ce qui montre que ah est bien la hauteur issue de a.
Un raisonnement du même type permet de montrer le fait que le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit.

De la même façon, en géométrie affine on utilise très souvent la notion d'aire.
Montrons par exemple le concours des médianes d'un triangle. On note d'abord qu'un point o est sur la médiane aa' du triangle abc si et seulement si on a l'égalité des aires (algébriques) $\mathcal{A}(aob) = \mathcal{A}(aoc)$. On reprend alors les notations précédentes avec les médianes au lieu des hauteurs et on note g le point d'intersection de aa' et bb'. On a alors, $\mathcal{A}(gab) = \mathcal{A}(gbc) = \mathcal{A}(gac)$, d'où le résultat.
De la même manière, un argument d'aires montre le théorème de Thalès.

En géométrie projective enfin, on utilise le birapport.
Voici par exemple une démonstration du théorème de Pappus (le même raisonnement donne aussi le théorème de Pascal pourvu qu'on connaisse le birapport de quatre points sur une conique).
Les perspectives de centre a de $(a'b)$ sur $(a'b')$ et de centre c de $(a'b')$ sur (bc') donnent les égalités de birapports : $[a', w, x, b] = [a', b', c', s] = [y, u, c', b]$. On conclut en notant que la perspective de centre v est la composée des précédentes, donc qu'elle envoie w sur u, ce qui montre que u, v, w sont alignés.

Deux questions fondamentales se posent, par rapport à ces pratiques familières :
1) Nous avons, dans chacun des cas, repéré certains invariants de la géométrie donnée. Mais, n'y a-t'il pas d'autres invariants que ceux trouvés ? Comment être sûr que certains n'ont pas échappé à notre attention ?
2) Nous avons utilisé les invariants pour montrer les théorèmes ci-dessus, mais ce recours aux invariants est-il obligatoire ?

Il est à peu près impossible de répondre à ces questions dans le cadre naïf dans lequel nous nous sommes placés. C'est pourquoi nous allons maintenant quitter le cadre géométrique pour retrouver un cadre algébrique plus formel où ces questions vont recevoir des réponses mathématiques précises.

e) Les invariants, version polynômes.

Il s'agit de la théorie des invariants associés à un groupe. Cette théorie a été fondée vers le milieu du dix-neuvième siècle par Cayley, Sylvester et Hermite. Elle est au centre de ce que nous avons en vue ici.

Expliquons-en le principe dans le cas de la géométrie euclidienne plane.

Lorsqu'on travaille en géométrie euclidienne on considère au départ des points donnés du plan. Prenons l'exemple le plus simple : celui de la géométrie d'un triangle a, b, c. Ces points sont décrits par leurs coordonnées dans un repère orthonormé[5] o, e_1, e_2: $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ ... Les points $a, b, c, \cdots$ étant

[5] Pour simplifier on prendra souvent a comme origine, ce qui revient à bannir les translations du groupe des isométries (sinon il faut remplacer dans les formules les points $b, c, \cdots$ par les vecteurs $b - a, c - a, \cdots$, cf. annexe 3)

arbitraires on peut considérer leurs coordonnées comme des indéterminées et nombre de constructions géométriques usuelles de points du plan à partir des données (par intersections de droites, cercles, ...) conduisent à des points dont les coordonnées sont des polynômes ou des fractions rationnelles en les $a_i, b_i, c_i, ...$ (c'est le cas par exemple pour le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit ou l'orthocentre du triangle a, b, c, cf. annexe 3). Dans tous les cas, ces coordonnées sont des fonctions des $a_i, b_i, c_i \cdots$.
Choisissons maintenant a comme origine pour simplifier les calculs. Le groupe G des isométries (vectorielles) agit linéairement sur les coordonnées des points $b, c, \cdots$ par l'intermédiaire des matrices orthogonales, ainsi la rotation de centre a et d'angle θ s'écrit

$$\rho(b_1, b_2) = (\cos\theta\ b_1 - \sin\theta\ b_2, \sin\theta\ b_1 + \cos\theta\ b_2).$$

Plus généralement, si u a pour matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a

$$u(b_1, b_2) = (\alpha b_1 + \beta b_2, \gamma b_1 + \delta b_2).$$

On en déduit une action de G sur l'anneau de polynômes $\mathbf{R}[b_1, b_2]$ (et sur le corps des fractions rationnelles, ou plus généralement sur les fonctions de b_1 et b_2) définie au moyen des formules ci-dessus. Précisément, si P est un polynôme et u une isométrie, on pose :

$$(u.P)(b_1, b_2) = P(u^{-1}(b_1, b_2)),$$

où le passage à l'inverse est là pour des raisons de variance, c'est-à-dire pour avoir $uv.P = u.(v.P)$. Bien entendu G opère aussi sur $\mathbf{R}[b_1, b_2, c_1, c_2]$ en posant

$$(u.P)(b_1, b_2, c_1, c_2) = P\big(u^{-1}(b_1, b_2), u^{-1}(c_1, c_2))\big)$$

et on a évidemment une définition analogue avec un nombre quelconque de points.

On désigne simplement par le mot **invariants** les polynômes (ou les fractions rationnelles, voire les fonctions) invariants par cette action. En fait, ces invariants ont un sens géométrique (cf. aussi annexe 1), c'est ainsi qu'on retrouve parmi eux les produits et carrés scalaires $(b|c) = b_1c_1 + b_2c_2$, $(b|b) = b_1^2 + b_2^2$ et $(c|c) = c_1^2 + c_2^2$, ce qui montre que les invariants algébriques ne sont rien d'autre, bien entendu, que les invariants naïfs vus ci-dessus : angle non orienté et longueur.

Le premier point fondamental de la théorie des invariants, dans le cas du groupe orthogonal comme d'ailleurs de tous les groupes dits "classiques" qui gouvernent les géométries usuelles, c'est qu'on sait déterminer explicitement **tous** les invariants. Dans le cas où l'on part de deux points b et c (en plus de l'origine a) les invariants du groupe $O(2, \mathbf{R})$ de toutes les isométries s'expriment polynomialement à partir des produits et carrés scalaires[6] $(b|c)$, $(b|b)$ et $(c|c)$. Pour le groupe des rotations

[6] Il est facile de voir que toute fonction $f(b_1, ..., c_2)$, invariante par $O(2)$ s'écrit sous la forme $g\big(\,(b|b), (c|c), (b|c)\,\big)$. Ce fait n'est rien d'autre que le premier cas d'égalité des triangles, résultat fondamental injustement oublié de nos jours, cf. annexe 1 pour une discussion ! Si f est un polynôme, on montre que g en est un aussi, mais c'est un peu moins évident, cf. [W].

$O^+(2, \mathbf{R})$ il y a, en plus, le polynôme $b \wedge c = b_1c_2 - b_2c_1$ (qui correspond au sinus de l'angle orienté ou encore à l'aire algébrique du triangle abc). Ce n'est pas un invariant pour $O(2)$, mais tout de même un semi-invariant : il est transformé en son opposé par une isométrie négative.
Ces résultats donnent déjà la réponse à la question 1) du paragraphe d) : les invariants distance et angle sont bien, dans le cas de la géométrie euclidienne d'un triangle, les seuls possibles.

Dans le cas de la géométrie affine du plan, avec deux points b et c (a étant toujours pris comme origine) il y a un seul invariant pour les transformations affines de déterminant 1 qui est le déterminant $b \wedge c = b_1c_2 - b_2c_1$ (qui correspond comme on l'a vu à l'aire algébrique du triangle abc).

f) Relations et théorèmes.

Il y a deux idées fondamentales qui justifient l'importance de la théorie des invariants. Reprenons le cas de la géométrie euclidienne, avec une origine a et deux points b et c.

Idée 1 : points et invariants.

