DES OUTILS POUR LA GÉOMÉTRIE

À L'ÂGE DU COLLÈGE :

INVARIANTS, CAS D'ISOMÉTRIE

ET DE SIMILITUDE, TRANSFORMATIONS

Daniel PERRIN

1. Introduction.

Je tiens d'abord à remercier Pierre Terracher et l'équipe de l'IREM de Bordeaux de m'avoir invité à parler dans le cadre des journées 2002 de l'IREM et de la chaleur de l'accueil qui m'a été réservé. Je remercie aussi le public qui a assisté à ma conférence (et notamment Jean Fresnel et Jean-Marie Bouscasse) pour la passion et la qualité du débat qui a suivi. Ce débat m'a d'ailleurs permis de préciser ma position sur un certain nombre de points et le lecteur en trouvera trace dans ce qui suit.

Ce qui m'a valu d'être invité à ces journées c'est sans doute mon rôle de rédacteur du rapport d'étape sur la géométrie [R] de la commission Kahane dont j'assure, depuis sa parution, la promotion (à moins que ce ne soit le service après vente) un peu partout en France. Depuis la sortie de ce rapport en janvier 2000(1) il a été complété par plusieurs textes, cf. [P1], [DPR], [P2](2).

La conclusion essentielle du rapport d'étape c'est la nécessité de conserver un enseignement de géométrie au lycée et plus encore au collège. On y développe plusieurs arguments en faveur de cet enseignement. Il y est notamment question de son utilité et de son importance culturelle.

Dans ce texte, je mettrai plutôt en avant deux autres aspects qui sont à mes yeux des objectifs essentiels de l'enseignement de la géométrie :

- la vision géométrique comme outil de pensée (en mathématiques et ailleurs),
- la géométrie comme lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement.

La thèse que je défends ici, c'est que pour atteindre ces objectifs, c'est-à-dire promouvoir un enseignement de la géométrie qui développe la vision, en s'appuyant sur la figure et qui permette le raisonnement, en ne le réduisant pas à un exercice de style, il est essentiel que les élèves disposent dès le collège des outils les mieux adaptés.

(1) Il est maintenant publié chez Odile Jacob, cf. [R']

(2) Le lecteur attentif retrouvera dans cette conférence de nombreux éléments de ces différents textes, seuls les exemples sont différents.

Le mot "outil" est peut-être le mot clé de cette conférence. C'est sans doute une réminiscence de cette affiche, sur le mur des classes de l'école primaire de mon village, qui proclamait : "les bons ouvriers ont toujours de bons outils". Je pense que cela s'applique aussi aux mathématiques. Dans le cas de la géométrie du collège ([3]) je discuterai de la pertinence de certains outils "pour prouver", parmi lesquels on peut citer :

• les invariants (longueurs, angles, aires),
• les cas "d'égalité" et de similitude,
• le calcul,
• les transformations.

Depuis la réforme des mathématiques modernes, les cas "d'égalité" ont disparu de notre enseignement et le rôle de certains invariants comme angle et aire a été largement minoré. Je considère qu'il s'agit d'une double erreur et je vais essayer d'en convaincre le lecteur. Attention, pour autant, je ne souhaite pas la disparition des transformations dans l'enseignement de la géométrie au collège et je donnerai quelques indications sur les possibilités de cohabitation harmonieuse entre ces diverses approches de la géométrie.

En revanche je ne parlerai pas ici du calcul, qui est pourtant un outil important pour faire de la géométrie. Je me contenterai de renvoyer le lecteur à l'admirable texte de Descartes, cf. [De].

Je terminerai cette introduction par un mot d'explication sur ma position par rapport à l'enseignement du second degré. Comme je n'y ai jamais enseigné moi-même et que je ne suis pas didacticien (sauf par alliance, ce qui n'est d'ailleurs pas négligeable), ma position est, avant tout, celle d'un mathématicien dont la spécificité, depuis plus de 25 ans, est la formation des maîtres. C'est en enseignant la géométrie aux sévriennes, jadis, que j'ai été amené à réfléchir sur ses fondements mathématiques et épistémologiques. Ma position didactique, en faveur de l'usage des invariants et des cas d'isométrie au collège est donc sous-tendue essentiellement par cette réflexion mathématique. Cette réflexion peut sembler théorique, mais comme c'est mon seul apport au débat, je vais la présenter ici, en essayant d'être le plus bref et le moins technique possible.

2. Les outils pour prouver : les invariants.

a) Programme d'Erlangen et invariants.

Le discours dominant à l'époque des mathématiques modernes mettait en avant le programme d'Erlangen de Felix Klein (1872). La thèse de Klein est qu'une géométrie consiste essentiellement en la donnée d'un groupe (de transformations) opérant sur un ensemble. Ce point de vue, reste, à mon avis, tout à fait valable, mais, tel quel, il est insuffisant car, s'il permet de comprendre de quelle géométrie relève tel ou tel

([3]) Pour la géométrie, les années collège me paraissent essentielles. J'étendrai d'ailleurs le collège à la classe de seconde, dernière classe de la formation mathématique (presque) universelle du citoyen. Parmi ces citoyens, je pense en particulier aux les futurs professeurs des écoles (pas nécessairement scientifiques, bien entendu) dont le rôle est essentiel dans la formation, notamment mathématique, de nos (petits) enfants.

théorème (par exemple Pythagore de la géométrie euclidienne, Thalès de la géométrie affine et Pappus de la géométrie projective), il n'explique pas par quels procédés on obtient ces théorèmes. Or, cette question est résolue aussi, à peu près à l'époque de Klein, par la théorie des invariants. Le principe c'est que tout théorème d'une géométrie donnée, relative à un groupe donné, correspond à une relation entre les invariants (polynomiaux) de ce groupe. Mon opinion est donc que la théorie des invariants est inséparable du programme d'Erlangen. Or, dans le cas de la géométrie du collège, les invariants en question correspondent aux notions de longueur, d'angle et d'aire et un contresens majeur de la réforme des mathématiques modernes a été d'occulter au moins partiellement ces invariants qui restent encore mal aimés aujourd'hui.

