MAJORATION DE LA COHOMOLOGIE

0. Introduction.

Soit C une courbe de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^3$, au sens usuel : sans composantes ponctuelles, ni isolées, ni immergées, mais éventuellement non connexe ou non réduite. Soit $\mathcal{O}_C$ le faisceau strucural de C et $\mathcal{J}_C$ le faisceau d'idéaux qui définit C dans $\mathbf{P}^3$. Ces faisceaux sont reliés par la suite exacte fondamentale

$$0 \to \mathcal{J}_C \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to \mathcal{O}_C \to 0. \tag{0}$$

La formule de Riemann-Roch :

$$\chi\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g$$

définit le degré d et le genre (arithmétique) g de C.

L'objectif de la classification des courbes gauches est l'étude du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ des courbes de degré d et genre g de $\mathbf{P}^3$: quelles sont ses composantes irréductibles, quelle est sa dimension, ... L'exemple de $H_{4,0}$ que nous étudions ci-dessous est assez révélateur des problèmes qui se posent. Dans un premier temps on peut dresser une liste de courbes connues. Dans le cas de $H_{4,0}$ on repère au moins deux types de courbes : des courbes de bidegré $(3,1)$ tracées sur une quadrique et des courbes non connexes, réunions disjointes d'une cubique plane et d'une droite. Les questions qui se posent sont de savoir s'il y en a d'autres, si ces familles forment des composantes irréductibles, de quelles dimensions, si le schéma de Hilbert est connexe, etc.

L'idée initiale pour distinguer les diverses composantes de $H_{d,g}$ (idée qui remonte sans doute à Halphen) est d'introduire de nouveaux invariants, essentiellement les dimensions des espaces de cohomologie $H^i\mathcal{J}_C(n)$ (pour $i = 0,1,2$) (on notera que la caractéristique d'Euler de $\mathcal{J}_C(n)$ est déterminée par d et g grâce à la suite exacte (0) et que c'est la même que celle de $\mathcal{O}_C(n)$ à un coefficient binômial près). On notera aussi que l'on a $h^2\mathcal{J}_C(n) = h^1\mathcal{O}_C(n)$ (ces nombres constituent la "spécialité" de C), de sorte que les invariants de $\mathcal{O}_C$ sont déterminés par ceux de $\mathcal{J}_C$. On a $h^1\mathcal{O}_C(n) = 0$ pour n grand, précisément on pose :

$$e = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}.$$

Par ailleurs la dimension $h^0\mathcal{J}_C(n)$ (la "postulation" de C) a un sens géométrique très simple, c'est le nombre de surfaces de degré n indépendantes contenant C et ce nombre est non nul pour $n \geq s_0$, plus petit degré d'une surface qui contient C. Quant au nombre $h^1\mathcal{J}_C(n)$, dimension de la n-ième composante du module de Rao de C, on sait qu'il intervient, en tous cas, dans l'étude des classes de liaison des courbes. L'hypothèse faite sur les courbes (pas de composante ponctuelle) montre que le module de Rao est de longueur finie, de sorte qu'il n'y a qu'un nombre fini de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ non nuls. Lorsque ces nombres ne sont pas tous nuls on pose :

$$r_a = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{J}_C(n) \neq 0\} \qquad \text{et} \qquad r_o = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$$

(si les $h^1\mathcal{J}_C(n)$ sont tous nuls on dit que la courbe C est arithmétiquement de Cohen-Macaulay, en abrégé ACM, et on convient de poser $r_a = +\infty$ et $r_o = -\infty$).

Pour étudier $H_{d,g}$, notre approche, telle qu'elle est exposée dans [MDP1], consiste à étudier les courbes à partir de leurs modules de Rao. En effet, on sait, cf. [MDP1] IV, déterminer les courbes minimales associées à un module, puis les autres par biliaison. Pour déterminer toutes les courbes de $H_{d,g}$ on commence donc par faire la liste des modules possibles et il est essentiel, à cet égard, de disposer de majorations ou de minorations des entiers r_a, r_o, et de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ (ainsi que de e et s_0). C'est l'objectif poursuivi dans cet exposé. On en verra une application dans le cas de $H_{4,0}$, cf. aussi [AA].

1. Enoncé des résultats.

a) Les courbes planes.

Ce cas est trivial de notre point de vue. En effet, si C est une courbe plane de degré d, on a une résolution :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-d-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-d) \to \mathcal{J}_C \to 0$$

qui donne aussitôt $s_0 = 1$, $e = d-3$, $h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Dans toute la suite les courbes seront supposées non planes.

Bien entendu, les courbes de degré 1 sont planes. En effet, si C est de degré 1 elle est intègre (sinon elle contiendrait une courbe de degré plus petit comme composante irréductible ou comme sous-schéma réduit). Alors, tout plan contenant 2 points distincts de C contient C. Dans la suite on supposera donc $d \geq 2$.

b) Le cas des courbes lisses.

Le cas des courbes lisses a été étudié depuis longtemps. Paradoxalement, certains résultats sont beaucoup plus difficiles que ceux du cas général. Voici un aperçu des majorations et minorations connues :

Théorème 1.1. *Soit C une courbe lisse et connexe de degré d, non plane. On a les inégalités suivantes (où $[x]$ désigne la partie entière de x) :*
1) $r_a \geq 1$, $r_o \leq d-3$,
2) $-2 \leq e \leq [d/2]-2$,
3) $2 \leq s_0 \leq [-3+\sqrt{6d-2}]+1$.

