Analyse d'un exercice

Ce texte est en quelque sorte un plaidoyer en faveur de l'usage des cas d'isométrie pour faire de la géométrie au collège, avec d'abord des arguments mathématiques, puis des arguments didactiques autour d'un exemple.

1 Pourquoi les cas "d'égalité" ?

1.1 La réforme des mathématiques modernes

Les cas d'isométrie des triangles sont aussi vieux que la géométrie. En effet, ils sont abondamment utilisés par Euclide (le premier cas d'égalité est la proposition 3 du Livre I) et ils étaient un des outils essentiels des mathématiciens d'autrefois, mais aussi des collégiens et des lycéens, pour faire de la géométrie.

Les promoteurs de la réforme des mathématiques modernes les ont pris pour cible. Voilà, par exemple, ce que dit Dieudonné à ce sujet, cf. [1] :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles ...

Bannis par la réforme des mathématiques modernes, ils ont fait leur réapparition dans le programme de seconde paru en 1999, avant d'être balayés par les modifications de programmes de lycée en 2008, puis de réapparaître dans les programmes de collège parus en 2015 ! Nous expliquons ici pourquoi il y a en leur faveur de solides arguments, à la fois mathématiques et didactiques. Ces arguments sont essentiellement repris de [3].

1.2 Fondements mathématiques de l'usage des cas d'isométrie comme outil

Un problème crucial qu'on rencontre lorsqu'on travaille avec un groupe de transformations G d'un ensemble X est de dire si G est transitif, c'est-à-dire si on peut transformer n'importe quel élément de X en n'importe quel autre par l'action du groupe. Par exemple, dans le plan, le groupe des isométries opère transitivement sur l'ensemble des points ou sur celui des demi-droites. En revanche, il n'est pas transitif sur l'ensemble des segments, ou sur l'ensemble des couples de demi-droites de même sommet.

Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :

Deux éléments de X peuvent être échangés par l'action de G (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.

Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.

Or, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) **sans être obligé d'exhiber celle-ci**. Parodiant le célèbre sketch de Pierre Dac et Francis Blanche on pourrait avoir ce dialogue :

— *Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur cet autre triangle $A'B'C'$?*

— *Oui*

— *Vous pouvez le faire ?*

— *Oui*

— *Il peut le faire ! On l'applaudit bien fort.*

Nous analysons ci-dessous en détail un exemple de l'utilisation des cas d'isométrie pour résoudre un problème de géométrie. Le lecteur trouvera dans [2], [4] ou [5] de nombreux autres exemples de cette utilisation dans lesquels cette voie est plus simple que le recours aux transformations. À la lumière de ces exemples, on pourrait reprendre la citation de Dieudonné, en la renversant :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en utilisant les "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions, afin de se ramener vaille que vaille à la transformation pertinente ...

2 Analyse d'un exemple

2.1 L'énoncé et le résultat

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte un point D sur la demi-droite $[BC)$ et un point E sur la demi-droite $[AB)$ de telle sorte qu'on ait $BE = CD = AB - BC$. Que peut-on dire du triangle ADE ?

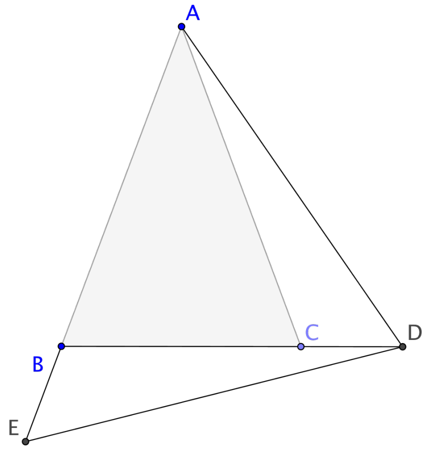

FIGURE 1 –

Si l'exercice est posé ainsi, de manière ouverte et sans figure, le premier travail est de faire une figure (en faisant attention aux indications de sens). Ensuite, comme on demande[1] une propriété du triangle ADE, on peut penser à isocèle (voire équilatéral). Pour élucider ce point, on peut mesurer les longueurs (si l'on est sur papier) ou les faire afficher (si l'on est sur l'ordinateur). On constate l'égalité $DA = DE$ (mais pas $DA = AE$), de sorte que le triangle ADE est isocèle en D. Il s'agit maintenant de prouver cette assertion. Il y a au moins deux méthodes : en utilisant les cas d'isométrie et en utilisant les transformations.

2.2 La preuve par les cas d'isométrie

Le principe est de voir les segments qui nous intéressent, à savoir $[DA]$ et $[DE]$, comme côtés de deux triangles qui vont être isométriques. L'observation de la figure montre facilement les deux triangles pertinents qui sont

1. Si l'on demandait simplement de décrire ce qu'on voit sur la figure, il est probable que les triangles ACD et BDE seraient d'emblée repérés comme superposables.