J'ai développé ces idées dans l'annexe 1 du rapport d'étape et surtout dans l'article [P1] et j'y renvoie le lecteur qui souhaiterait plus de détails. Je donne juste ici quelques exemples de cette théorie.

D'abord que sont les invariants ? On peut les voir de deux façons. La première est géométrique : il s'agit de notions familières, longueur, angle, aire. La seconde est plus algébrique et on y voit effectivement apparaître des polynômes. En effet, si $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées (a_1, a_2) etc., les invariants précédents correspondent respectivement au carré scalaire $(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OA}) = a_1^2 + a_2^2$ (c'est le carré de la longueur OA) ou au produit scalaire $(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OB}) = a_1b_1 + a_2b_2$, (qui correspond au cosinus de l'angle $\widehat{AOB}$) ou encore au "produit vectoriel" (4) $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = a_1b_2 - a_2b_1$ (le double de l'aire orientée du triangle AOB, ou encore $OA \times OB \sin \widehat{AOB}$). Ces invariants apparaissent ainsi comme des polynômes en les coordonnées des points, et ces polynômes sont invariants sous l'action du groupe des rotations (l'aire orientée étant, de plus, invariante par le groupe de toutes les transformations affines de déterminant 1).

Bien entendu, quiconque a fait de la géométrie sait qu'il est utile d'employer les invariants géométriques pour prouver les théorèmes. Ce que je vais expliquer maintenant c'est que ces démonstrations, comme Janus, ont deux faces : celle de la géométrie et celle de l'algèbre. Voici un exemple très simple : la concourance des médianes dans un triangle.

b) Exemple : les médianes.

Quiconque a utilisé un outil sait qu'il faut souvent le compléter par des accessoires : la scie n'est rien sans l'étau, la hache sans le billot et le marteau sans l'enclume. De même, l'usage de l'outil "aire" requiert quelques accessoires. L'un d'eux qui devrait être, à mon avis, un des résultats clés de la géométrie du collège est ce que je propose d'appeler le "lemme des proportions" :

Si deux triangles ont un sommet commun et des bases portées par la même droite, le rapport de leurs aires est égal au rapport des bases, cf. figure 1.

(4) En fait, il s'agit plutôt du déterminant des deux vecteurs sur la base canonique et je vois ici ce produit vectoriel comme un nombre. Pour répondre à une remarque de J. Fresnel, l'aire ordinaire, qui est la valeur absolue du déterminant est bien un invariant, mais bien entendu non polynomial. L'usage de cet invariant plus élémentaire au lieu de l'aire orientée va conduire à distinguer des cas de figure et contient les germes d'une discussion que nous retrouverons plus loin.

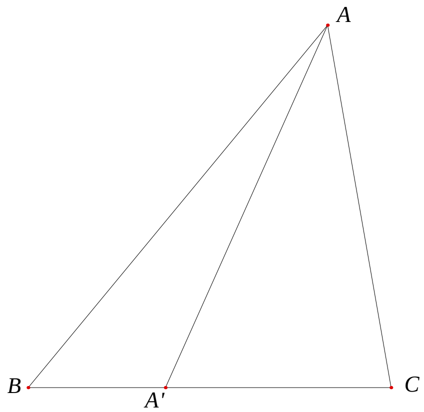


Figure 1

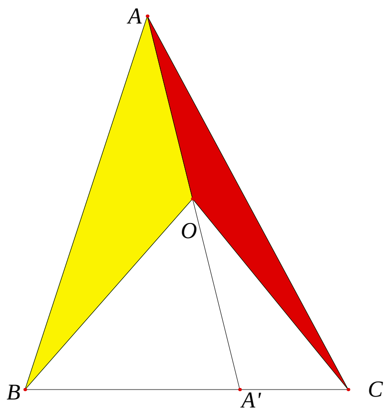


Figure 2

Un cas particulier de ce lemme est le lemme “de la médiane” qui affirme qu'une médiane partage un triangle en deux triangles d'aires égales.

De manière un peu pédante, on peut dire que ces lemmes traduisent la semi-invariance de l'aire par affinité ou son invariance par symétrie oblique. Mais ces lemmes résultent de manière élémentaire de la formule *base* $\times$ *hauteur* $/2$. Une conséquence du lemme des proportions est le “lemme du chevron” ([5]) :

Soit ABC un triangle et O un point du plan. Si (OA) coupe (BC) en A', on a la formule

$$\frac{\mathcal{A}(OBA)}{\mathcal{A}(OCA)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Ce lemme implique aussitôt le résultat suivant :

Si ABC est un triangle, un point O (intérieur au triangle) ([6]) est sur la médiane AA' si et seulement si on a l'égalité des aires $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OAC)$ (1).

La formule (1), qui porte sur l'aire ordinaire : $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2}\,||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}||$, a une traduction algébrique en termes de produit vectoriel i.e. d”aire orientée. On montre précisément que le point O est sur la médiane si et seulement si :

$$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}, \tag{2}$$

([5]) L'appellation de lemme du chevron se comprend bien en regardant la figure 2, au moins si on prend O à l'intérieur du triangle. Le lecteur baptisera ce lemme comme bon lui semble (cerf-volant, papillon, etc.) dans les autres cas. En fait, la version orientée de ce lemme, valable dans tous les cas de figure, mais tellement moins poétique, consiste à dire que si on pose $\lambda = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, on a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$. On voit ici une première apparition de la question des cas de figure.