Remarques 1.2.
1) On notera que les bornes données ci-dessus sont fonctions du seul degré.
2) Les inégalités $r_a \geq 1$ et $2 \leq s_0$ sont évidentes, $-2 \leq e$ et $s_0 \leq [-3+\sqrt{6d-2}]+1$ sont faciles (cf. §4 ci-dessous). L'inégalité $e \leq [d/2]-2$ est due à Castelnuovo ([C]) qui avait aussi prouvé $r_o \leq d-2$, cf. [S]. Enfin l'inégalité $r_o \leq d-3$ est beaucoup plus difficile, elle a été prouvée par Gruson, Lazarsfeld et Peskine (cf. [GLP]). Cette borne est optimale (elle est atteinte pour les courbes rationnelles de degré d tracées sur une quadrique lisse). Voir §4 ci-dessous pour une discussion sur le cas lisse.

c) Le cas général.

Il y a plusieurs différences notables. D'abord, si C est non connexe (resp. non réduite), on peut avoir $r_a \leq 0$ (resp. < 0). Ensuite, on ne peut espérer avoir des encadrements du module de Rao qui soient fonction du seul degré comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.3. Soient a un entier ≥ 2 et C la courbe d'idéal saturé

$$I_C = (X^2, XY, Y^2, XZ^a - YT^a).$$

En coupant C par le plan $Z = 0$ on voit que C est de degré 2. Comme C est portée par la droite $D = V(X, Y)$, elle est recouverte par les ouverts $Z \neq 0$ et $T \neq 0$ et on obtient une section non nulle de $H^0\mathcal{O}_C(1-a)$ (avec $1 - a < 0$) en prenant respectivement sur ces ouverts les sections Y/Z^a et X/T^a qui se recollent en vertu de la dernière équation. On a donc $h^0\mathcal{O}_C(1-a) \neq 0$ et la suite

$$0 \to \mathcal{J}_C(1-a) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1-a) \to \mathcal{O}_C(1-a) \to 0$$

montre que l'on a aussi $h^1\mathcal{J}_C(1-a) \neq 0$, donc $r_a \leq 1 - a$. De plus, on peut lier C à elle-même par les surfaces X^2, Y^2 et on en déduit $h^1\mathcal{J}_C(a-1) \neq 0$ donc $r_o \geq a - 1$. Précisément, il est facile de montrer que le module de Rao M_C est le module de Koszul $R/(X, Y, Z^a, T^a)(a-1)$ de sorte que r_a et r_o valent exactement $1 - a$ et $a - 1$, la valeur maximum de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ étant atteinte en 0 et égale à a. Comme a peut être arbitrairement grand on voit que les nombres r_a, r_o et $h^1\mathcal{J}_C(n)$ ne peuvent être bornés en fonction du degré qui est constant et égal à 2. En revanche, le genre de C étant égal à $-a$, ils vont l'être en fonction de d et g. Ce fait est d'ailleurs général :

Proposition 1.4. *Soient d et g des entiers avec $d > 0$. Il existe des nombres $r_a(d, g)$, $r_o(d, g)$, $N(d, g)$ tels que l'on ait, pour toute courbe C de degré d et genre g, non ACM, $r_a(C) \geq r_a(d, g)$, $r_o(C) \leq r_o(d, g)$ et, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $h^1\mathcal{J}_C(n) \leq N(d, g)$.*

Démonstration. Faisons le cas de r_o, le reste se traite de la même manière. Soit C une courbe de $H_{d,g}$. D'après le théorème d'annulation de Serre il existe un entier $n(C)$ tel que l'on ait, pour $n \geq n(C)$, $h^1\mathcal{J}_C(n) = h^2\mathcal{J}_C(n-1) = h^3\mathcal{J}_C(n-2) = 0$. Par semi-continuité on en déduit que ces égalités, pour $n = n(C)$, sont encore valables pour C' dans un voisinage $U(C)$ de C. Ces conditions signifient que $\mathcal{J}_C$ est $n(C)+1$-régulier et, d'après le lemme de Castelnuovo-Mumford, elles sont encore valables pour $C' \in U(C)$ et pour $n \geq n(C)$. Comme le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est quasi-compact on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $U(C_1), U(C_2), \cdots, U(C_n)$ et il suffit de prendre alors $r_o(d, g) = \sup n(C_i)$.

Le théorème suivant, qui est le résultat essentiel prouvé ici, précise 1.4 en donnant des bornes **explicites** (et optimales) des invariants :

Théorème 1.5. *Soit C une courbe de degré d et genre g, non plane (donc vérifiant $g \leq (d-2)(d-3)/2$, cf. Exp. m). On a les propriétés suivantes :*

1) $$r_a \geq g + 1 - \frac{(d-2)(d-3)}{2},$$

2) $$r_o \leq \frac{d(d-3)}{2} - g,$$

3) $$\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad h^1\mathcal{J}_C(n) \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2} - g = a.$$

Plus précisément, on a, pour $0 \leq n \leq d-2$, $h^1\mathcal{J}_C(n) \leq a$ et la fonction $h^1\mathcal{J}_C(n)$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle (1) *$[r_a, 0]$ (resp. $[d-2, r_o]$). De plus, pour tout couple d, g vérifiant $g \leq (d-2)(d-3)/2$, il existe une courbe C (dite extrémale dans le cas $a > 0$, cf. d) ci-dessous) qui atteint les bornes ci-dessus.*

On peut donner une représentation graphique de ce théorème en disant que le module de Rao est inclus dans le trapèze ci-dessous (on a posé $l = d-2$). Sur ce dessin on voit aussitôt que les assertions concernant r_a et r_o sont conséquences de la majoration de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ et des résultats de monotonie.