Comme les points b et c ont des coordonnées indéterminées, l'origine a et les points b, c forment un repère affine du plan.
On montre facilement que les coordonnées **dans ce repère** des points construits, par des constructions usuelles de la géométrie euclidienne, à partir des points base sont des polynômes ou des fractions rationnelles en les indéterminées $b_i, c_i, \cdots$ (et en tous cas des fonctions des b_i, c_i) qui sont des **invariants**, cf. annexe 2. Par exemple, le pied a'' de la hauteur du triangle abc issue de a a pour coordonnée sur le vecteur b

$$x = \frac{c_1^2 + c_2^2 - b_1c_1 - b_2c_2}{b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 - 2b_1c_1 - 2b_2c_2}$$

dont on vérifie aussitôt qu'il s'agit bien d'une fraction rationnelle invariante qui s'écrit en fonction des produites et carrés scalaires

$$x = \frac{(c|c) - (b|c)}{(b|b) + (c|c) - 2(b|c)}.$$

On retrouve ce type de formules avec les droites remarquables du triangle et leurs points de concours (centre de gravité, centre du cercle circonscrit, ou orthocentre), cf. annexe 3.

Idée 2 : théorèmes et syzygies.

On montre, facilement là encore, que toutes les propriétés usuelles de géométrie (alignement ou cocyclicité de points, concourance de droites) s'expriment comme des **relations**[7], polynomiales elles aussi, entre les coordonnées des points en question (ou les coefficients des droites). Par exemple, dire que les points $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ sont alignés c'est dire que le déterminant 3×3 suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

[7] On dit aussi des syzygies.

Le lecteur se reportera à l'annexe 2 pour des précisions.

Pour illustrer ce principe, voici la démonstration en termes de relations entre invariants, du concours des médianes et des hauteurs du triangle.

Exemple 1 : les médianes.

On considère un triangle a, b, c. Dire que l'origine o du plan est sur la médiane de bc signifie qu'on a $a \wedge (b+c) = 0$ (cette relation n'est rien d'autre que l'égalité d'aires vue au paragraphe d)). Or, on a la relation

$$a \wedge (b+c) + b \wedge (c+a) + c \wedge (a+b) = 0$$

qui traduit la bilinéarité et l'antisymétrie du déterminant, de sorte que si on prend pour origine l'intersection de deux des médianes, elle est aussi sur la troisième.

Exemple 2 : les hauteurs.

On considère un triangle a, b, c. Dire que l'origine o du plan est sur la hauteur issue de b signifie qu'on a $(b|a-c) = 0$. Or on a la relation

$$(b|a-c) + (c|b-a) + (a|c-b) = 0$$

qui traduit la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, de sorte que si on prend pour origine l'intersection de deux des hauteurs elle est aussi sur la troisième.

g) Relations et théorèmes, suite.

L'intérêt d'avoir identifié les théorèmes d'une géométrie et les relations entre les invariants de cette géométrie vient alors du second résultat fondamental de la théorie des invariants. En effet, ce résultat affirme que, dans toutes les géométries usuelles, non seulement les invariants sont connus, mais encore les relations entre eux le sont aussi. Par exemple, dans le cas de la géométrie euclidienne plane avec seulement deux points base b, c en plus de l'origine, il n'y en a aucune pour les invariants $(b|b)$, $(c|c)$ et $(b|c)$ relatifs à $O(2)$ (hormis la bilinéarité et la symétrie). Dans le cas de $O^+(2)$ où l'on a l'invariant supplémentaire $b \wedge c$, elles se déduisent toutes de la relation

$$(b|c)^2 + (b \wedge c)^2 = (b|b)(c|c), \tag{1}$$

(identité de Lagrange) qui n'est autre que la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. (On se reportera à [W] pour toutes précisions sur ces questions. Les invariants du groupe orthogonal $O(2)$ sont toujours les produits et carrés scalaires, mais à partir de 3 points il y a des relations non banales entre eux. Par exemple, pour trois points b, c, d le déterminant de Gram 3×3 formé avec les produits scalaires de b, c, d est nul, cf. annexe 1.)
Ce qu'affirme la théorie c'est qu'on peut, en principe, obtenir mécaniquement tous les théorèmes de géométrie à partir de ces invariants et de leurs relations.

h) Autres exemples en géométrie euclidienne.

Un exemple un peu moins évident consiste à montrer que la relation fondamentale (1) ci-dessus est exactement la traduction analytique, dans le cas du triangle a, b, c avec $a = (0, 0)$, de la célèbre propriété de la droite d'Euler : le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle a, b, c sont alignés, cf. annexe 3. De même, le théorème affirmant que le symétrique de l'orthocentre du triangle par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit est lui aussi une traduction de la relation[8] (1).

i) Invariants et syzygies, encore un exemple.

Cet exemple, qui est peut-être plus convaincant encore que les précédents, est issu de la géométrie anallagmatique, c'est-à-dire celle de l'inversion, ou encore de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (le plan complexe plus un point à l'infini). Le groupe correspondant est le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies (à coefficients complexes) $z \mapsto \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, avec les conventions usuelles sur le point à l'infini[9].
Un invariant bien connu de ce groupe est le birapport :

$$[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a},$$

avec là encore les conventions usuelles sur le point à l'infini[10]. Lorsque a, b, c, d sont 4 points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}$, il est facile de calculer l'argument de $[a, b, c, d]$ en termes d'angles orientés de vecteurs et on en déduit que les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.
Si a, b, c, d, p, q, r, s sont 8 indéterminées on a une belle relation entre les birapports :

$$(2) \qquad [abrs]\,[bcps]\,[caqs]\,[pqcd]\,[qrad]\,[rpbd] = 1.$$

(c'est facile, il suffit de l'écrire et de constater que tous les termes entre numérateur et dénominateur se simplifient).
Cette relation entre les invariants (que j'appelle théorème des six birapports) est là encore source de nombreux théorèmes géométriques ; citons par exemple le suivant dans lequel on a pris $s = \infty$:

---

8 Je ne comprends pas bien pourquoi cette relation, en principe liée au groupe $O^+(2)$, intervient de façon aussi essentielle dans des résultats qui sont pourtant invariants par $O(2)$. Un élément de réponse est de noter que $a \wedge b$ est un semi-invariant de $O(2)$. De plus, le phénomène est sans doute lié à la description des quotients de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ par $O(2)$ et $O^+(2)$, cf. annexe 1. C'est un point qu'il serait intéressant de creuser en faisant d'autres calculs pour voir comment s'expriment les théorèmes élémentaires de la géométrie du triangle en termes d'invariants.

9 Le groupe $PGL(2, k)$ est le quotient du groupe $GL(2, k)$ des matrices 2×2 inversibles par le sous-groupe des homothéties et il s'identifie au groupe des homographies de la droite projective $\mathbf{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$. Dans le cas complexe il faut aussi considérer les anti-homographies, et notamment les inversions, qui s'écrivent sous la même forme, mais avec $\overline{z}$ au lieu de z

10 Le birapport est aussi un invariant du groupe $O^+(2)$, ou du groupe des déplacements (affines) du plan, comme on le voit en l'écrivant à l'aide des produits du type $a\overline{a}$, $a\overline{b}$ etc. Ce fait important explique que les théorèmes de la géométrie anallagmatique sont aussi des théorèmes de la géométrie euclidienne.

Soient a, b, c trois points non alignés du plan et p, q, r trois points distincts de a, b, c, situés respectivement sur les droites bc, ca, ab. Alors les cercles circonscrits aux triangles cpq, brp, aqr ont un point commun d (appelé le "pivot").
Il y a une kyrielle de résultats classiques et spectaculaires qui ne sont que des avatars de la formule (2) : le théorème de la droite de Simson, celui des 6 cercles de Miquel, cf. annexe 4. Là encore, comme avec la formule (1), on a vraiment l'impression que tous les théorèmes de cocyclicité-alignement de ce style ne sont que des variantes de cette relation entre les birapports.

j) Conclusion.

Cette constatation que nombre de propriétés géométriques se réduisent à quelques relations algébriques simples fait dire à N. Bourbaki (dans ses éléments d'histoire des mathématiques) que la géométrie élémentaire est morte :
Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies" de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire. Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

Je suis largement en accord avec ce texte, mais avec quelques réserves toutefois.