([6]) le résultat vaut, plus généralement, pourvu que les droites (OA) et (BC) ne soient pas parallèles c'est-à-dire si les aires orientées $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$ sont opposées. (En effet, si on pose $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, la relation signifie que O, A, M sont alignés. Or, $OBMC$ est un parallélogramme, de sorte que (OM) passe par le milieu A' de $[BC]$ et on a bien le résultat.)

On peut alors montrer la concourance des médianes, d'abord par la voie géométrique. Si on note AA', BB', CC' les médianes et O le point d'intersection de (BB') et (CC') on a alors, par (1), $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OBC)$ et $\mathcal{A}(OBC) = \mathcal{A}(OAC)$, d'où $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OAC)$ et le résultat.

Mais cette preuve se lit aussi de manière algébrique. En effet, on a la relation

$$(*) \qquad \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} \wedge (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OC} \wedge (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0}$$

qui traduit la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel. Si on prend l'origine O à l'intersection de deux des médianes, la formule (2) montre que deux des produits vectoriels sont nuls, donc aussi le troisième.

Ce qu'il faut retenir de cette façon algébrique de voir les choses c'est que le théorème correspond à la **relation** $(*)$, d'ailleurs essentiellement triviale ici (comme on le voit en l'écrivant en coordonnées), entre les invariants.

c) Bilan.

L'intérêt théorique (et seulement théorique, il ne s'agit nullement de traiter toute la géométrie par le calcul !) de cette vision algébrique des invariants réside alors dans les trois points suivants :

1) On peut montrer (cf. par exemple [P1]) que tout théorème d'une géométrie s'interprète comme une relation entre des invariants relatifs à cette géométrie, comme il est apparu dans l'exemple ci-desssus ou dans d'autres, voir par exemple la concourance des hauteurs qui provient de la relation

$$(\overrightarrow{OA} | \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} | \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} | \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 0.$$

2) On a une sorte de théorème de complétude pour les invariants : on montre que pour la géométrie euclidienne du triangle (resp. pour la géométrie affine), il n'y a pas d'autres invariants que ceux vus ci-dessus (les produits scalaires et vectoriels) (resp. le produit vectoriel seulement).

3) On a aussi un théorème de complétude pour les relations : là encore on les connaît toutes, il n'y en a pas (de non triviale) en géométrie affine, et en géométrie euclidienne elles se déduisent toutes de la relation

$$(**) \qquad (\overrightarrow{OB} | \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})^2 = (\overrightarrow{OB} | \overrightarrow{OB})\,(\overrightarrow{OC} | \overrightarrow{OC}),$$

(dite identité de Lagrange) qui s'écrit en termes de polynômes :

$$(b_1c_1 + b_2c_2)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2 = (b_1^2 + b_2^2)(c_1^2 + c_2^2)$$

et qui n'est autre que la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Ce qu'affirme la théorie c'est qu'on peut, en principe, obtenir mécaniquement tous les théorèmes de géométrie à partir de ces invariants et de leurs relations.

Par exemple, la relation fondamentale $(**)$ ci-dessus est exactement la traduction analytique de la célèbre propriété de la droite d'Euler : le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés et de bien d'autres résultats (par exemple, celui sur le symétrique de l'orthocentre, cf. [DPR]).

d) Invariants et relations, encore un exemple.

À tous ceux qui ne croiraient pas encore à la puissance des invariants, je propose un petit détour en montrant un exemple, plus convaincant peut-être que ceux qui portent sur la géométrie euclidienne. Cet exemple est issu de la géométrie de l'inversion qui n'est plus enseignée actuellement au lycée (encore que ce qui suit pourrait être expliqué à un élève de terminale S). Le groupe correspondant est le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies à coefficients complexes.

L'invariant fondamental de cette géométrie est le birapport :

$$[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

Lorsque a, b, c, d sont 4 points distincts de $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, il est facile de calculer l'argument de $[a, b, c, d]$ en termes d'angles orientés et on en déduit que les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.

Mais, si on a 8 points a, b, c, d, p, q, r, s, on a une relation, évidente mais splendide, entre les birapports ("le théorème des six birapports") :

$$[abrs]\,[bcps]\,[caqs]\,[pqcd]\,[qrad]\,[rpbd] = 1.$$

La traduction géométrique de cette condition est immédiate : si on a 8 points et si 5 des quadruplets ci-dessus sont cocycliques ou alignés, les birapports correspondants sont réels. Mais alors, le sixième birapport est aussi réel et donc les 4 derniers points sont aussi cocycliques ou alignés.

Cette relation entre les invariants est source de nombreux théorèmes géométriques : le théorème de la droite de Simson, celui des 6 cercles de Miquel, le lemme du pivot.

Soient a, b, c trois points non alignés et p, q, r trois points distincts de a, b, c, situés sur les droites $(bc), (ca), (ab)$. Alors les cercles circonscrits aux triangles cpq, brp, aqr ont un point commun appelé le "pivot".

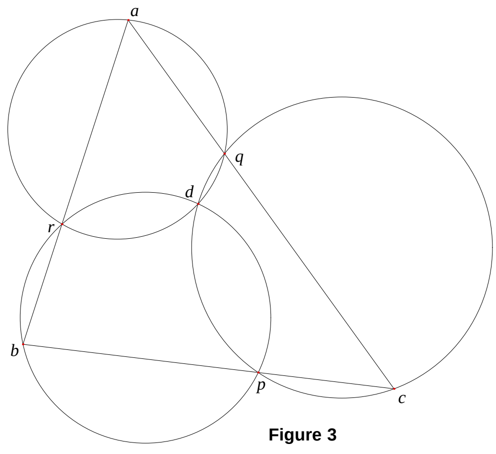


Figure 3

e) Une conclusion et deux exemples.