On a aussi les résultats suivants concernant e et s_0 :

Proposition 1.6. *Soit C une courbe de degré d non plane. On a les inégalités :*

$$-2 \leq e \leq d-4, \qquad\qquad 2 \leq s_0 \leq d.$$

Nous verrons aussi ci-dessous (cf. 2.10) des majorations de h^0 et h^2 par les valeurs prises par ces fonctions pour les courbes extrémales, de sorte que ces courbes réalisent le maximum de la cohomologie pour tous les h^i.

2. Démonstrations de 1.5 et 1.6.

a) Le principe.

Les notations sont celles de 1.5, la méthode est celle de Castelnuovo : on coupe la courbe C par un plan H général dont on note encore H l'équation. Si le plan H ne contient (ensemblistement) aucune composante irréductible de C et si $Z = C \cap H$ est la section obtenue, on a alors, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, une suite exacte (cf. Exp. 2) :

(1) $$0 \to \mathcal{J}_C(k-1) \xrightarrow{\mu_H} \mathcal{J}_C(k) \to \mathcal{J}_Z(k) \to 0$$

où $\mathcal{J}_Z$ est le faisceau d'idéaux qui définit Z dans $H = \mathbf{P}^2$ et où μ_H est l'application induite par la multiplication par H.

(1) *La notation $[a, b]$ suppose qu'on a $a \leq b$ et désigne l'ensemble, éventuellement vide, des entiers x vérifiant $a \leq x \leq b$.*

La suite de cohomologie associée à cette suite exacte permet de majorer les invariants de C en fonction de ceux de Z et, comme ceux-ci l'ont été dans l'exposé m, on obtient l'inégalité $h^1\mathcal{J}_C(n) \leq a$.

On montre ensuite les assertions de monotonie (on verra qu'il y a plusieurs méthodes possibles).

b) Majoration de $h^1\mathcal{J}_C(n)$.

On met en pratique la méthode de Castelnuovo expliquée ci-dessus en commençant par le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit C une courbe de genre g et Z une section plane générale. On a les inégalités :*

1) $$\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad h^2\mathcal{J}_C(n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} h^1\mathcal{J}_Z(k),$$

2) $$\forall n \geq 0, \qquad h^1\mathcal{J}_C(n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} h^1\mathcal{J}_Z(k) - g.$$

La quantité $\sum_{k\geq 1} h^1\mathcal{J}_Z(k)$ est appelée le genre virtuel de Z et notée $g(Z)$.

Démonstration. La suite exacte (1) ci-dessus donne la suite de cohomologie :

$$\to H^1\mathcal{J}_C(k-1) \to H^1\mathcal{J}_C(k) \to H^1\mathcal{J}_Z(k) \to H^2\mathcal{J}_C(k-1) \to H^2\mathcal{J}_C(k) \to 0$$

(la surjectivité de la dernière flèche est plus évidente si on la pense en termes de $H^1\mathcal{O}_C(k)$).

On en déduit d'abord, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, l'inégalité $h^2\mathcal{J}_C(k-1) - h^2\mathcal{J}_C(k) \leq h^1\mathcal{J}_Z(k)$ qui, en sommant de $k = n+1$ à l'infini, donne le premier point du lemme.

On en déduit ensuite l'inégalité $h^1\mathcal{J}_C(k) - h^1\mathcal{J}_C(k-1) \leq h^2\mathcal{J}_C(k) - h^2\mathcal{J}_C(k-1) + h^1\mathcal{J}_Z(k)$ qui, en sommant de $k = 1$ à n (avec $n \geq 1$) donne

$$h^1\mathcal{J}_C(n) - h^1\mathcal{J}_C \leq h^2\mathcal{J}_C(n) - h^2\mathcal{J}_C + \sum_{k=1}^{n} h^1\mathcal{J}_Z(k).$$

Comme on a $h^2\mathcal{J}_C - h^1\mathcal{J}_C = \chi\mathcal{J}_C = g$ on obtient, en tenant compte de 1), l'inégalité 2) pour $n \geq 1$. Pour $n = 0$ l'inégalité 2) résulte aussitôt de 1).

La majoration de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ va donc résulter de celle de $h^1\mathcal{J}_Z(k)$. Rappelons ce qui a été vu à ce sujet dans les exposés précédents :

Lemme 2.2 (Strano). *Soit C une courbe non plane de degré $d \geq 3$, Z une section plane générale de C. Alors Z n'est pas alignée. On a donc $h^0\mathcal{J}_Z(1) = 0$ et $h^1\mathcal{J}_Z(1) = d - 3$.*

Voir exposé p.

Lemme 2.3. *Soit Z un sous-schéma fini de $\mathbf{P}^2$. La fonction $n \mapsto h^1\mathcal{J}_Z(n)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[1, r]$ où r désigne le plus grand entier tel que $h^1\mathcal{J}_Z(r)$ soit $\neq 0$. On a $r \geq -1$.*

Voir exposé m.