ACD et BDE. Si on les colorie comme sur la figure 2, on voit les deux triangles comme des surfaces et on imagine bien qu'on va pouvoir transporter l'un sur l'autre. On le voit encore mieux si on fait la figure sur papier et qu'on découpe les triangles.

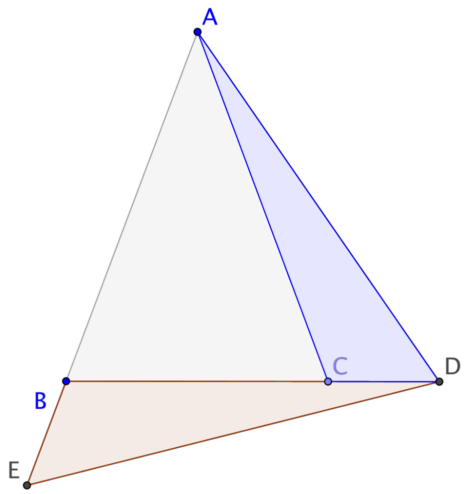

FIGURE 2 –

Pour le prouver, une précaution importante est d'écrire les noms des triangles l'un sous l'autre en faisant se correspondre les sommets homologues. Ici c'est facile car il y a des sommets bien repérables : ceux où l'angle est obtus, c'est-à-dire C pour CDA et B pour BED. Ensuite on fait se correspondre les petits côtés qui partent de ces sommets, donc $[CD]$ et $[BE]$ (et donc les sommets D et E) et enfin les sommets restants A et D. On écrit ainsi les triangles dans l'ordre CDA et BED. Pour montrer que ces triangles ont isométriques il faut exhiber trois éléments égaux (deux côtés et un angle, deux angles et un côté ou trois côtés). Les hypothèses donnent $CD = BE$ (c'est écrit), puis $BD = BC + CD = AB$, mais AB c'est aussi AC car ABC est isocèle. Il ne reste plus qu'à prouver l'égalité des angles obtus en C et B (on n'oublie pas que le premier cas d'isométrie demande [2] que l'angle soit celui qui est compris entre les côtés). Mais, l'un et l'autre sont supplémentaires des angles en C et B du triangle isocèle ABC. Ils sont donc égaux. Le premier cas d'isométrie assure que les triangles CDA et BED sont isométriques, donc tous leurs éléments sont égaux, en particulier les côtés non utilisés $DA = DE$ et on a gagné.

2. En réalité ici, comme on a un angle obtus, cette précaution est inutile.

2.3 La preuve par les transformations

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations. Partant du principe : *qu'est-ce qu'on cherche ?* il suffit de trouver une isométrie qui transforme $[AD]$ en $[DE]$, voire ACD en DBE. Mais cette transformation n'est pas évidente. Si l'on pense en termes de triangles, en imaginant qu'on les découpe, on voit qu'on passe de ACD à DBE par un déplacement, c'est-à-dire sans retourner le triangle. Comme ce n'est visiblement pas une translation, c'est une rotation. Mais trouver son centre et son angle n'est pas du tout évident.

On change donc notre fusil d'épaule en partant cette fois de *qu'est-ce qu'on sait ?* On sait que ABC est isocèle en A et, en termes de transformations, cela signifie qu'il est invariant par la symétrie [3] σ_1 d'axe la médiane-médiatrice-hauteur (AH) issue de A. Certes, mais si l'on part par exemple [4] de $[AD]$, il s'envoie sur un segment qui n'est pas encore tracé sur la figure. Qu'à cela ne tienne, traçons le point F symétrique de D par rapport à (AH). Le segment $[AD]$ est devenu $[AF]$ qu'il faut comparer à $[ED]$.

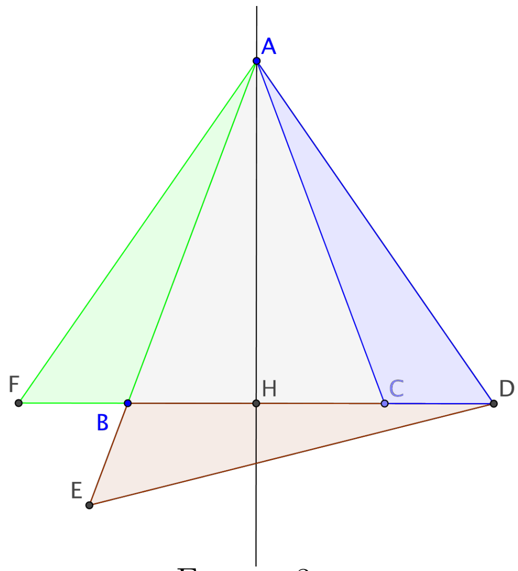

FIGURE 3 –

Une nouvelle idée est d'utiliser une autre symétrie axiale et comme on veut envoyer F en E, on peut prendre la symétrie par rapport à la médiatrice [5] de

3. Si l'on est savant, on sait qu'une rotation est composée de deux symétries axiales et cela peut conduire à chercher une symétrie naturelle. Mais ce résultat n'est plus nulle part au collège et au lycée.