On a vu que ce que dit la théorie c'est que les théorèmes d'une géométrie proviennent toujours de relations entre invariants relatifs à cette géométrie. La conséquence pratique de ce fait c'est que la constatation empirique que les invariants sont efficaces pour faire de la géométrie est pleinement justifiée par la théorie : tout problème de géométrie affine (resp. euclidienne) doit pouvoir se résoudre par usage des aires (resp. des longueurs et des angles). C'est cette réflexion mathématique qui motive ma position didactique en faveur d'un usage plus systématique des invariants au collège. Voici encore deux exemples pratiques qui montrent leur efficacité.

Le premier, qui utilise les aires, est le célèbre théorème de Ménélaus, cf. figure 4.

Soit ABC un triangle.
Une droite Δ coupe respectivement (BC), (CA), (AB) en A', B', C'.
Montrer qu'on a :
$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

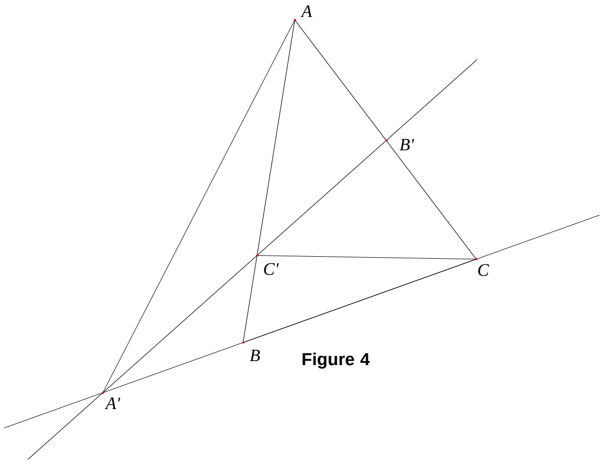


Figure 4

Pour cela, on interprète les rapports de longueur comme des rapports d'aires (grâce au lemme des proportions). Par exemple, on a $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{\mathcal{A}(A'BC')}{\mathcal{A}(A'CC')}$. L'astuce est alors de réutiliser le triangle $A'BC'$ pour le rapport qui fait intervenir $C'B$: $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{\mathcal{A}(A'AC')}{\mathcal{A}(A'BC')}$. L'égalité à prouver devient alors $\dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{\mathcal{A}(A'CC')}{\mathcal{A}(A'AC')}$: c'est le lemme du chevron ! ([7])

([7]) Cet exemple mérite discussion. Bien sûr, il y a un autre cas de figure que celui évoqué ci-dessus (le cas où la transversale ne coupe pas les côtés du triangle). Certains pourraient alors déplorer que la démonstration donnnée ci-dessus ne s'applique que dans un cas particulier, alors qu'une preuve analogue, mais utilisant l'invariant produit vectoriel ou aire orientée s'appliquerait dans chaque cas. Je voudrais dire trois choses à ce sujet :

1) Je pense que la considération des cas de figure fait partie de la géométrie. C'est vrai que s'il y en a trop on peut finir par se lasser, mais il faut passer par cette lassitude pour apprécier des méthodes plus puissantes et plus unificatrices, les montrer avant d'avoir vu leur intérêt c'est mettre la charrue avant les bœufs.

2) L'utilisation des invariants orientés (vecteurs, angles orientés, produit vectoriel, etc.) est certes un progrès dans la mesure où elle unifie un certain nombre de preuves. Attention toutefois à ne pas tomber dans l'excès inverse qui consiste, comme le disait Jean-Jacques Rousseau, à faire de la géométrie "en tournant une manivelle", défaut largement répandu, notamment parmi les étudiants de CAPES avec qui je dois souvent lutter pour qu'ils ne déroulent pas un calcul vectoriel à grands coups de relations de Chasles, hors de toute intuition géométrique.

3) Ce à quoi je suis tout à fait hostile c'est à l'idée qu'on ne doit pas traiter certains problèmes avant d'être en possession de tous les outils (ou des bons outils, etc.) pour le faire. Par exemple, pour ce qui précède, il s'agirait d'attendre de disposer du produit vectoriel pour produire la démonstration de Ménélaus donnée ci-dessus. Je suis persuadé qu'à ce compte là, les mathématiques n'auraient jamais progressé, Pythagore attendant d'avoir le produit scalaire pour énoncer son théorème, Thalès se morfondant en espérant la structure vectorielle sur les droites pour prouver le sien, Euclide convoitant les idéaux pour établir son célèbre lemme et Archimède lorgnant désepérément vers

Le second exemple, très simple, utilise les angles (pour d'autres exemples, cf. [DPR] ou [P2]) :

*ABC est rectangle en A,
(AM) (resp. (AH)) est la médiane
(resp. la hauteur) issue de A,
(DE) est la médiatrice de $[AM]$,
F et G sont les projetés orthogonaux
de H sur les côtés.
Montrer que (FG) est parallèle à (DE)*

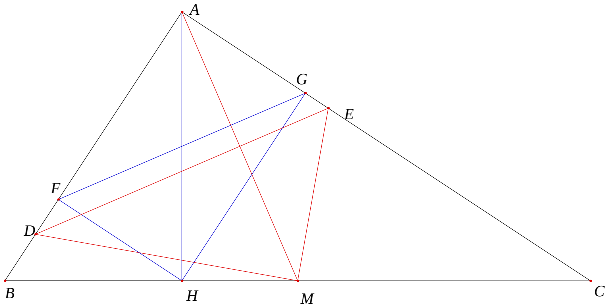


Figure 5

La seule chose à savoir c'est qu'un triangle rectangle est inscrit dans le cercle de diamètre son hypoténuse, ce qui donne des triangles isocèles de côtés les rayons.