Corollaire 2.4. *Soit Z un sous-schéma fini de $\mathbf{P}^2$, de degré $d \geq 3$, non aligné.*
1) On a, pour tout $n \geq 1$, $h^1\mathcal{J}_Z(n) \leq \sup(0, d-n-2)$.
2) On a une majoration du genre virtuel de Z :

$$g(Z) = \sum_{k \geq 1} h^1\mathcal{J}_Z(k) \leq \frac{(d-3)(d-2)}{2}.$$

Démonstration. Le premier point vient de 2.3 et de la formule $h^1\mathcal{J}_Z(1) = d-3$. Le second en résulte par sommation.

On peut alors conclure :

Corollaire 2.5. *Soit C une courbe non plane de degré d et genre g. On a, pour tout $n \geq 0$:*

$$h^1\mathcal{J}_C(n) \leq \frac{(d-3)(d-2)}{2} - g.$$

Démonstration. Si d est ≥ 3, la section plane générale Z de C est non alignée en vertu de 2.2, et on conclut par 2.4 et 2.1. Si $d = 2$, la section plane vérifie $h^0\mathcal{J}_Z(1) = 1$ (si ce nombre était ≥ 2 cela signifierait que le degré de C est égal à 1), donc $h^1\mathcal{J}_Z(1) = 0$ et on a donc $g(Z) = 0$, de sorte que la majoration est encore valable.

c) Monotonies.

Rappelons déjà le résultat vu dans l'exposé 2 (par deux méthodes distinctes) :

Proposition 2.6. *La fonction $n \mapsto h^1\mathcal{J}_C(n)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[r_a, 0]$.*

Associé à 2.5 ce résultat donne la majoration de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Pour la décroissance de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ sur $[d-2, r_o]$ il y a là encore plusieurs voies : soit la méthode utilisant le lemme de Migliore (cf. exposé 2), soit encore celle qui consiste à établir la convexité de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ pour $n \geq d-2$ comme on l'a fait pour $n \leq 0$ dans l'exposé 2, cf. ci-dessous §3, soit enfin la suivante :

Proposition 2.7. *Soit C une courbe et Z une section plane générale de C. On désigne par r, comme en 2.3, le plus grand entier tel que $h^1\mathcal{J}_Z(r)$ soit $\neq 0$. Alors, la fonction $n \mapsto h^1\mathcal{J}_C(n)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[r+1, r_o]$.*

Démonstration. Supposons $n \geq r+1$. Comme $h^1\mathcal{J}_Z(n)$ est nul on a une suite exacte

$$0 \to H^0\mathcal{J}_C(n-1) \to H^0\mathcal{J}_C(n) \xrightarrow{\alpha_n} H^0\mathcal{J}_Z(n) \xrightarrow{\beta_n} H^1\mathcal{J}_C(n-1) \xrightarrow{\gamma_n} H^1\mathcal{J}_C(n) \to 0.$$

On en déduit déjà que $h^1\mathcal{J}_C(n)$ est décroissante au sens large et l'égalité $h^1\mathcal{J}_C(n-1) = h^1\mathcal{J}_C(n)$ signifie exactement que γ_n est bijective, ou encore que β_n est nulle, ou encore que α_n est surjective. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.8. *On suppose $n \geq r+2$. Alors, si α_n est surjective, α_{n+1} l'est aussi.*

Si on admet 2.8, la proposition 2.7 en résulte car si pour un $n \geq r+2$ on a $h^1\mathcal{J}_C(n-1) = h^1\mathcal{J}_C(n)$ c'est alors vrai pour tous les n plus grands et, comme $h^1\mathcal{J}_C(n)$ est nul pour n grand cela signifie qu'on est au delà de r_o.

Montrons donc 2.8. Soit $f \in H^0\mathcal{J}_Z(n+1)$. On a un nouveau lemme :

Lemme 2.9. *On suppose $n \geq r+2$. Alors, en notant X_i ($i = 0,1,2$) les variables, la fonction f s'écrit $f = X_0f_0 + X_1f_1 + X_2f_2$ avec $f_i \in H^0\mathcal{J}_Z(n)$.*

Admettons un instant ce lemme. Alors, comme α_n est surjective, il existe des g_i dans $H^0\mathcal{J}_C(n)$ tels que $f_i = \alpha_n(g_i)$ et on a $f = \alpha_{n+1}(\sum_{i=0}^2 X_ig_i)$ ce qui achève de prouver 2.8.

Montrons maintenant 2.9. La forme de f conduit à introduire le $k[X_0,X_1,X_2]$-module $k = k[X_0,X_1,X_2]/(X_0,X_1,X_2)$ et sa résolution par le complexe de Koszul qui donne la suite exacte de faisceaux

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-2)^3 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1)^3 \xrightarrow{j} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \to 0$$

avec $j = (X_0,X_1,X_2)$. On pose $\mathcal{N} = \mathrm{Ker} j$. Comme $\mathcal{N}$ est un faisceau localement libre, la suite (2) reste exacte en tensorisant par $\mathcal{J}_Z(n+1)$. En prenant la cohomologie on obtient les deux suites exactes suivantes :

$$0 \to H^0(\mathcal{N} \otimes \mathcal{J}_Z(n+1)) \to H^0\mathcal{J}_Z(n)^3 \xrightarrow{j_Z(n+1)} H^0\mathcal{J}_Z(n+1) \to H^1(\mathcal{N} \otimes \mathcal{J}_Z(n+1)) \to 0$$

$$\cdots \to H^1\mathcal{J}_Z(n-1)^3 \to H^1(\mathcal{N} \otimes \mathcal{J}_Z(n+1)) \to H^2\mathcal{J}_Z(n-2) \to \cdots.$$

Comme n est ≥ 0 donc $n-2 \geq -2$, $h^2\mathcal{J}_Z(n-2)$, qui n'est autre que $h^2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n-2)$, est nul. De plus, l'hypothèse $n \geq r+2$ montre que l'on a $h^1\mathcal{J}_Z(n-1) = 0$, donc $H^1(\mathcal{N}\otimes\mathcal{J}_Z(n+1)) = 0$ et $j_Z(n+1)$ (qui est donnée par la même matrice que j) est surjective, ce qui est exactement la conclusion du lemme 2.9.

d) Courbes extrémales.

