Autour d'un théorème de Brahmagupta

Daniel PERRIN

1 Introduction

1.1 Le théorème

On attribue au mathématicien indien Brahmagupta (598-668) le théorème suivant (ou peut-être sa réciproque la plus naturelle, voir 2.1) :

1.1 Théorème. *Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle. On suppose que les diagonales de $ABCD$ sont perpendiculaires. Soit M le milieu de $[AB]$. Alors, la droite (EM) est perpendiculaire à (CD).*

L'objectif de ce texte est justement d'examiner les diverses réciproques possibles de ce théorème.

1.2 Précisons les données

Dans ce qui suit on considère un quadrilatère $Q = ABCD$ c'est-à-dire quatre points distincts A, B, C, D du plan, pris dans cet ordre. Les côtés de Q sont les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et ses diagonales sont $[AC]$ et $[BD]$. On suppose que Q est convexe. Cela signifie [1] qu'un côté étant donné, les deux autres points sont dans le même demi-plan ouvert limité par ce côté. Il revient au même de dire que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en un point que l'on notera E. On considère aussi un point M de $[AB]$.

On considère alors les quatre propriétés suivantes :

1) Les quatre points A, B, C, D sont cocycliques.

2) Les diagonales de Q sont perpendiculaires.

3) Le point M est le milieu de $[AB]$.

4) La droite (EM) est perpendiculaire à (CD).

Le théorème 1.1 affirme que les propriétés 1), 2) et 3) impliquent 4). On va s'intéresser dans ce qui suit aux trois autres possibilités : trois des propriétés précédentes impliquent-elles la quatrième ?

1. Voir par exemple *Mathématiques d'école* Ch. 5.

2 Le théorème de Brahmagupta et ses réciproques faciles

2.1 Les deux versions naturelles

Les deux versions suivantes se démontrent à peu près de la même manière et je ne sais pas laquelle attribuer à Brahmagupta :

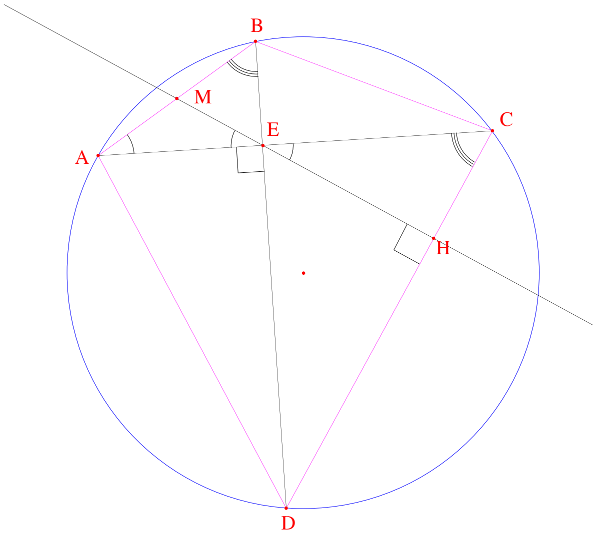

FIGURE 1 – La situation avec les hypothèses 1) et 2)

2.1 Théorème. *Avec les notations précédentes, on a les résultats suivants :*
i) Les propriétés 1), 2) et 3) impliquent 4).
ii) Les propriétés 1), 2) et 4) impliquent 3).

Démonstration. Appelons H le point d'intersection de (EM) et de (CD).

i) On suppose que M est le milieu de $[AB]$ et il s'agit de montrer que les angles $\widehat{CEH}$ et $\widehat{ECH}$ sont complémentaires. Or, on a $\widehat{CEH} = \widehat{MEA}$ (angles opposés par le sommet) et cet angle est encore égal à $\widehat{MAE} = \widehat{BAE}$. En effet, le triangle rectangle ABE est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[AB]$, donc de centre M, ce qui montre que AME est isocèle en M. De l'autre côté, on a $\widehat{ECH} = \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \widehat{ABE}$ par le théorème de l'angle inscrit (les points B et C sont du même côté de (AD) car Q est convexe). On conclut en invoquant la somme des angles du triangle rectangle ABE.

ii) Supposons maintenant que (EM) est perpendiculaire à (CD). On a encore $\widehat{CEH} = \widehat{MEA}$ et $\widehat{ECH} = \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \widehat{ABE} = \widehat{MBE}$. Comme le triangle CEH est rectangle en H, les angles $\widehat{CEH}$ et $\widehat{ECH}$ sont complémentaires donc aussi $\widehat{MEA}$ et $\widehat{MBE}$. Comme ABE est rectangle en E, il en résulte qu'on a $\widehat{MAE} = \widehat{MEA}$ et $\widehat{MBE} = \widehat{MEB}$, donc les deux triangles BEM et AEM sont isocèles en M et on a aussi $MA = ME = MB$, de sorte que M est milieu de $[AB]$.

2.2 La réciproque donnant la cocyclicité

2.2 Théorème. *Avec les notations précédentes, les propriétés 2), 3) et 4) impliquent 1).*

Démonstration. Par la réciproque du théorème de l'angle inscrit, il suffit de montrer l'égalité des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$, ou de leurs complémentaires $\widehat{CEH}$ et $\widehat{BAE}$. Mais, comme ABE est rectangle en E et que M est le milieu de $[AB]$, le triangle AME est isocèle en M et on a donc $\widehat{BAE} = \widehat{MEA}$. La conclusion est alors évidente avec les angles opposés par le sommet.

3 La réciproque difficile

Le résultat est le suivant :

3.1 Théorème. *Avec les notations précédentes, les propriétés 1), 3) et 4) impliquent soit la propriété 2), soit le fait que $ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[CD]$ (autrement dit que les médiatrices de $[AB]$ et$[CD]$ sont les mêmes).*

Pour prouver ce théorème, on reprend le quadrilatère convexe $ABCD$ et le point d'intersection de ses diagonales E. On note H le projeté orthogonal de E sur (CD).