Il suffit de montrer l'égalité d'angles $\widehat{GFA} = \widehat{EDA}$. On note qu'on a $\widehat{GFA} = \widehat{FAH}$ par la remarque précédente appliquée à AFG. Il en résulte que $\widehat{GFA}$ est le complémentaire de l'angle en B du triangle initial.

D'autre part $\widehat{EDA}$ est complémentaire de $\widehat{BAM}$ par construction de la médiatrice. Comme $\widehat{BAM}$ est aussi égal à l'angle en B de ABC par la remarque préliminaire, on a gagné.

Dans la pratique, pour que l'utilisation des invariants aire et angle soit efficace il est nécessaire, comme on l'a dit, de disposer d'un petit nombre d'accessoires pour compléter ces outils. Pour les aires il s'agit essentiellement des "lemmes du collège", cf. [P1] ; pour les angles, on peut citer en vrac la somme des angles d'un triangle, l'usage du complémentaire et du supplémentaire, les angles alternes-internes et correspondants, et enfin, le théorème de l'angle inscrit.

3. Les outils pour prouver : les cas "d'égalité".

a) La réforme des mathématiques modernes.

Parmi les cibles préférées des promoteurs de la réforme des mathématiques modernes on trouve les cas d'égalité et de similitude des triangles. Voilà, par exemple, ce que dit Dieudonné à ce sujet, cf. [D] :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles ...

---

l'intégrale pour réaliser la quadrature de la parabole. J'exagère ? Pas tant que ça sur le plan des principes, et je suis persuadé que l'introduction parfois prématurée de concepts qui ne sont pas vraiment nécessaires pour résoudre les problèmes a une responsabilité dans l'incompréhension, voire l'animosité, d'un certain nombre de nos élèves à l'égard des mathématiques.

C'est un des points que je conteste le plus dans le discours de l'époque et dont les conséquences demeurent importantes à l'heure actuelle puisque les cas d'égalité et de similitude ne font plus partie des outils des collégiens.([8])

b) Fondements théoriques de l'usage des cas d'isométrie comme outil.

Un problème crucial qu'on rencontre lorsqu'on travaille avec un groupe de transformations G d'un ensemble X est de dire si G est transitif, c'est-à-dire si on peut transformer n'importe quel élément de X en n'importe quel autre par l'action du groupe. Par exemple, dans le plan, le groupe des isométries opère transitivement sur l'ensemble des points ou sur celui des demi-droites. En revanche, il n'est pas transitif sur l'ensemble des segments, ou sur l'ensemble des couples de demi-droites de même sommet.

Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :

Deux éléments de X peuvent être échangés par l'action de G (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.

Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.

Or, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) **sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci**. D'ailleurs leur démonstration est une parfaite illustration de ce principe de transitivité : on envoie un sommet sur un autre, puis une demi-droite sur une autre, etc. et peu importe qui est la transformation finale. Parodiant le célèbre sketch de Pierre Dac et Francis Blanche on pourrait avoir ce dialogue :

— *Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur cet autre triangle $A'B'C'$?*

— *Oui*

— *Vous pouvez le faire ?*

— *Oui*

— *Il peut le faire !*

Nous allons donner ci-dessous des exemples de cette situation en espérant convaincre le lecteur de l'efficacité des cas d'isométrie des triangles, par rapport à l'usage direct des transformations. En vérité, dans le plan, comme on connaît toutes les isométries, il est souvent assez facile de repérer laquelle employer. En revanche, ce qui est plus délicat c'est de prouver qu'elle fait bien ce qu'on suppose. On y arrive, mais c'est souvent lourd et, presque toujours, inutile.

([8]) Ils ont fait leur réapparition en seconde dans les derniers programmes. Je m'en réjouis dans la mesure où cela suscite une réflexion sur le sujet, mais je pense que cette introduction est trop tardive et les arguments que je vais donner en leur faveur, tant du point de vue de l'efficacité de l'outil que de l'axiomatique, en témoignent.

Le même argument vaut évidemment pour les similitudes, avec, dans ce cas, deux avantages supplémentaires :
• il y a un critère (avec deux angles égaux) d'une simplicité enfantine,
• on connaît encore toutes les similitudes planes mais il est nettement plus compliqué que dans le cas des isométries de repérer celle qui va faire le travail.

c) Des exemples.

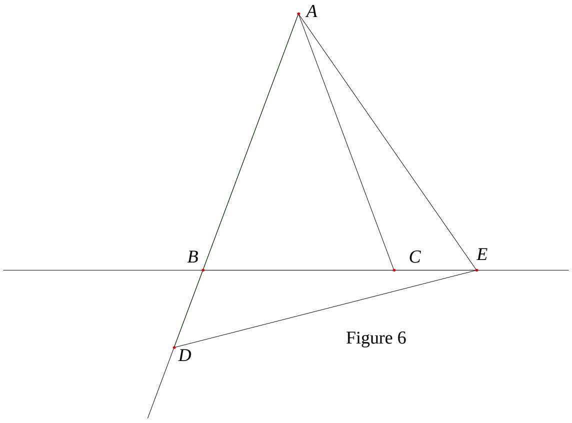
Il y a dans [DPR] et [P2] de nombreux exemples de cette utilisation des cas d'isométrie ou de similitude dans lesquels cette voie est plus simple que le recours aux transformations. À la lumière de ces exemples, je reprendrais volontiers la citation de Dieudonné, en la renversant :