Soient a et l des entiers avec $a \geq 1$ et $l \geq 0$. Soit C la courbe d'idéal saturé $I_C = (X^2, XY, hY^2, XT^{a+l} + hYZ^a)$ où h est un polynôme homogène de degré l en Y,Z,T, non nul. On montre facilement, cf. [MDP4], que C est de degré $d = l+2$, de genre $g = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - a$ et que son module de Rao, qui est $k[X,Y,Z,T]/(X,Y,Z^a,T^{a+l})$, atteint les valeurs extrémales pour r_a, r_o et $h^1\mathcal{J}_C(n)$. Pour d'autres détails sur ces courbes, cf. [MDP4].

Lorsque la courbe C vérifie $a = 0$, i.e. $g = (d-2)(d-3)/2$, le théorème 1.5 montre que C est ACM et on montre facilement que sa résolution est la suivante :

$$0 \to R(-3) \oplus R(-d) \to R(-2)^2 \oplus R(-d+1) \to I_C \to 0.$$

e) Encadrement de e.

Montrons d'abord que e est ≥ -2. Soit C_0 une composante irréductible de C, munie de sa structure réduite, de sorte que C_0 est un sous-schéma fermé intègre de C. On a donc une suite exacte $0 \to \mathcal{J}_{C_0/C} \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C_0} \to 0$ qui donne, en passant à la cohomologie une surjection $H^1\mathcal{O}_C(-2) \to H^1\mathcal{O}_{C_0}(-2)$ (car $\mathcal{J}_{C_0/C}$ qui est à support dans C n'a pas de H^2). Comme C_0 est intègre son genre arithmétique g est ≥ 0 et, par Riemann-Roch, on a $h^0\mathcal{O}_{C_0}(-2) - h^1\mathcal{O}_{C_0}(-2) = -2d_0 + 1 - g \leq -1$. Mais, toujours en vertu de l'intégrité de C_0, on a $h^0\mathcal{O}_{C_0}(-2) = 0$, donc $h^1 > 0$, i.e., $e \geq -2$. Cette démonstration vaut pour toutes les courbes, planes ou non. Bien entendu, le cas $e = -2$ est atteint dans le cas d'une droite ou d'une réunion disjointe de droites.

Supposons maintenant C non plane et montrons que l'on a $e \leq d - 4$. Supposons d'abord $d \geq 3$. Le lemme 2.1 montre qu'on a $e \leq r - 1$ (avec les notations de 2.3) et le corollaire 2.4 donne $r \leq d - 3$, d'où le résultat.

Il reste le cas $d = 2$. Il s'agit de montrer $h^1\mathcal{O}_C(-1) = 0$. Soit Z une section plane générale de C. On a déjà $h^1\mathcal{J}_Z(1) = 0$ (cf. la démonstration de 2.5). On en déduit $h^1\mathcal{O}_C = 0$ par 2.1, d'où $h^1\mathcal{J}_C = -g$ par Riemann-Roch, ce qui montre que g est ≤ 0 (cf. aussi Exp. m). En fait, on peut supposer $g < 0$, sinon C est plane. On a ensuite, par Riemann-Roch encore, $h^1\mathcal{O}_C(-1) = h^0\mathcal{O}_C(-1) + 1 + g = h^1\mathcal{J}_C(-1) + 1 + g$. Mais, comme $h^1\mathcal{J}_C = -g$ est > 0, on a vu (cf. Exp. 2) l'inégalité $h^1\mathcal{J}_C(-1) < h^1\mathcal{J}_C = -g$, d'où l'on déduit $h^1\mathcal{O}_C(-1) < 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Les courbes extrémales définies en d) ci-dessus atteignent aussi la borne $e = d - 4$, cf. [MDP4].

f) Majorations de h^2 et h^0.

Proposition 2.10. *Soit C une courbe de degré d et genre g. On suppose C non plane, de sorte que l'on a $d \geq 2$ et $g \leq (d-2)(d-3)/2$. Soit C_0 une courbe extrémale de degré d et genre g (ou ACM si g est égal à $d-2)(d-3)/2$), cf. d). On a les inégalités :*

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbf{Z}, \quad \forall i = 0,1,2,3 \qquad h^i\mathcal{J}_C(n) \leq h^i\mathcal{J}_{C_0}(n).$$

Pour $i = 2$ et $n \geq 2$ l'inégalité (1) s'écrit encore

$$h^2\mathcal{J}_C(n) \leq \binom{d-n-2}{2},$$

pour $i = 0$ et $1 \leq n \leq d-4$ elle s'écrit

$$h^0\mathcal{J}_C(n) \leq \frac{n(n+4)(n-1)}{6}.$$

Démonstration. Le cas $i = 3$ est trivial et $i = 1$ n'est autre que le théorème 1.5. Montrons l'inégalité qui concerne h^2. Si χ est la caractéristique d'Euler de C on a $h^2 = \chi + h^1 + h^3 - h^0$ de sorte que l'inégalité est acquise lorsque h^0 est nul, ce qui est le cas pour $n \leq 1$ puisque C n'est pas plane. Pour $d = 2$ on a $e = -2$ (cf. 1.6) et on a terminé. Supposons donc $d \geq 3$ et soit Z une section plane générale de C. On a, cf. 2.1,