D'abord, je suis persuadé que les résultats simples et élégants du point de vue géométrique ont de bonnes chances de correspondre aux résultats simples et élégants du point de vue algébrique. C'est, en tous cas, ce qui semble ressortir des exemples ci-dessus. Bien entendu, ceci n'est qu'une opinion qu'il conviendrait de préciser (qu'est-ce qu'un résultat élégant, qu'une relation simple ?) et d'étayer par d'autres exemples. En fait, côté algébrique il y a une notion assez naturelle de simplicité pour une relation polynomiale : c'est une relation de petit degré. On peut alors décréter qu'un résultat géométrique sera dit simple (ou élégant) s'il correspond à une telle relation. La question est alors transformée ainsi : énumérer (et interpréter) les théorèmes de géométrie élémentaire les plus élégants pour voir si tous sont bien réputés tels par la tradition ou, en sens inverse, interpréter géométriquement les relations algébriques les plus simples, par exemple la nullité du déterminant de Gram évoqué ci-dessus ou la relation

$$(b \wedge c)(a \wedge d) + (c \wedge a)(b \wedge d) + (a \wedge b)(c \wedge d) = 0$$

de la géométrie affine à quatre points base. Il est clair cependant, au vu des exemples qui précèdent, que cette tentative d'énumération sera rendue difficile par la profusion d'habits géométriques différents que peuvent revêtir les mêmes résultats algébriques simples.

Un autre point sur lequel Bourbaki est muet et qui me paraît fondamental pour la géométrie élémentaire, c'est le fait que, dans certaines géométries, le groupe fondamental possède plusieurs variantes, ce qui n'est pas sans conséquences sur les invariants et partant sur la géométrie. C'est ce que je vais expliquer dans les paragraphes suivants.

2. Quels groupes.

a) Groupes classiques et isomorphismes.

Les groupes qui interviennent dans les géométries usuelles sont essentiellement les groupes dits classiques (et leurs sous-groupes finis). En effet, on se limite d'abord aux groupes dont la loi de composition est suffisamment régulière (analytique, voire polynomiale) : ce sont les groupes de Lie. Selon la classification d'Élie Cartan, ces groupes de Lie sont repérés par des objets combinatoires qu'on appelle systèmes de racines et qui comprennent 4 séries infinies notées A_n, B_n, C_n, D_n, pour $n \in \mathbf{N}$, (qui correspondent aux groupes dits classiques) et 5 systèmes isolés G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 (qui correspondent aux groupes dits exceptionnels). Les groupes classiques en question sont, à des variantes près, le groupe linéaire $GL(n, \mathbf{R})$ et ses sous-groupes usuels, orthogonaux $O(q)$ (relatifs à une forme quadratique q euclidienne ou non) et symplectiques $Sp(f)$ (relatifs à une forme alternée f).
En dimension $n > 5$ les groupes considérés sont tous distincts et non isomorphes (cf. [D] §9), mais, en dimension ≤ 5 apparaissent un certain nombre d'isomorphismes exceptionnels non triviaux (qui proviennent de la collision de certaines structures, faute de place). On consultera [D] §8 pour une liste exhaustive de ces isomorphismes.

b) Trois isomorphismes remarquables.

Parmi les isomorphismes en question on retiendra les 3 suivants (cf. [D] *loc. cit.* ou [P] Ch. VII, VIII pour une description algébrique de ces isomorphismes).
1) Si q désigne la forme de Lorentz sur $\mathbf{R}$ (ou un corps k quelconque de caractéristique $\neq 2$) en 3 variables : $q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - Z^2$ on a un isomorphisme de son groupe orthogonal direct avec le groupe des homographies à coefficients dans k :

$$O^+(q) \simeq PGL(2, k).$$

2) Si q désigne la forme hyperbolique $q(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2$ en 4 variables (sur un corps k quelconque de caractéristique $\neq 2$) on a un isomorphisme de son groupe orthogonal avec le produit de deux copies du groupe des homographies à coefficients dans k :

$$O(q) \simeq PGL(2, k) \times PGL(2, k).$$

3) Si q désigne la forme de Lorentz sur $\mathbf{R}$ en 4 variables : $q(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2$ on a un isomorphisme de son groupe orthogonal direct avec le groupe des homographies à coefficients complexes :

$$O^+(q) \simeq PGL(2, \mathbf{C}).$$

3. Interprétation géométrique des isomorphismes.

Les isomorphismes 1) et 3) ci-dessus étaient bien connus de Klein qui évoque le premier §IV p. 13 et §V p. 15, et le second §VI p. 20-21. Le deuxième l'était sans doute aussi, mais c'est moins apparent (cf. §IV p. 14 une variante liée à cet isomorphisme).

a) L'isomorphisme 1) .

Disons rapidement à quoi il correspond. Le groupe $PGL(2, \mathbf{R})$ est le groupe des homographies d'une droite projective réelle, l'invariant fondamental étant le birapport. Le groupe $O(q)$ ou plutôt sa variante projective $PO(q)$ correspond, lui, aux homographies du plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ (avec les coordonnées homogènes (x, y, t)) qui conservent la conique projective C d'équation $x^2 + y^2 - t^2 = 0$ (c'est le cercle, vu dans l'espace projectif). Le lien entre les deux se voit avec le dessin suivant qui permet de mettre en bijection la conique et une droite et de définir le birapport de 4 points de la conique.

b) L'isomorphisme 2).

Cette fois $O(q)$ est le groupe des homographies de $\mathbf{P}^3(k)$ qui conservent la quadrique projective Q d'équation $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$. On sait qu'une telle quadrique contient deux familles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ de droites projectives avec des propriétés d'incidence remarquables : par chaque point de Q passe une droite de chaque famille, deux droites d'une même famille ne se rencontrent pas, deux droites de deux familles distinctes se rencontrent toujours en un point. Choisissons alors une droite $D \in \mathcal{D}$ et une droite $E \in \mathcal{E}$ de familles distinctes. On a une bijection de E sur $\mathcal{D}$ (resp. de D sur $\mathcal{E}$) en associant à un point e de E l'unique droite de $\mathcal{D}$ passant par e et de même pour l'autre cas. Ces bijections permettent de munir $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ de structures de droites projectives (en particulier de définir le birapport de 4 droites). Si u est une homographie directe qui conserve Q on montre qu'elle laisse stable les deux familles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ et que ses restrictions à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$, considérées comme des droites projectives, sont des homographies, de sorte qu'on associe bien à u deux éléments de $PGL(2, k)$, ce qui décrit l'homomorphisme cherché.

c) L'isomorphisme 3).

C'est peut-être le plus intéressant. On a vu que $PGL(2, \mathbf{C})$ est le groupe de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}}$, avec comme invariant le birapport. On a noté aussi l'importance des cercles et des droites (correspondant au cas du birapport réel) dans cet espace. Cela conduit à considérer les équations des droites et des cercles du plan sous la forme unifiée :

$$a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$$

de sorte que les droites et les cercles apparaissent comme des points (a, b, c, d) de $\mathbf{R}^4$ (ou plutôt de l'espace projectif associé $\mathcal{E} = \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ puisque deux équations proportionnelles définissent le même objet). De plus, sur cet espace il y a une forme quadratique naturelle q, à savoir le carré du rayon $R^2 = b^2 + c^2 - ad$ qui est une forme de type Lorentz. Étudions de plus près la signification des éléments de $\mathcal{E}$ vis à vis de q.

Il y a d'abord les points correspondant à $R^2 > 0$ qui sont de deux sortes : les cercles (c'est le cas $a \neq 0$) et les droites ($a = 0$). Il y a ensuite les points correspondant à $R^2 < 0$, ce sont les moins intéressants, ils représentent des cercles imaginaires. Il y a enfin les points correspondant aux isotropes, $R^2 = 0$, dont on vérifie qu'ils sont en bijection avec $\widehat{\mathbf{C}}$ par l'application qui à $b + ic$ associe $(1, b, c, b^2 + c^2)$ et au point à l'infini le point $(0, 0, 0, 1)$ de $\mathcal{E}$.
On a donc construit un espace $\mathcal{E}$ dans lequel on retrouve comme points à la fois tous les points de $\widehat{\mathbf{C}}$ et toute une famille de parties (tous les cercles et toutes les droites : on parlera des cercles-droites pour abréger).
Il y a mieux. On peut interpréter l'orthogonalité par rapport à la forme polaire φ de q. On montre que deux cercles-droites sont orthogonaux s'ils le sont au sens ordinaire (en un mot : si leurs tangentes sont orthogonales) et qu'un point de $\widehat{\mathbf{C}}$ est orthogonal à un cercle-droite s'il lui appartient. En particulier le point à l'infini est sur toutes les droites mais sur aucun cercle. On peut donc, dans $\mathcal{E}$, interpréter l'incidence (i.e. le lien points-parties : $x \in P$) comme un cas particulier de l'orthogonalité.
Il s'ensuit aussi un dictionnaire qui permet de traduire les propriétés dans l'espace $\mathcal{E}$ en propriétés dans $\widehat{\mathbf{C}}$ et réciproquement. Ainsi, par exemple, les réflexions orthogonales dans $\mathcal{E}$ correspondent aux inversions et aux symétries axiales dans $\widehat{\mathbf{C}}$ et le théorème de Cartan-Dieudonné (qui dit que le groupe $O(q)$ est engendré par les réflexions) se traduit en disant que les inversions-symétries engendrent le groupe des homographies et anti-homographies. De même, on voit que les faisceaux de cercles correspondent aux droites projectives de l'espace $\mathcal{E}$ (c'est à dire aux plans P de $\mathbf{R}^4$) et leur classification usuelle (en faisceaux à points base ou à points de Poncelet) n'est autre que la classification des formes $q|_P$ selon leur signature. Enfin le fait que des points soient cocycliques ou alignés dans $\widehat{\mathbf{C}}$ signifie que dans $\mathcal{E}$ ils sont linéairement dépendants (i.e. dans un hyperplan).