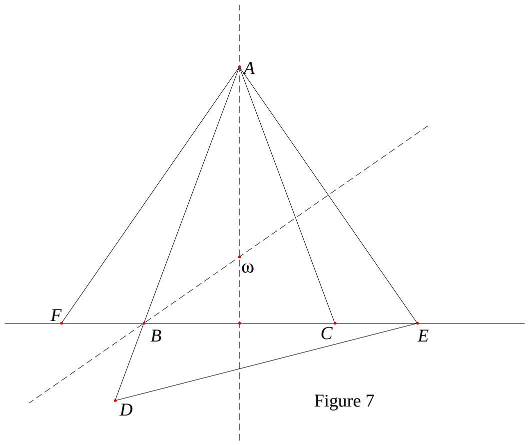
... tout s'obtient de la façon la plus directe en utilisant les "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions, afin de se ramener vaille que vaille à la transformation pertinente ...

Je donne ci-dessous deux exemples utilisant les cas d'isométrie, mais il y en a bien d'autres. On verra sur ces exemples les avantages de la méthode.

Exemple 1.

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points D et E sur (AB) et (BC) (cf. figure 6) tels que $BD = CE = AB - BC$. Montrer que ADE est isocèle.





C'est très facile avec les cas d'isométrie. En effet, on considère ACE et EBD. Ils sont isométriques (deux côtés et un angle). On a donc $AE = DE$.

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations (on peut toujours !). Il suffit de trouver la transformation qui passe de ACE à EBD. L'examen du sens des angles montre que c'est une rotation. On peut donc la trouver comme composée de deux symétries en introduisant le point F symétrique de E dans la symétrie σ_1 par rapport à la médiane-hauteur de ABC. On compose ensuite par la symétrie σ_2 par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et F vient en D (la droite (BC) vient sur (AB) et précisément la demi-droite $[BC)$ sur $[BA)$ et on conclut en utilisant $BF = BD$). On en conclut que, si $\rho = \sigma_2\sigma_1$, on a $\rho(E) = D$. Par ailleurs, on a $\sigma_1(A) = A$ et $\sigma_2(A) = E$ (car le triangle ABE est isocèle en B donc la bissectrice est axe de symétrie). On a donc aussi $\rho(A) = E$ et, en définitive, $EA = DE$.

Trois critiques sur cette démonstration.

1) Il faut déjà repérer quelle est la transformation pertinente (en tous cas, moi, je ne l'ai fait qu'à partir des triangles !)

2) Elle nécessite une construction supplémentaire (le point F).

3) Elle est nettement plus compliquée (cf. la discussion sur les demi-droites) et nécessiterait de donner des indications aux élèves.

En contrepartie, si on pose la question : quel est le centre du cercle circonscrit à ADE, la démonstration via les transformations montre que c'est le centre de ρ, donc le centre ω du cercle inscrit à ABC. Bien entendu, on peut aussi montrer cela par les cas d'isométrie en montrant que les triangles ωBA et ωBE (resp. ωCE et ωBD) sont isométriques (deux côtés, un angle).

Exemple 2.

Soit ABC un triangle. On construit deux triangles rectangles isocèles ABC' et ACB' à l'extérieur de ABC. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que $B'M = C'M$ et $\widehat{B'MC'} = \pi/2$.

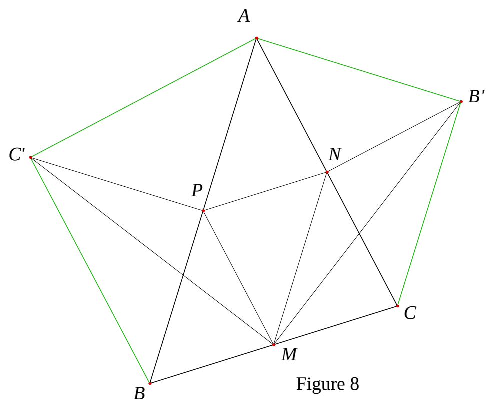


Figure 8

On introduit les milieux N et P de $[AC]$ et $[AB]$ (c'est d'ailleurs nécessaire pour construire B' et C') et on montre que les triangles $B'NM$ et MPC' sont isométriques (la droite des milieux et les angles correspondants font merveille !). On en déduit $MB' = MC'$. L'isométrie des triangles donne les angles égaux et on en déduit l'angle en M en regardant les angles de MPC'.

Bien entendu, on peut aussi raisonner avec les isométries (ou les similitudes). On considère les rotations ρ_1 de centre B' et d'angle $-\pi/2$ et ρ_2 de centre C' et d'angle $-\pi/2$. On montre que la composée est une symétrie centrale en décomposant les rotations en symétries axiales : $\rho_1 = \sigma_{D_1}\sigma_{(B'C')}$ et $\rho_2 = \sigma_{(B'C')}\sigma_{D_2}$ avec des angles de $-\pi/4$ entre D_1 et $(B'C')$ et entre $(B'C')$ et D_2. Si P est l'intersection de D_1 et D_2, on a alors $\rho_2\rho_1 = \sigma_{D_2}\sigma_{D_1} = \sigma_P$ (et le triangle $B'PC'$ est rectangle isocèle en P). Mais, comme on a $\rho_2\rho_1(C) = A$, le centre de symétrie est M et on a gagné.

Ici, indiscutablement, la preuve avec les triangles est beaucoup plus simple et du niveau du collège. L'autre preuve nécessite non seulement la connaissance des rotations, mais aussi une compétence sur les composées et décomposées qui est (était) plutôt du niveau TS spécialité.