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad h^2 \mathcal{J}_C(n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} h^1 \mathcal{J}_Z(k).$$

On a, pour $k \geq 1$, cf. 2.4.1, $h^1 \mathcal{J}_Z(k) \leq \sup(0, d-k-2)$, d'où, par sommation, $h^2 \mathcal{J}_C(n) \leq \binom{d-n-2}{2}$ et on vérifie que c'est la valeur qui correspond au cas des courbes extrémales ou ACM. En effet, en vertu de [MDP4], la résolution de type N de C_0 dans le cas extrémal est donnée par :

$$0 \to R(a-3) \oplus R(-d) \to [R(a-2)^2 \oplus R(-1) \oplus R(-d+1) \to R(a-1)] \to I_{C_0} \to 0$$

avec $a = (d-2)(d-3)/2 - g$ et la cohomologie est la même dans le cas $a = 0$.

Pour $i = 0$ le raisonnement est analogue. On peut se borner aux entiers n vérifiant $2 \leq n \leq d-4$ (pour $n > d-4$ le h^2 est nul, cf. 1.6, et la majoration résulte de celles de h^1 et h^3). On utilise, pour $n \geq 1$, l'inégalité

$$h^0 \mathcal{J}_C(n) \leq \sum_{k=1}^{n} h^0 \mathcal{J}_Z(k)$$

qui résulte facilement de 2.1 avec la formule $h^0 \mathcal{J}_Z(k) = \binom{k+2}{2} - d + h^1 \mathcal{J}_Z(k)$, cf. [MDP2]. En effet, comme C_0 réalise le maximum de $h^2 \mathcal{J}_C(n)$, c'est, en vertu de 2.1, que sa section plane Z_0 réalise le maximum pour $h^1 \mathcal{J}_Z(k)$ donc aussi pour $h^0 \mathcal{J}_Z(k)$. Ce maximum se calcule aussitôt avec 2.4 ce qui donne une borne pour $h^0 \mathcal{J}_C(n)$ et on vérifie, en utilisant cette fois la résolution de type E de C_0, que cette borne est atteinte pour les extrémales et qu'elle vaut la valeur indiquée en 2.10.

3. Majoration de s_0.

Nous montrons dans ce paragraphe l'inégalité $s_0 \leq d$ annoncée en 1.6. La méthode utilisée est une autre méthode de Castelnuovo, cette fois avec une projection et elle nous permettra aussi de prouver la convexité de la fonction $n \mapsto h^1 \mathcal{J}_C(n)$ pour $n \geq d-2$.

a) Projections et s_0.

Soit P un point de $\mathbf{P}^3$ et H un plan ne contenant pas P. La projection $\pi = \pi_{P,H}$ associée à P et H est l'application de $\mathbf{P}^3 - \{P\}$ dans H qui à un point Q associe l'unique point d'intersection de la droite $< PQ >$ avec H. On peut choisir un repère projectif de telle sorte que P ait pour coordonnées $(1, 0, 0, 0)$ et que H soit défini par l'équation $X = 0$. Dans ce repère π est donnée par la formule $\pi(x, y, z, t) = (y, z, t)$ et c'est donc un morphisme de schémas.

Soit C une courbe de degré d de $\mathbf{P}^3$ ne passant pas par P. On considère l'image schématique de C par π. C'est un sous-schéma fermé Γ de $H = \mathbf{P}^2$ défini par l'idéal gradué J qui est la trace de I_C sur le sous-anneau $S = k[Y, Z, T]$ de $R = k[X, Y, Z, T]$. Comme C est de dimension 1, son image Γ est de dimension ≤ 1 et donc J est $\neq 0$.

Lemme 3.1. *L'idéal J est principal : on a $J = (F)$ avec F homogène de degré $d' > 0$, de sorte que le schéma Γ est une courbe plane et on a $I_\Gamma = J$. De plus, on a $d' \leq d$.*

Remarque 3.2. Attention, en général on n'a pas $d' = d$. Par exemple, si on prend $C = V(Y, X^2)$, de degré 2, on a $\Gamma = V(Y)$, de degré 1.

Démonstration. Pour montrer que J est principal, il suffit, en vertu de la décomposition primaire, de montrer que S/J n'a pas d'idéal premier associé de hauteur ≥ 2. Sinon, soit $\wp$ un tel idéal premier. On a donc $\wp = \mathrm{Ann}\,\overline{f}$ avec $\overline{f} \in S/J$, mais, comme S/J s'injecte dans R/I_C, on a $\mathrm{Ann}_{R/I_C}\,\overline{f} \supset \wp$, donc R/I_C a un idéal premier associé $\mathcal{Q}$ qui contient $\wp$, donc $\wp R$, et comme ce dernier idéal est premier de hauteur ≥ 2, il en est de même de $\mathcal{Q}$. Comme I_C et saturé et comme C n'a pas de composante ponctuelle, immergée ou non, $\mathcal{Q}$ ne peut être de hauteur ≥ 3. S'il est de hauteur 2 c'est $\wp R$ lui-même et, comme $\wp$ est un idéal homogène de $S = k[Y, Z, T]$, cela donne les inclusions $I_C \subset \mathcal{Q} \subset (Y, Z, T)$ ce qui contredit l'hypothèse $P \notin C$.