Des invariants naturels de l'espace $\mathcal{E}$ sont évidemment la forme q et sa forme polaire φ. En fait, comme on travaille dans l'espace projectif, on est amené à considérer parmi les transformations les homothéties (elles donnent l'identité dans le projectif) qui pourtant ne conservent pas vraiment φ et q (elles les multiplient par le carré du rapport) : q et φ sont ce qu'on appelle des invariants projectifs, ils n'ont pas vraiment de sens géométrique, mais leur nullité en a un comme on l'a vu ci-dessus.
En revanche il y a un vrai invariant, fixé même par les homothéties. Si C_1, C_2 sont deux éléments non isotropes de $\mathcal{E}$, il s'agit de

$$a(C_1, C_2) = \frac{\varphi(C_1, C_2)^2}{q(C_1)q(C_2)}.$$

Ce nombre est ce qu'on appelle **l'invariant anallagmatique** de C_1 et C_2 (cf. [DC], lorsque les cercles sont sécants il s'agit simplement du carré du cosinus de l'angle des tangentes aux points d'intersection). Cet invariant permet (entre autres) d'exprimer très simplement le fait que deux cercles-droites sont tangents : il faut et il suffit qu'on ait $a(C_1, C_2) = 1$, ou encore $\varphi(C_1, C_2)^2 = q(C_1)q(C_2)$. Je suis persuadé (mais je n'ai pas vraiment fait le calcul) que le beau théorème de Feuerbach (qui affirme que le cercle des 9 points d'un triangle est tangent aux cercles inscrit et exinscrits dans ce triangle) s'exprime comme une relation simple entre des invariants anallagmatiques.

d) Conclusion.

La thèse que je défends (et qui n'est pour le moment qu'une intuition personnelle de la situation) c'est que les isomorphismes exceptionnels entre groupes classiques, du type de ceux vus ci-dessus, sous-tendent des **géométries riches**.
Il y a deux arguments en faveur de cela. Le premier est pseudo-mathématique. Il consiste à noter que ces géométries cumulent deux types d'invariants correspondant aux deux variantes de leur groupe. Ainsi, dans l'exemple de la géométrie anallagmatique cohabitent à la fois l'invariant birapport de $PGL(2, \mathbf{C})$ et les invariants φ et a de $O(q)$ (c'est-à-dire la notion d'orthogonalité et l'invariant anallagmatique). Bien entendu, chacun de ces invariants est aussi un invariant de l'autre variante, mais pas de façon évidente et les relations entre eux sont non triviales[11]. De plus, il est probable que les relations entre invariants (pour l'une des variantes du groupe) qui sont de bas degré, ne sont pas nécessairement de bas degré pour l'autre variante (là encore des calculs supplémentaires seraient nécessaires pour étayer cette assertion). Comme on a vu que les invariants et les relations qui les lient correspondent aux théorèmes de la géométrie étudiée et qu'on espère que les plus simples du côté de l'algèbre sont aussi les plus élégants du côté de la géométrie, on peut donc énoncer un principe :
Les géométries qui ont un groupe avec deux variantes ont deux fois plus d'invariants naturels et partant, deux fois plus de théorèmes intéressants.
Par exemple, dans la géométrie anallagmatique cohabitent des théorèmes de cocyclicité liés au birapport (Miquel, etc.) et des théorèmes d'orthogonalité ou de contact de cercles-droites (Feuerbach etc.) correspondant aux invariants φ et a.

Ce premier argument, même s'il ne s'exprime pas vraiment comme un énoncé mathématique, est largement corroboré par le second qui est lui une constatation : les théories en question renferment un nombre extraordinaire de théorèmes et la complexité de ceux-ci est sans commune mesure avec ceux des géométries pauvres (comme les géométries affine ou euclidienne). On se reportera par exemple aux livres de Deltheil et Caire ([DC1], [DC2]) ou de Papelier [Pa] pour mesurer la place qu'occupaient ces géométries et la profusion de théorèmes, souvent magnifiques (je pense à Feuerbach, Frégier, Castillon et bien d'autres) qu'on y trouvait.

À l'opposé, comme on l'a dit, des géométries comme la géométrie euclidienne ou la géométrie affine sont des géométries pauvres[12] et ce d'autant plus que la dimension

[11] En réalité, le birapport est un invariant de PGL qui correspond au sous-groupe $O^+(q)$ et pas au groupe $O(q)$ tout entier. C'est le carré du birapport qui est un invariant pour $O(q)$ et on a, pour 4 points P_1, P_2, P_3, P_4 (isotropes) la relation :

$$[P_1, P_2, P_3, P_4]^2 = \frac{\varphi(P_3, P_1)\varphi(P_4, P_2)}{\varphi(P_3, P_2)\varphi(P_4, P_1)}.$$

[12] On pourra m'objecter que le théorème de Feuerbach est aussi un théorème de géométrie euclidienne. C'est vrai, mais la géométrie euclidienne n'est pas son environnement naturel : il est plus naturel et plus général en géométrie anallagmatique. C'est un peu la même chose pour le théorème de Pappus : on

croît[13].

4. La réforme des maths modernes et l'enseignement de la géométrie.

a) L'état des lieux avant 1960.

Les trois théories riches étaient enseignées, pour les deux premières en taupe et pour la troisième (la géométrie anallagmatique) en terminale, cf. les livres de Deltheil et Caire [DC1,2]. J'ai déjà signalé, à l'appui de ma thèse, la profusion de résultats contenus dans les livres correspondants, cf. aussi [Pa], [M], ... En particulier le théorème de Feuerbach (qui est un résultat déjà assez complexe) est présent dans le livre de terminale [DC1] (et il était encore enseigné en 1963 dans un petit lycée de province comme je peux l'attester).
Cependant, même si Deltheil et Caire mettent très clairement en avant la notion de groupes de tranformations (ils font d'ailleurs largement référence au programme d'Erlangen dans une note historique), ils n'utilisent pas les isomorphismes ci-dessus et ne semblent pas en avoir une conscience bien nette. Par exemple, les développements de [DC1] sur les transmuées (i.e. conjuguées) d'inversions nous paraissent aujourd'hui bien lourds.
Notons, pour la petite histoire, cette phrase de Deltheil et Caire dans leur livre de terminale :
D'autre part, l'ensemble des théories relatives aux transformations nous a paru devoir être complété par une note contenant un aperçu sommaire des premiers éléments de la géométrie projective ; nous avons ainsi tenté de remédier à une lacune que nous ne sommes pas les seuls à regretter dans les programmes officiels.
On voit que certaines réactions par rapport aux programmes ne sont pas nouvelles et on pourrait reprendre cette phrase en 1998 (en variant le contenu et/ou le niveau).

b) La réforme et la disparition des théories riches.