3.1 La preuve analytique

On choisit un repère orthonormé d'origine H et d'axes (CD) et (HE). Les points ont alors pour coordonnées $H = (0, 0)$, $C = (c, 0)$, $D = (d, 0)$, $E = (0, e)$. Un cercle général Γ passant par C et D a pour équation :

$$x^2 + y^2 - (c + d)x - 2\beta y + cd = 0.$$

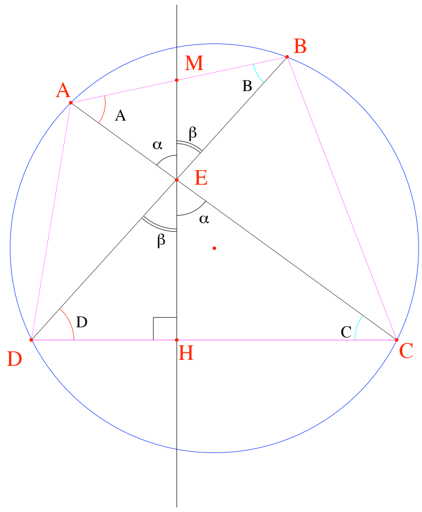

FIGURE 2 – La réciproque difficile

Les droites (CE) et (DE) ont pour équations respectives $y = -\frac{e}{c}x + e$ et $y = -\frac{e}{d}x + e$. On en déduit que les abscisses de C et A sont les solutions de l'équation :

$$x^2\big(1+\frac{e^2}{c^2}\big) + \big(2\frac{\beta e}{c} - \frac{2e^2}{c} - (c+d)\big)x + e^2 - 2\beta e + cd = 0.$$

Cette équation admettant la racine c, on en déduit l'autre en utilisant le produit des racines :

$$x_A = \frac{e^2 - 2\beta e + cd}{c^2+e^2}\,c$$

et, en échangeant les rôles de c et d, on obtient :

$$x_B = \frac{e^2 - 2\beta e + cd}{d^2+e^2}\,d.$$

La propriété 4) signifie que le milieu M de $[AB]$ est sur (EH), donc sur l'axe des y, donc qu'on a $x_A + x_B = 0$. Cette condition s'écrit :

$$(e^2 - 2\beta e + cd)\,\big(c(d^2+e^2) + d(c^2+e^2)\big) = 0.$$

La nullité de $e^2 - 2\beta e + cd$ signifie que E est sur le cercle Γ et cela implique $A = E = B$, ce qui a été écarté. Il reste donc la condition $c(d^2+e^2) + d(c^2+e^2) = 0$.

Mais, on a la factorisation [2] $c(d^2+e^2)+d(c^2+e^2)=(c+d)(cd+e^2)$ et on voit que cette quantité est nulle soit si $cd+e^2=(\overrightarrow{ED}|\overrightarrow{EC})=0$, c'est-à-dire si les diagonales de Q sont perpendiculaires, soit si $c+d=0$. Dans ce cas, la symétrie par rapport à (HE) fixe E, échange C et D, laisse stable le cercle Γ, donc échange A et B et on a bien un trapèze isocèle.

3.2 La preuve géométrique

Rappelons qu'on suppose que $ABCD$ est inscrit dans un cercle, que M est le milieu de $[AB]$ et que (EM) est perpendiculaire à (CD) en H. Appelons respectivement $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ les angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{DBA}$, $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BDC}$. Le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{A}=\widehat{D}$ et $\widehat{B}=\widehat{C}$. Posons $\alpha=\widehat{MEA}$ et $\beta=\widehat{BEM}$. La relation des sinus dans le triangle MEA donne $\dfrac{\sin\alpha}{AM}=\dfrac{\sin\widehat{A}}{EM}\cdot$ De même, dans BEM on obtient $\dfrac{\sin\beta}{BM}=\dfrac{\sin\widehat{B}}{EM}\cdot$ Comme M est le milieu de $[AB]$, on en déduit $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\widehat{A}}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\widehat{B}}\cdot$ Mais, les angles α et β sont égaux à $\widehat{CEH}$ et $\widehat{DEH}$ respectivement (angles opposés par le sommet), donc complémentaires de $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$. On obtient ainsi la formule $\dfrac{\cos\widehat{C}}{\sin\widehat{D}}=\dfrac{\cos\widehat{D}}{\sin\widehat{C}}$ ou encore $\sin 2\widehat{C}=\sin 2\widehat{D}$. Cette équation a deux solutions, soit $\widehat{C}=\widehat{D}$, qui donne le cas du trapèze isocèle, soit $\widehat{C}+\widehat{D}=\pi/2$ qui donne l'orthogonalité de (CD) et (ME).

3.3 En prime : un théorème

L'analyse de la figure précédente et la preuve géométrique du résultat donnent facilement le joli résultat suivant :

3.2 Théorème. *Soit ABC un triangle, H (resp. M) le pied de la hauteur (resp. de la médiane) issue de A. On suppose que H est dans $[BC]$. Alors, les angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{MAC}$ sont égaux si et seulement si le triangle ABC est isocèle en A ou rectangle en A.*

---

2. Il n'est pas difficile de trouver directement cette factorisation, mais il y a au moins deux façons de tricher pour y parvenir : le délit d'initié qui consiste à chercher le produit scalaire $cd+e^2$ parmi les facteurs, ou l'utilisation d'un logiciel de calcul formel, par exemple *xcas* (en renommant e pour éviter que *xcas* ne le prenne pour $exp(1)$).