Passons à l'assertion concernant les degrés. Montrons d'abord que le S-module R/I_C est de type fini. En effet, comme on a $P \notin C$ il existe un polynôme homogène $F \in I_C$, tel que $F(P) = F(1, 0, 0, 0) \neq 0$. Si on écrit

$$F(X, Y, Z, T) = a_d X^d + a_{d-1}(Y, Z, T)X^{d-1} + \cdots + a_0(Y, Z, T)$$

on voit que la constante a_d est non nulle et donc que $1, x, \cdots, x^{d-1}$ engendrent R/I_C sur S. Cela signifie que le morphisme π est fini et on a une suite exacte de faisceaux cohérents sur $\mathbf{P}^2$: $0 \to \mathcal{O}_\Gamma \to \pi_* \mathcal{O}_C \to \mathcal{K} \to 0$. Comme π est fini il conserve la cohomologie et, pour n grand, on a alors, par Riemann-Roch, $h^0\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g = h^0\mathcal{O}_\Gamma(n) + h^0\mathcal{K}(n) = nd' + 1 - g' + h^0\mathcal{K}(n)$. Comme $h^0\mathcal{K}(n)$ est ≥ 0 on en déduit $d \geq d'$.

Corollaire 3.3. *Si C est une courbe de degré d de $\mathbf{P}^3$ on a $s_0 \leq d$.*

Démonstration. En effet, on a $J = I_\Gamma = (F)$ avec F de degré $d' \leq d$ et, comme J est inclus dans I_C on a $F \in H^0\mathcal{J}_C(d')$, donc $s_0 \leq d' \leq d$.

Remarque 3.4. La borne $s_0 = d$ est atteinte par la courbe C définie par l'idéal :

$$I = (X^d, X^{d-1}Y, \cdots, XY^{d-1}, Y^d, XZ^{d-1} - YT^{d-1}).$$

On montre facilement en effet que I admet la résolution minimale

$$0 \to R(-2d)^{d-1} \to R(-d-1)^d \oplus R(-2d+1)^d \to R(-d)^{d+2} \to I \to 0$$

ce qui prouve que I est saturé (donc $I = I_C$) et qu'on a $s_0 = d$. En coupant par le plan $Z = 0$ on voit que le degré de C est aussi égal à d. De telles courbes ont été étudiées notamment par V. Beorchia, cf. [B].

b) Convexité de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ pour $n \geq d-2$.

Nous passons maintenant à la convexité de la fonction de Rao pour les grandes valeurs de n. Le lemme suivant est essentiel :

Lemme 3.5. *Soit C une courbe de $\mathbf{P}^3$, de degré d et soit D une droite ne rencontrant pas C. Pour tout entier $n \geq d$ la flèche φ, composée de l'injection $j : H^0\mathcal{J}_C(n) \to H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n)$ et de la surjection $p : H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n) \to H^0\mathcal{O}_D(n)$, est surjective.*

Démonstration. On peut supposer que l'on a $D = V(Z, T)$.

On se ramène d'abord au cas $n = d$. En effet, si le lemme est vrai dans ce cas on a des polynômes $F_0, \cdots, F_d$ dans $H^0\mathcal{J}_C(d)$ tels que l'on ait $F_i(X, Y, 0, 0) = X^i Y^{d-i}$ modulo Z, T. Alors, si pour $n \geq d$ et $0 \leq i \leq n$ on considère le monôme $X^i Y^{n-i} \in H^0\mathcal{O}_D(n)$, on peut écrire $X^i Y^{n-i} = X^j Y^{d-j}(X^{i-j} Y^{n-d-i+j})$ avec $0 \leq j \leq d$ et le monôme donné est image de $X^{i-j} Y^{n-d-i+j} F_j \in H^0\mathcal{J}_C(n)$.

0n suppose donc $n = d$. Soit $P = (1, 0, 0, 0) \in D$ (de sorte que P n'est pas dans C), et soit π la projection de centre P de $\mathbf{P}^3$ sur $H = V(X)$. Soit Γ l'image schématique de C par π. On a vu (cf. 3.3) que I_C contient un polynôme $F(Y, Z, T)$ de degré $d' \leq d$. Ce polynôme a un terme non nul en $Y^{d'}$, sinon $Q = (0, 1, 0, 0)$ serait sur $\Gamma = \pi(C)$, donc C contiendrait un point $Q' = (x, 1, 0, 0)$ contrairement à l'hypothèse $C \cap D = \emptyset$.

On a donc $Y^{d-d'} F(Y, Z, T) \in H^0\mathcal{J}_C(d)$ et Y^d est dans l'image de φ. Le même raisonnement appliqué aux points $P_i = (1, \lambda_i, 0, 0)$ et aux projections de centres P_i sur le plan H montre, en faisant le changement de variable $Y' = Y - \lambda_i X$, que $(Y - \lambda_i X)^d$ est dans l'image de φ. On conclut en appliquant le lemme suivant :

Lemme 3.6. *Soient $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_d$ des scalaires distincts. Les polynômes $(Y - \lambda_i X)^d$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. (du lemme 3.6) On raisonne par récurrence sur d, le cas $d = 0$ étant trivial. Si on a une relation linéaire non triviale entre ces polynômes avec $d \geq 1$:

$$R(X, Y) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i (Y - \lambda_i X)^d = 0$$

on calcule $\partial R/\partial X + \lambda_d \partial R/\partial Y$ et on trouve

$$\sum_{i=0}^{d-1} (\lambda_d - \lambda_i)\alpha_i (Y - \lambda_i X)^{d-1} = 0,$$

d'où la conclusion grâce à l'hypothèse de récurrence.