La réforme dite des maths modernes intervient à la fin des années 60. Elle est précédée d'un large débat dans la noosphère dont l'un des textes les plus représentatifs me semble être la préface du livre de Dieudonné : Algèbre linéaire et géométrie élémentaire [ALGE]. Ce texte, qui est un petit chef d'œuvre polémique, prend clairement parti pour un nettoyage de la géométrie. Je cite une phrase assez caractéristique :
... car on chercherait en vain à qui d'autre qu'à des mathématiciens spécialisés sont destinées de jolies **babioles** (c'est moi qui souligne) *telles que le cercle des neuf points ou le théorème de Dandelin.*

---

peut l'énoncer en géométrie affine, mais il y a des exceptions et le cadre naturel de Pappus c'est celui de la géométrie projective. J'ai envie de dire qu'un théorème est beau lorsqu'il est simple quelque part : pour Feuerbach je conjecture que c'est dans le cadre de l'espace $\mathcal{E}$. Comme je l'ai dit ci-dessus, je crois qu'il y a une niche écologique privilégiée pour chaque théorème.

[13] C'est un phénomène bien connu, comme le dit Berger (cf. [B]) : "les théories riches sont nombreuses en basses dimensions, les théories pauvres nombreuses en grandes dimensions". Par exemple il y a 5 polyèdres réguliers en dimension 3, 6 en dimension 4 mais seulement 3 en dimension ≥ 5 (les triviaux : le cube, son dual et le simplexe).

En réalité, contrairement peut-être aux intentions de ses promoteurs, la réforme n'a pas eu seulement pour conséquence un changement de point de vue, disons, pour simplifier, le passage de l'approche Euclide-Hilbert à celle de l'algèbre linéaire[14], elle s'est accompagnée aussi d'un appauvrissement considérable, ne laissant subsister que les deux géométries les plus pauvres (affine et euclidienne). Effectivement, si on compare le contenu de [DC1,2] et celui des livres modernes de taupe on est frappé par le fait que la géométrie est réduite à la portion congrue. En particulier, les trois géométries riches qui faisaient partie de l'enseignement de math.-élem. ou de taupe ont complètement disparu en tant que telles. De plus, la géométrie euclidienne elle même a été très appauvrie en perdant dans la bataille les résultats et les outils qui provenaient de ces géométries plus complexes (par exemple l'inversion).

c) Le cas Dieudonné.

Ce cas est un peu paradoxal car Dieudonné est sans doute le mathématicien au monde qui, en 1960, connaît le mieux ces isomorphismes exceptionnels (voir [D] et d'autres articles). Pourtant, comme on l'a vu, il jette sans regret les “babioles” et avec elles tout ce que la géométrie élémentaire contenait d'un peu complexe pour ne garder que les espaces affines et euclidiens. Je ne peux pas croire qu'il n'ait pas perçu le risque que comportait ce choix (mais on ne peut malheureusement plus lui poser la question)[15]. Je suppose qu'il a considéré qu'il fallait faire la part du feu et que pour promouvoir l'analyse et l'algèbre linéaire il convenait de sacrifier quelques branches qu'il considérait comme mortes (il est sans doute l'inspirateur du texte de Bourbaki cité plus haut), même si certaines portaient encore de beaux fruits.

d) Et maintenant ?

Si aujourd'hui on est revenu sur tout ou presque de la réforme des maths modernes, et notamment sur l'introduction de l'algèbre linéaire qui était l'un des objectifs majeurs des auteurs de la réforme, la géométrie, elle, n'est pas revenue. Il faut chercher bien loin en effet pour retrouver les trois théories disparues (elles apparaissent un peu au niveau de l'agrégation).
La conséquence du grand nettoyage des années 70 est donc, à mon avis, une perte considérable de complexité de notre enseignement de la géométrie, perte que je considère comme qualitativement essentielle. On fait souvent à notre enseignement de l'analyse la critique d'être très stéréotypé et de ne pas laisser d'initiative aux élèves, mais je crains bien que l'enseignement actuel de la géométrie ne souffre du même défaut.

e) Mathématique et didactique.

Il est patent que l'échec de la réforme des maths modernes est pour beaucoup dans le développement de la didactique en France. En effet, l'absence d'une véritable réflexion didactique au moment de l'élaboration de cette réforme a conduit à des

[14] Changement de perspective avec lequel, comme mathématicien, je suis largement d'accord !

[15] En revanche, je suis persuadé que bon nombre d'autres protagonistes de la réforme ne mesuraient pas bien les risques encourus.

erreurs grossières. Par exemple, la proposition de Dieudonné d'introduire l'algèbre linéaire au lycée en dimension ≤ 3 semble aujourd'hui devoir être rejetée pour des raisons didactiques essentielles, comme le montrent les travaux de A. Robert et J.-L. Dorier.

La morale que je retiens, pour ma part, de la réflexion menée ci-dessus sur les géométries riches, c'est la nécessité d'une réflexion mathématique (et épistémologique ?) profonde avant toute réforme un peu ambitieuse des programmes, et ce, indépendamment d'une réflexion didactique et peut-être en préalable à celle-ci. L'objectif de cette étude mathématique devrait être, entre autres, de bien cerner l'importance et la consistance des notions en jeu (celles que l'on souhaite introduire ou au contraire celles que l'on veut supprimer[16]), ainsi que leurs liens avec les autres domaines des mathématiques et leurs relations avec les autres disciplines.

Pour expliquer pourquoi je souhaite que cette réflexion soit menée avant l'étude didactique, j'évoquerai un exemple, caricatural certes, mais instructif. Souvenons-nous des trésors d'imagination déployés par un certain nombre de personnes au début des années 70 pour faire comprendre aux élèves de sixième ou cinquième les nombres relatifs comme des couples d'entiers avec une relation d'équivalence (par des jeux, des situations diverses, bref une ingéniérie didactique très élaborée). Je pense, pour ma part, que ces efforts étaient inutiles, voire nocifs, puisque cette description ne présente aucun intérêt mathématique (un relatif, contrairement à un rationnel, n'est pas de manière naturelle un couple, c'est un naturel plus un signe). Dans ce cas précis ce qui a manqué c'est une réflexion mathématique, d'ailleurs assez triviale.

f) Un bilan de la réforme côté géométrie.

Pour en revenir au bilan de l'époque "maths modernes" concernant la géométrie, force est de constater, avec le recul, qu'il est terriblement négatif.

Il y a d'abord l'appauvrissement des contenus provoqué par la disparition des géométries riches évoquées ci-dessus. Je n'y reviens pas.

Il y a ensuite le contresens monumental de l'abandon des cas d'égalité des triangles qui présentaient pourtant, par rapport à l'état actuel, deux gros avantages.

1) Sur le plan mathématique, ils donnaient un critère commode permettant d'affirmer l'existence d'une transformation échangeant deux figures sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci. Si on pense la géométrie en termes d'invariants il est clair que les cas d'égalité constituent un outil mathématique essentiel.

2) Sur le plan de la cohérence de l'enseignement les cas d'égalité fournissaient un fondement de la géométrie (je n'ose pas dire un système d'axiomes), imparfait certes, mais sur lequel les autres résultats reposaient à peu près solidement. En tous cas, de ce point de vue, la situation était finalement plus claire que celle qui prévaut actuellement.

Sans doute fallait-il repenser ces cas d'égalité en termes de tranformations, mais je persiste à penser que leur élimination était une erreur.

[16] Ainsi, je ne suis pas sûr que la commission qui a récemment décidé de bannir la notion de fonction continue du programme de terminale S ait réfléchi suffisamment à toutes les conséquences de cette décision.

On ne peut comprendre les bévues des promoteurs de la réforme (qui n'étaient pourtant pas tous des partisans aveugles du modernisme pour le modernisme) si l'on oublie l'impérieuse raison qui les motivait et qui, mathématiquement, est solide : introduire le plus tôt possible l'algèbre linéaire dans l'enseignement, au motif qu'elle est un cadre de pensée essentiel des mathématiques. L'expérience a malheureusement montré que les choses, de ce point de vue, n'étaient pas si simples. C'est la revanche du fait didactique sur les mathématiques.

g) Que faire ?

Même si on partage l'analyse développée ci-dessus sur l'état actuel de la géométrie, il n'est pas clair de dire ce qu'il faut faire pour améliorer les choses. Bien entendu, il est exclu de revenir à l'état ancien (ne serait-ce que parce que les enseignants ne voudraient ni ne pourraient le faire).