Un complément à cet exercice est le suivant :

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque. On construit à l'extérieur de $ABCD$ quatre carrés bâtis sur les côtés de $ABCD$. Soient A', B', C', D' les centres de ces carrés (dans l'ordre). Montrer que $A'C' = B'D'$ et que ces droites sont perpendiculaires.

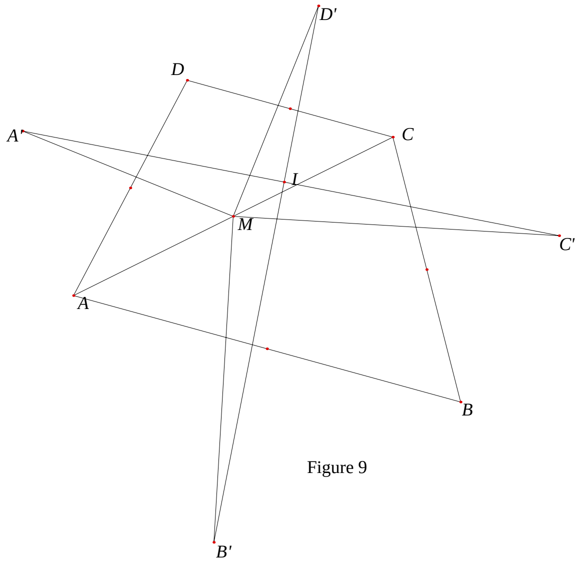


Figure 9

Cette fois, l'exercice est plus facile en utilisant les rotations. Soit M le milieu de $[AC]$. L'exercice précédent montre que la rotation ρ de centre M et d'angle $\pi/2$ transforme D' en A' et B' en C', donc $[C'A']$ en $[B'D']$, d'où le résultat. On peut aussi utiliser les triangles : $A'MC'$ et $D'MB'$ sont isométriques (exercice précédent, plus l'angle en M). cela donne $A'C' = B'D'$. Pour l'angle, si I est l'intersection de $(A'C')$ et $(B'D')$, le quadrilatère inscriptible $MIC'B'$ permet de conclure.

Dans ce cas, c'est l'aspect global de la transformation qui rend les choses plus simples. C'est d'ailleurs, à mon avis, là qu'est la limite entre les deux techniques : les triangles permettent une analyse locale plus facile, les transformations une maîtrise plus globale.

4. Conclusion.

Tout ce qui précède me conduit à critiquer un usage trop exclusif de l'outil "transformations" au collège. En effet, ce choix présente au moins deux défauts essentiels : il appauvrit et il complique.

- *Il appauvrit*

Les transformations ne constituent un outil réellement efficace que lorsqu'on dispose de toute la panoplie des isométries, voire des similitudes planes et qu'on connaît leurs composées. Cela conduit, en attendant, à n'utiliser que la transformation qui relève du programme de la classe considérée (et, dans le meilleur des cas, de celui des classes précédentes), ce qui appauvrit beaucoup les problèmes que l'on peut poser. Les invariants et les cas d'isométrie, en revanche, sont des outils qui, dès qu'on en dispose, permettent de faire presque toute la géométrie du collège, de poser dès le début des problèmes où une vraie réflexion, appuyée sur la figure, est nécessaire.

- *Il complique*

Comme on l'a vu ci-dessus, il y a de nombreux cas où l'usage des transformations, en lieu et place des cas d'isométrie, conduit à des contorsions pénibles, notamment lorsqu'il faut calculer explicitement des composées de transformations, au lieu d'utiliser la transitivité. Une conséquence inéluctable de cette complication est la suivante : pour que les élèves puissent résoudre les problèmes on est obligé de leur donner beaucoup d'indications, de sorte que les tâches qui leur restent sont trop parcellaires et ne donnent pas lieu à une véritable recherche. Comme les élèves n'ont plus vraiment à trouver quoi que ce soit, ce qu'on leur demande est donc de l'ordre de la mise en forme et la démonstration s'en trouve réduite à un exercice de style.

Attention, même si j'ai essayé de convaincre le lecteur que les transformations ne sont pas toujours le meilleur outil pour faire de la géométrie, notamment au collège, je ne voudrais pas que cela l'incite à les jeter aux orties sans autre forme de procès. Je renvoie à [DPR] §7, pour des exemples où les transformations sont l'outil le mieux adapté. On a vu ci-dessus que l'aspect "information globale" des transformations est souvent précieux. En voici encore un exemple :

Soit ABC un triangle équilatéral. On prolonge les côtés en A', B', C' avec $CA' = AB' = BC'$ (cf. figure 10). Montrer que $A'B'C'$ est équilatéral. Soient P, Q, R les intersections de $(AA'), (BB'), (CC')$. Montrer que PQR est équilatéral

Par les transformations c'est immédiat : on utilise la rotation de centre O (centre de ABC) et d'angle $2\pi/3$. Elle permute circulairement A', B' et C' et donc aussi P, Q, R d'où le résultat.

Cela étant, ce n'est pas difficile non plus avec les triangles (pour 1) on utilise les triangles $CA'B'$ et $AB'C'$, pour 2) les angles et on montre que $B'AQ$ et $A'AC$ sont semblables).