4. Le lecteur vérifiera que l'idée de partir de $[ED]$ est vraiment plus tordue.

5. Le cheminement est repris ici tel qu'il est apparu dans le groupe IREM.

$[FE]$. C'est bien, mais il faut aussi envoyer A en D et pour cela il faudrait plutôt prendre la symétrie par rapport à la médiatrice de $[AD]$. Certes, on voit bien sur la figure que ces deux médiatrices ont l'air égales, mais pourquoi ? Il y a ici une triple difficulté pour des élèves de collège. La première c'est qu'ils risquent de sauter à pieds joints par dessus le problème en pensant que ces deux médiatrices sont évidemment les mêmes. Il faudra déjà les convaincre qu'il y a quelque chose à prouver, ce qui n'est jamais facile.

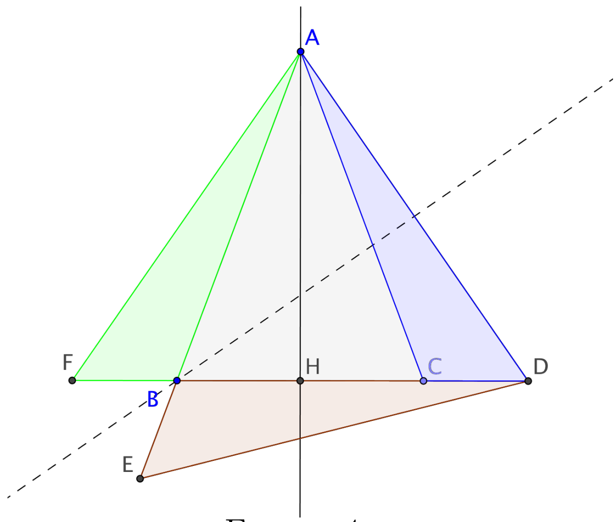

FIGURE 4 –

La deuxième raison tient à la preuve elle-même qui nécessite d'utiliser les propriétés de deux triangles isocèles. On note d'abord que FBE est isocèle (car $FB = CD$ par symétrie et $CD = BE$ par hypothèse). La médiatrice de $[FE]$ est donc aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{FBE}$. Il y a ensuite ABD car $AB = BD = BC + CD$. Là encore, la médiatrice est égale à la bissectrice, cette fois de $\widehat{ABD}$, mais comme ces angles sont opposés par le sommet, les bissectrices sont les mêmes. Mais voilà la troisième raison qui rend ce raisonnement difficile : c'est le mot bissectrice. Bissectrice, vous avez dit bissectrice, mais nous ne chavons pas che que ch'est [6] disent les programmes.

En fait, si l'on voulait rédiger cette preuve, il serait plus simple de partir directement de la bissectrice de l'angle en B du triangle ABC et de la symétrie σ_2 par rapport à cette droite. Cette symétrie échange les droites (BA) et (BD) et précisément les demi-droites $[BA)$ et $[BD]$ et aussi les demi-droites opposées $[BF)$ et $[BE)$. Il en résulte qu'on a $\sigma_2(F) = E$ (à cause de $BF = BE$) et $\sigma_2(A) = D$ (à cause de $BA = BD$). En définitive, on a $AF = DE$ et comme $AF = AD$ on a gagné.

6. De même que les Arvernes d'Astérix ne chavent pas où che trouve Aléjia.

2.1 *Remarque.* La transformation qui passe de ACD à DBE est maintenant évidente : c'est la composée[7] $\sigma_2 \circ \sigma_1$, une rotation dont le centre est à l'intersection des deux axes de symétrie. Comme ces axes sont deux bissectrices de ABC, cette intersection est le centre du cercle inscrit dans ABC.

2.4 Discussion

Si l'on compare les deux démonstrations qui précèdent en pensant à leur utilisation au collège, nul doute que celle par les cas d'isométrie apparaît comme bien plus simple et plus intuitive.

• Elle est plus visuelle : les triangles, vus comme des surfaces sont bien plus apparents que les droites et les points.

• La preuve par les transformations nécessite une construction supplémentaire (le point F), ce qui rend presque impossible qu'un élève l'invente tout seul.

• Quelle que soit la variante utilisée, la preuve par les transformations est bien plus difficile à rédiger : qu'on pense à la coïncidence des deux médiatrices, à l'irruption de la bissectrice, aux problèmes de position avec les demi-droites ... En revanche, avec les cas d'isométrie, la rédaction est facile : la seule précaution est de bien préciser les sommets homologues.

Références

[1] Dieudonné Jean, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.* Hermann, Paris, 1964.

[2] Duperret Jean-Claude, Perrin Daniel, Richeton Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 472-497, 2001.

[3] Kahane Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 2002.

[4] Perrin Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations*, Repères IREM, 53 : 91–110, 2003.

[5] Perrin Daniel, *La géométrie : un domaine hors programme*, Bull. APMEP, 496, 587–600, 2011.

7. Bien entendu, ce mot est proscrit au collège et même au lycée.