Il me semble cependant qu'il est essentiel, en ces temps où les mathématiques et leur enseignement sont contestés, de réfléchir à l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée, la première question à examiner étant : un tel enseignement de la géométrie est-il indispensable ? Posée ainsi, la question paraîtra sans doute provocatrice, mais il ne faut pas négliger toutefois le fait que la géométrie élémentaire, comme champ de recherche, a essentiellement disparu. Les arguments en faveur d'un enseignement de la géométrie doivent donc nécessairement être d'ordre pédagogique. À cet égard j'en retiens deux qui me semblent particulièrement forts et qui plaident pour le maintien de cet enseignement :

1) la nécessité d'une vision, voire d'une pensée, géométrique est indispensable, en mathématiques et ailleurs,

2) la géométrie est le lieu privilégié d'un apprentissage conjoint de l'invention et de la rigueur.

Références

[ALGE] Dieudonné J., Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Hermann,

[B] Berger M., Géométrie, Nathan,

[C] Chasles M., Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles, 1837, réédition J. Gabay, 1989.

[DC1] Deltheil R. et Caire D., Géométrie, classe de mathématiques, Baillière, 1939.

[DC2] Deltheil R. et Caire D., Compléments de géométrie, Baillière, 1951.

[D] Dieudonné J., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1954.

[K] Klein F., Le programme d'Erlangen,

[M] Michel

[Pa] Papelier ,

[P] Perrin D., Cours d'algèbre, Ellipses, 1996.

[W] Weyl H., Invariant theory, Princeton mathematical Series, Princeton, 1946.

Annexe 1 : Opérations, orbites, quotients, invariants

a) Opérations.

Lorsqu'on dispose d'une opération d'un groupe G sur un ensemble X, on en déduit aussitôt de nombreuses opérations annexes. Ainsi, G opère aussi sur $X \times X$, voire sur $X \times X \times X$, etc. ou encore sur certains sous-ensembles de ceux-là, par exemple les couples ou les triplets formés de points distincts. Il peut opérer aussi sur des ensembles de parties remarquables de X.
Par exemple, le groupe des isométries du plan opère sur les couples de points distincts, ou sur les triplets de points non alignés, c'est-à-dire les triangles. Il opère aussi sur l'ensemble des droites du plans, ou encore l'ensemble des cercles, des coniques, etc.
De même, le groupe circulaire $PGL(2, \mathbf{C})$ opère sur les points du plan anallagmatique $\widehat{\mathbf{C}}$, mais aussi sur les couples, les triplets, les quadruplets de tels points (distincts) et sur l'ensemble des "droites-cercles" du plan anallagmatique, voire sur les couples de "droites-cercles".

b) Transitivité.

Un problème essentiel, lorsqu'on a une telle opération de G sur X, est de savoir si elle est transitive, c'est-à-dire si étant donnés $x, y \in X$ il existe toujours $g \in G$ tel que $y = gx$. Par exemple, dans le cas des isométries du plan évoqué ci-dessus, G opère transitivement sur X, mais pas sur $X \times X$ (à cause de la distance). De même il opère transitivement sur les droites de X, mais pas sur les couples de droites (à cause de l'angle).
Lorsque l'isométrie n'est pas transitive, le problème essentiel est de décrire l'ensemble des orbites de X sous G, c'est-à-dire l'ensemble quotient X/G sous la relation

$$x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g \in G \quad \text{tel que} \quad y = gx.$$

Il s'agit d'abord de décrire ensemblistement l'ensemble X/G, mais, le plus souvent, on cherchera à munir cet ensemble de structures additionnelles. En effet, X sera souvent une variété (différentiable, algébrique) et on essaiera de munir X/G d'une structure analogue. En général c'est un problème difficile. Dans les cas évoqués ci-dessus cela conduit à introduire des invariants bien connus (distance, angle, birapport etc.) comme nous allons le voir.

c) Paramétrer le quotient.

Pour décrire explicitement X/G, si on le pense comme une variété, l'idée la plus simple est d'essayer de le voir comme un espace numérique $\mathbf{R}^d$ (voire comme un ouvert de $\mathbf{R}^d$) puis, si cela n'est pas possible, comme un sous-ensemble de $\mathbf{R}^d$ défini par des équations, avec le nombre minimum d'équations possible.
On cherche donc une application injective

$$\overline{\varphi} : X/G \to \mathbf{R}^d$$

dont on essaiera ensuite de préciser l'image. Une telle application provient nécessairement d'une application $\varphi : X \to \mathbf{R}^d$, donnée par d fonctions numériques $(\varphi_1, \cdots, \varphi_d)$ de X dans $\mathbf{R}$. Dire que φ passe au quotient pour donner $\overline{\varphi}$, c'est dire que les φ_i sont des fonctions **invariantes** sous l'action de G, c'est-à-dire qu'on

a $\varphi_i(g.x) = \varphi_i(x)$ pour tous $x \in X$ et $g \in G$. Lorsque X (et G) sont munis de structures supplémentaires on imposera aux φ_i de possèder les bonnes propriétés relatives à ces structures. Par exemple si X (et G) est une variété différentiable, resp. algébrique, on demandera aux φ_i d'être différentiables, resp. polynomiales (ou rationnelles).
Dans ce cas des variétés on a une idée heuristique *a priori* du nombre d de fonctions φ_i nécessaires pour décrire le quotient. En effet, si n est la dimension de X et r celle de G, le quotient doit avoir la dimension $n-r$ et donc d doit être égal à $n-r$, au moins si les φ_i sont "indépendantes". Si au contraire les φ_i sont sont liées par s relations, elles-mêmes indépendantes, on doit avoir $n - r = d - s$. On entre là typiquement dans le domaine de la géométrie différentielle ou algébrique.

d) Exemple 1 : le groupe euclidien.

Si X est le plan affine euclidien et G le groupe des isométries affines, il est clair que G est transitif sur X, de sorte que le quotient est banal.
Cependant, si on fait opérer G sur $X \times X$ (ou plutôt sur l'ouvert de $X \times X$ formé des couples de points distincts) par $g.(a, b) = (g.a, g.b)$, l'opération n'est plus transitive (pour pouvoir envoyer simultanément a sur a' et b sur b' par une isométrie il faut et il suffit qu'on ait $||\overrightarrow{ab}|| = ||\overrightarrow{a'b'}||$). Dans ce cas, le quotient $(X \times X)/G$ est donc paramétré par une unique fonction invariante : la distance $d(a, b) = ||\overrightarrow{ab}||$ et le quotient est l'ouvert $\mathbf{R}^{+*}$ de $\mathbf{R}$. Cela est conforme à l'argument de dimension, puisque $X \times X$ est de dimension 4 tandis que G est de dimension 3 (c'est une extension du groupe des translations, qui est de dimension 2, par le groupe des isométries vectorielles $O(2)$ qui est de dimension 1 puisque $O^+(2)$ et $O^-(2)$ sont tous deux homéomorphes à un cercle).

On poursuit avec l'opération de G sur l'ensemble T des triangles (c'est-à-dire les triplets de points de X, non alignés). Quitte à fixer comme origine l'un des sommets et à oublier les translations, il revient au même d'étudier l'action du groupe des isométries vectorielles $O(2)$ sur le produit $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ (ou, si l'on veut de vrais triangles, les couples formés de vecteurs non colinéaires). Le premier cas d'égalité des triangles dit alors que le quotient est décrit par trois fonctions invariantes (indépendantes) : $(b|b)$, $(b|c)$, $(c|c)$ (les longueurs des côtés et leur angle), ce qui est conforme à la prévision de dimension. On a donc un plongement $\varphi : T/G \to \mathbf{R}^3$ dont l'image, en vertu de Cauchy-Schwarz, est l'ensemble des triplets (λ, μ, ν) vérifiant $\mu^2 < \lambda\nu$ qui est un ouvert de $\mathbf{R}^3$. On notera qu'on a mieux ici que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est la fameuse relation

$$(1) \qquad (b \wedge c)^2 = (b|b)(c|c) - (b|c)^2,$$

qui montre que la différence $\lambda\nu - \mu^2$ est non seulement positive, mais que c'est le carré d'un polynôme. Cela donne une autre description du quotient, plus satisfaisante pour un géomètre algébriste, non plus comme ouvert de $\mathbf{R}^3$ défini par une inégalité, mais comme projection sur $\mathbf{R}^3$ de la sous-variété de $\mathbf{R}^4$ définie par l'équation $\lambda\nu = \mu^2 + \rho^2$, qui n'est autre que le quotient de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ sous l'action de $O^+(2)$ (comme on le voit en prenant pour ρ l'invariant $b \wedge c$ de $O^+(2)$). Sans doute est-ce dans cette description des quotients que l'on peut comprendre l'importance de la relation (1) en géométrie élémentaire.