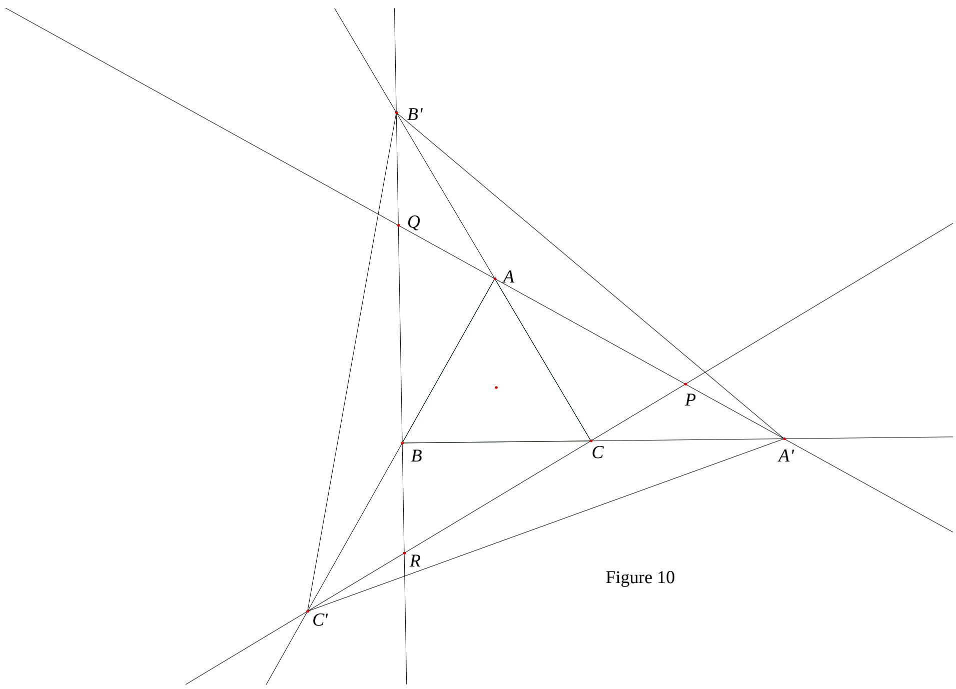


Figure 10

En définitive, je propose de retenir le **principe** suivant : il est naturel d'utiliser les transformations quand elles sont évidentes (c'est-à-dire quand on les voit, ou quand on sait d'avance qu'elles existent !). Sinon, si on ne les perçoit pas, ou si on ne sait pas montrer que leur effet est bien celui qu'on pense (et cela peut dépendre des aptitudes et des connaissances de chacun), plutôt que d'essayer à toute force de les faire apparaître, il est toujours possible et souvent plus simple d'utiliser les invariants et les cas d'isométrie. Voici un dernier exemple qui illustre cette difficulté.

On considère un quadrilatère $ABCD$, de côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$, croisé, et plus précisément tel que $[BC]$ et $[DA]$ se coupent en O, et dont les côtés opposés sont égaux : $AB = CD$ et $BC = AD$. Alors, on a $OA = OC$ et $OB = OD$.

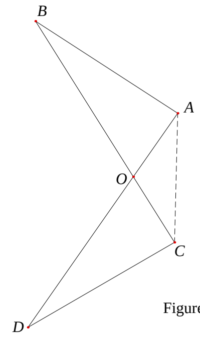


Figure 11

Dans cet exemple on voit bien quelle est la transformation pertinente, le problème c'est qu'il y en a même deux : les symétries par rapport aux médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$, et la difficulté est justement de prouver qu'il s'agit de la même transformation.

Pour conclure en ce qui concerne la géométrie du collège, les deux orientations que j'ai envie de proposer (et qui sont sous-jacentes dans le rapport d'étape [R]) sont donc les suivantes :

- une plus grande utilisation des invariants,
- la réintroduction des cas d'isométrie au collège.

Le premier point ne représente pas un changement considérable. C'est plus un changement d'état d'esprit qu'autre chose. Le second point est plus important et, avant de passer à sa réalisation, il y a tout un travail préalable à faire :

• Il faut mener une réflexion (collective) sur la cohérence générale des programmes et l'ordre dans lequel les notions sont introduites, sur l'axiomatique (en un sens assez large) qui est sous-jacente à ces propositions ([9]) et sur les conséquences didactiques de tels choix. Il y a beaucoup de questions dont la réponse n'est pas évidente : quel équilibre transformations-cas d'isométrie ? quand introduire ces notions ?

• Un grand effort est nécessaire pour convaincre les maîtres de l'intérêt de cette évolution et de ce qu'elle peut leur apporter, en tenant compte de l'expérience qu'ils ont accumulée au cours des années sur les transformations. C'est ce que j'essaie de faire ici. Mais je sais que ce n'est pas facile. Il y a un proverbe russe qui dit : *le plus court chemin est celui que tu connais.*

• Un effort important de formation initiale et continue est indispensable car, à l'exception des anciens qui ont été formés aux cas d'égalité (mais qui d'abord ont oublié ces techniques qu'ils n'ont pas ou peu enseignées et qui ensuite vont bientôt partir à la retraite !), les autres n'en ont pratiquement jamais entendu parler.

([9]) Le livre d'Annie Cousin-Fauconnet fournit à peu de choses près le cadre adéquat pour une telle axiomatique. Voir aussi les livres d'Arsac, Hartshorne et Lion.

5. Références.

[A] ARSAC Gilbert, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, IREM de Lyon, 1998.

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[H] HARTSHORNE Robin, *Geometry : Euclide and beyond*, Springer, 2000.

[L] LION Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

[D] Dieudonné J., *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1968.

[De] Descartes R., *La géométrie*, nouvelle édition, Hermann, 1886.

[DPR] Duperret J.-C., Perrin D., Richeton J.-P., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, à paraître au Bulletin de l'APMEP.

[P1] Perrin D., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, novembre 2000.

[P2] Perrin D., *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.* Actes du colloque Inter-IREM premier cycle, Montpellier, juin 2001, à paraître.

[R] *Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.
Pour les annexes, voir le site Internet de la SMF :
http://www.emath.fr/Serveur/Smf/smf.emath.fr/Enseignements

[R'] *L'enseignement des sciences mathématiques.* Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Odile Jacob, 2002.