Lorsqu'on fait opérer le groupe $O(2)$ sur les triplets (b, c, d) de $(\mathbf{R}^2)^3$ les invariants sont encore les 6 produits scalaires $(b|b), (b|c), (b|d), (c|c), (c|d), (d|d)$, mais, comme le quotient doit être de dimension 5, il y a nécessairement une relation entre les invariants, donnée ici par la nullité du déterminant de Gram :

$$\begin{vmatrix} (b|b) & (b|c) & (b|d) \\ (b|c) & (c|c) & (c|d) \\ (b|d) & (c|d) & (d|d) \end{vmatrix}.$$

e) Exemple 2 : le groupe circulaire.

Le groupe $G = PGL(2, \mathbf{C})$ est transitif sur les points de $\widehat{\mathbf{C}}$. Il est même triplement transitif : si a, b, c (resp. a', b', c') sont des triplets de points distincts il existe une homographie unique qui envoie a sur a', b sur b', c sur c'. En revanche, il n'est pas quadruplement transitif, le quotient $\widehat{\mathbf{C}}^4/G$ est ici repéré par un unique invariant complexe : le birapport de quatre points. Cela est conforme aux dimensions puisque $\widehat{\mathbf{C}}^4$ est de dimension 4 (sur $\mathbf{C}$) et G de dimension 3.
De la même façon, ce groupe est transitif sur l'ensemble des "droites-cercles" du plan anallagmatique, mais pas deux fois transitif : pour qu'on puisse envoyer un couple (C_1, C_2) sur un autre, (C'_1, C'_2) par un élément de G il faut et il suffit qu'ils aient même invariant anallagmatique.

Annexe 2

a) Invariants et covariants.

On considère, dans le plan euclidien, des points $a = (0,0)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$, etc. Rappelons le groupe $O(2)$ opère sur les fonctions $f(b, c, \cdots) = \widetilde{f}(b_1, b_2, c_1, c_2, \cdots)$ par la formule

$$(u.\widetilde{f})(b_1, b_2, c_1, c_2, \cdots) = \widetilde{f}(\alpha b_1 + \beta b_2, \gamma b_1 + \delta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2, \gamma c_1 + \delta c_2, \cdots)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les coefficients de la matrice de u^{-1}.
Soit m un point "euclidien" du plan. Cela signifie d'abord que m est construit, à partir des points $a, b, c, ...$, donc est fonction des données : $m = G(a, b, c, \cdots) = \widetilde{G}(b_1, b_2, c_1, c_2, \cdots)$. Plus précisément, en écrivant le point m dans le repère a, b, c on peut d'expliciter G :

$$m = f(b, c, \cdots)b + g(b, c, \cdots)c.$$

Dire que m est euclidien signifie, de plus, que la construction en question ne dépend pas du repère orthonormé choisi, c'est-à-dire que si u est un élément de $O(2)$, le point $u(m)$ est construit à partir de $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ comme m à partir de a, b, c, autrement dit qu'on a $u(m) = G(u(a), u(b), u(c), \cdots)$. On dit que m est un **covariant** par rapport aux points $a, b, c, ...$ Cela signifie encore qu'on a

$$u(m) = f(u(b), u(c), \cdots)\, u(b) + g(u(b), u(c), \cdots)\, u(c)$$

et on a le résultat suivant :

Théorème 1.
Le point m est euclidien si et seulement si les fonctions f et g sont invariantes sous l'action de $O(2)$.

Démonstration. Comme u est linéaire, on a $u(m) = f(b, c, \cdots)u(b) + g(b, c, \cdots)u(c)$. Par hypothèse on a $u(m) = f(u(b), u(c), \cdots)\, u(b) + g(u(b), u(c), \cdots)\, u(c)$, mais, comme $u(b), u(c)$ est une base du plan, on en déduit $f(b, c, \cdots) = f(u(b), u(c), \cdots)$ et $g(b, c, \cdots) = g(u(b), u(c), \cdots)$, cqfd.

b) Propriétés géométriques et relations polynomiales.

Les propriétés usuelles (alignement, concourance, cocyclicité) se traduisent algébriquement par des relations polynomiales. Par exemple, dire que $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ sont alignés c'est dire que le déterminant 3×3 suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

De même, dire que les trois droites d'équations $u_i x + v_i y + w_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sont concourantes c'est dire que le déterminant 3×3 bâti avec leurs coefficients est nul. Enfin, dire que quatre points a, b, c, d sont cocycliques c'est dire que le déterminant 4×4 dont les lignes sont $(a_1^2 + a_2^2 \quad a_1 \quad a_2 \quad 1)$ et les analogues avec b, c, d, est nul.

c) Points à coordonnées algébriques.

On travaille dans le plan euclidien avec un certain nombre de points-base, à coordonnées indéterminées. On note K le corps (appelé corps de base) engendré sur $\mathbf{R}$ par ces indéterminées. Lorsqu'on construit des points du plan comme intersections de cercles et de droites les coordonnées des points obtenus ne sont pas, en général, dans K, mais sont algébriques sur K (de degré une puissance de 2). Voici trois exemples pour éclairer un peu cette situation.

Exemple 1. On considère un triangle $a = (0,0), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2)$ et le cercle Γ de centre a passant par c. Il coupe la droite (ab) en deux points dont nous calculons les coordonnées. L'équation de Γ est $X^2 + Y^2 = c_1^2 + c_2^2$, celle de (ab) est $b_2X - b_1Y = 0$. Les points d'intersection ont pour coordonnées

$$\left(\pm b_1 \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{b_1^2 + b_2^2}}\ ,\ \pm b_2 \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{b_1^2 + b_2^2}}\right).$$

On voit que les coordonnées des points sont dans une extension quadratique du corps de base $K = \mathbf{R}(b_1, b_2, c_1, c_2)$. On notera qu'ici les quantités sous le radical sont toujours positives (ce sont des sommes de carrés), ce qui correspond au fait que le cercle coupe toujours la droite.

Exemple 2. C'est l'exemple de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

On considère un cercle Γ de centre $O = (0,0)$ et de rayon r et un point $A = (a,0)$. On prend une droite passant par A d'équation $u(X-a) - vY = 0$ et on cherche les coordonnées des points d'intersection. Le corps de base est donc $K = \mathbf{R}(a, r, u, v)$. Le calcul est facile et donne là encore des points M_1, M_2 à coordonnées dans une extension de K. Voici par exemple les abscisses des M_i :

$$x = \frac{au^2 \pm v\sqrt{(u^2 + v^2)r^2 - a^2u^2}}{u^2 + v^2}.$$

On voit qu'elles comportent un radical, donc sont dans une extension de K. Cependant, si on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AM_1} \, . \, \overrightarrow{AM_2}$ on trouve[1] $a^2 - r^2$, quantité qui est, elle, dans K. On constate que le théorème se traduit par une propriété qui a lieu dans le corps de base (et pas dans l'extension). La raison en est que les points M_i interviennent ici ensemble, donc non pas réellement par leurs coordonnées, mais par les fonctions symétriques de ces coordonnées qui sont dans K. J'imagine que ce phénomène est assez général et que les relations entre les points à coordonnées algébriques sur le corps de base K pourront en général s'exprimer sur K.

Exemple 3. Les bissectrices.
Lorsqu'on écrit les équations des bissectrices d'un triangle comme lieu des points équidistants des côtés il apparaît nécessairement un radical car la distance du point $x = (x_1, x_2)$ à la droite ab d'équation $(b_2 - a_2)X - (b_1 - a_1)Y + b \wedge a$ est donnée par

$$d(x, ab) = \frac{|(b_2 - a_2)x_1 - (b_1 - a_1)x_2 + b \wedge a|}{\sqrt{(a|a) + (b|b) - 2(a|b)}}.$$

[1] C'est le fait bien connu que la puissance de A par rapport à Γ ne dépend pas du choix de la sécante et qu'elle est égale au carré de la distance de A à O diminué du carré du rayon.

On obtient l'équation des bissectrices (intérieure et extérieure) en a en élevant au carré la relation $d(x, ab) = d(x, ac)$. On trouve une conique dégénérée Γ_a et le résultat de concourance (donnant les centres des cercles inscrit et exinscrits) revient à écrire que les trois coniques $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ sont dans le même pinceau, c'est-à-dire que leurs trois équations sont linéairement dépendantes. Je n'ai pas fait explicitement le calcul.

Annexe 3

Dans cette annexe on interprète en termes d'invariants les théorèmes classiques de concourance des droites remarquables du triangle, le théorème de la droite d'Euler et celui du symétrique de l'orthocentre. Bien entendu on ne prétend pas que les calculs qui suivent sont la meilleure façon de montrer ces théorèmes.

On travaille dans le plan euclidien P muni d'un repère orthonormé o, e_1, e_2 et on considère un triangle générique a, b, c avec $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ où les a_i, b_i, c_i sont des indéterminées. On pose $(a|b) = a_1b_1 + a_2b_2$ et $a \wedge b = a_1b_2 - b_2a_1$ et de même par permutation. On prendra souvent $a = o$ pour simplifier les calculs.

a) Médianes et centre de gravité.

On montre aisément qu'une équation de la médiane aa' issue de a est

$$(b_2 + c_2 - 2a_2)X - (b_1 + c_1 - 2a_1)Y + a\wedge b + a\wedge c = 0$$

et de même pour les autres par permutation circulaire. Pour montrer que les médianes sont concourantes on écrit la nullité du déterminant 3×3 formé par les coefficients de ces équations et on trouve, en posant $A = b\wedge c + c\wedge a + a\wedge b$,

$$A\big[(a\wedge c) + (a\wedge b) + (b\wedge c) + (b\wedge a) + (c\wedge b) + (c\wedge a)\big] = 0,$$

relation trivialement vérifiée car $a\wedge b + b\wedge a = 0$.
Le point de concours des médianes est le centre de gravité g donné par $3g = a+b+c$. Dans le cas $a = o$ il reste seulement $3g = b + c$, on voit que les coefficients de g sur b et c sont des constantes, donc des invariants.

b) Hauteurs et orthocentre.

On montre aisément qu'une équation de la hauteur aa'' issue de a est

$$(b_1 - c_1)X + (b_2 - c_2)Y + (a|c) - (b|a) = 0$$

et de même pour les autres par permutation circulaire. Pour montrer que les hauteurs sont concourantes on écrit la nullité du déterminant 3×3 formé par les coefficients de ces équations et on trouve, en posant $A = b\wedge c + c\wedge a + a\wedge b$,

$$A\big[(a|c) - (a|b) + (b|a) - (b|c) + (c|b) - (c|a)\big] = 0,$$

relation trivialement vérifiée.
Le point de concours des hauteurs (c'est-à-dire l'orthocentre h) se calcule facilement dans le cas $a = o$. On a :

$$h = \frac{(b|c)}{(b\wedge c)^2}\big\{\,[(c|c) - (b|c)]\,b + [(b|b) - (b|c)]\,c\,\big\}$$

c) Médiatrices et cercle circonscrit.

On montre aisément qu'une équation de la médiatrice de bc est

$$2(b_1 - c_1)X + 2(b_2 - c_2)Y + (c|c) - (b|b) = 0$$

et de même pour les autres par permutation circulaire. Pour montrer que les médiatrices sont concourantes on écrit la nullité du déterminant 3×3 formé par les coefficients de ces équations et on trouve, en posant $A = b\wedge c + c\wedge a + a\wedge b$,

$$2A\big[(a|a) - (b|b) + (b|b) - (c|c) + (c|c) - (a|a)\big] = 0,$$

relation trivialement vérifiée.
Le point de concours des médiatrices (c'est-à-dire le centre ω du cercle circonscrit est donné (dans le cas $a = o$) par

$$2\omega = \frac{1}{(b\wedge c)^2}\big\{ (c|c)\,[(b|b) - (b|c)]\,b + (b|b)\,[(c|c) - (b|c)]\,c \big\}$$

d) Droite d'Euler.

On suppose désormais que a est l'origine : $a = o = (0,0)$. On a les formules ci-dessus pour g, h, ω et il s'agit de vérifier la relation $2\omega + h = 3g$ qui montre que les points ω, h, g sont alignés. En multipliant les deux membres de cette relation par $(b\wedge c)^2$ on se ramène à montrer l'égalité

$$(b\wedge c)^2 = (b|b)(c|c) - (b|c)^2$$

qui n'est autre que la relation fondamentale entre les invariants de $O^+(2)$.

e) Le symétrique de l'orthocentre.

Soit m le symétrique de h par rapport à bc. On calcule m en utilisant les relations suivantes :
1) $(m - h|b - c) = 0$ (mh est perpendiculaire à bc),
2) $\dfrac{h+m}{2} \in bc$ (le milieu de hm est sur bc).
Le calcul donne, en posant $b' = (b_2, -b_1)$ et $c' = (c_2, -c_1)$:

$$m = \left[\frac{2\,b\wedge c}{(b|b) + (c|c) - (b|c)} - \frac{(b|c)}{b\wedge c}\right](c' - b') = \alpha(c' - b').$$

Pour montrer que m est sur le cercle circonscrit il suffit de montrer que ω est sur la médiatrice de am, ce qui s'écrit $2(m|\omega) = (m|m)$. Un calcul sans malice fournit les expressions :

$$(m|m) = \alpha^2[(b|b)+(c|c)-(b|c)] \quad \text{et} \quad 2(m|\omega) = \alpha\frac{2(b|b)(c|c) - (b|c)(b|b) - (b|c)(c|c)}{b\wedge c}$$

et, une nouvelle fois, le résultat cherché est conséquence de la relation

$$(b\wedge c)^2 = (b|b)(c|c) - (b|c)^2.$$

Annexe 4 : Le théorème des six birapports

Le lecteur en saura plus sur ce théorème en résolvant le problème suivant.

a) Soient a, b, c, d, p, q, r, s huit points distincts de $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Montrer la formule

$$[abrs]\,[bcps]\,[caqs]\,[pqcd]\,[qrad]\,[rpbd] = 1.$$

On appelle *système cubique* la donnée d'un ensemble X à 8 éléments et de trois parties A, B, C de X, à 4 éléments, vérifiant les propriétés suivantes :
1) $A \cap B, B \cap C, C \cap A$ sont de cardinal 2 et distinctes,
2) $A \cap B \cap C$ est de cardinal 1.
Les parties $A, B, C, X - A, X - B, X - C$ sont appelées les faces du système.

b) Montrer si X est l'ensemble des 8 sommets d'un cube et si A, B, C sont trois faces passant par un même sommet, $X; A, B, C$ est un système cubique. Montrer qu'on peut noter a, b, c, d, p, q, r, s les éléments de X, de sorte que l'on ait $A = \{b, c, p, s\}$, $B = \{c, a, q, s\}$, $C = \{a, b, r, s\}$.

c) Montrer, réciproquement, que tout système cubique est en bijection avec un système cubique de la forme précédente.

d) Soit $X; A, B, C$ un système cubique avec $X \subset \widehat{\mathbf{C}}$. Montrer que si 5 des faces de X sont formées de points cocycliques ou alignés il en est de même de la sixième.

e) Montrer par la méthode précédente le théorème du pivot :
Soient a, b, c trois points non alignés du plan. Soient p, q, r trois points distincts de a, b, c, situés respectivement sur les droites bc, ca, ab. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles cpq, brp, aqr ont un point commun d (le "pivot").

f) Montrer par la méthode précédente le théorème de la droite de Simson :
Soient a, b, c, m des points du plan, tels que a, b, c soient non alignés et soient p, q, r les projections de m sur les côtés bc, ca, ab du triangle. Montrer que p, q, r sont alignés si et seulement si m est sur sur le cercle circonscrit au triangle abc. La droite pqr est alors la droite de Simson associée à m.

g) Montrer par la méthode précédente le théorème des six cercles de Miquel :
Soient $a, b, c, d; a', b', c', d'$ huit points distincts du plan. On suppose les points $aa'bb'$ (resp. $bb'cc'$, $cc'dd'$, $dd'aa'$) cocycliques ou alignés. Montrer que a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si a', b', c', d' sont cocycliques ou alignés.