Théorème 3.7. *Soit C une courbe de $\mathbf{P}^3$, de degré d. On pose $\chi(n) = \partial^2 h^1\mathcal{J}_C(n)$. On a $\chi(n) \geq 0$ pour $n \geq d$.*

On déduit aussitôt de ce théorème une nouvelle preuve de la monotonie de $h^1\mathcal{J}_C(n)$ au-delà de $d - 2$:

Corollaire 3.8. *La fonction $n \mapsto h^1\mathcal{J}_C(n)$ est strictement décroissante sur $[d - 2, r_o]$.*

Démonstration. (de 3.7) Soit D une droite ne rencontrant pas C, $D = V(Z, T)$. On a la résolution de $\mathcal{O}_D$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^2 \xrightarrow{(Z,T)} \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to \mathcal{O}_D \to 0$$

avec ${}^t u = (T, -Z)$. On tensorise cette suite par $\mathcal{J}_C(n)$ et on obtient les deux suites exactes suivantes :

$$0 \to \mathcal{J}_C(n-2) \xrightarrow{i} \mathcal{J}_C(n-1)^2 \to \mathcal{J}_C \otimes \mathcal{J}_D(n) \to 0 \tag{3}$$

$$0 \to \mathcal{J}_C \otimes \mathcal{J}_D(n) \xrightarrow{j} \mathcal{J}_C(n) \to \mathcal{J}_C \otimes \mathcal{O}_D(n) \to 0 \tag{4}$$

où l'injectivité de j résulte de la nullité de $\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C(n), \mathcal{O}_D)$ (car $C \cap D$ est vide).

De la suite (3) on déduit la suite exacte :

$$\cdots \to H^1\mathcal{J}_C(n-2) \xrightarrow{i} H^1\mathcal{J}_C(n-1)^2 \to H^1\mathcal{J}_C \otimes \mathcal{J}_D(n) \to H^2\mathcal{J}_C(n-2) \to \cdots$$

Si on a $n-2 \geq d-3$ (i.e. $n \geq d-1$), on a $h^2\mathcal{J}_C(n-2) = 0$ (cf. 1.6). Nous allons montrer que, pour $n \geq d$, on a un isomorphisme $H^1\mathcal{J}_C \otimes \mathcal{J}_D(n) \simeq H^1\mathcal{J}_C(n)$, ce qui, en calculant les dimensions dans la suite exacte ci-dessus, donnera le théorème.

Pour cela, on note d'abord que l'on a $\mathcal{J}_C \otimes \mathcal{O}_D(n) \simeq \mathcal{O}_D(n)$ (toujours parce que $C \cap D$ est vide). Mais la suite (4) donne la suite exacte :

$$0 \to H^0\mathcal{J}_C \otimes \mathcal{J}_D(n) \xrightarrow{j_0} H^0\mathcal{J}_C(n) \xrightarrow{\varphi} H^0\mathcal{O}_D(n) \to H^1\mathcal{J}_C \otimes \mathcal{J}_D(n) \xrightarrow{j_1} H^1\mathcal{J}_C(n) \to 0$$

(car $H^1\mathcal{O}_D(n)$ est nul) et le lemme 3.5 permet d'affirmer que φ est surjective, donc que j_1 est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

4. Le cas des courbes lisses.

Nous montrons dans ce paragraphe une partie des résultats annoncés en 1.1.

a) Majoration de e.

La majoration de e par $[d/2] - 2$ résulte du lemme suivant :

Lemme 4.1. *Sous les hypothèses de 1.1, soit Z une section plane générale de C. Alors, on a, pour $n > 0$, $h^1\mathcal{J}_Z(n) \leq \sup(d - 2n - 1, 0)$.*

On notera que ce lemme, avec 2.1.1, entraîne immédiatement la majoration souhaitée (on distinguera deux cas selon la parité de d).

Démonstration. (de 4.1) Rappelons que la section plane générale Z de C est formée de points distincts et n'a pas de trisécante (cf. Exp. f ou Exp. j). On va donc montrer l'inégalité de 4.1, pour un Z de $\mathbf{P}^2$ formé de d points distincts et sans trisécante, par récurrence sur d. Le résultat est clair pour $d = 1$ ou $d = 2$. Si d est ≥ 3 on choisit une droite D qui coupe Z en deux points et on pose $Z' = Z \cap D$ et $Z'' = Z - Z'$.

La multiplication par D de $\mathcal{O}_Z(n-1)$ dans $\mathcal{O}_Z(n)$ se factorise alors injectivement par $\mathcal{O}_{Z''}(n-1)$ ce qui donne le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n-1) & \xrightarrow{.D} & \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) & \to & \mathcal{O}_D(n) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_{Z''}(n-1) & \xrightarrow{.D} & \mathcal{O}_Z(n) & \to & \mathcal{O}_{Z'}(n) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

et le lemme du serpent appliqué à ce diagramme donne la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_{Z''}(n-1) \xrightarrow{.D} \mathcal{J}_Z(n) \to \mathcal{J}_{Z'/D}(n) \to 0.$$

Comme Z' est formé de deux points distincts de D on a $\mathcal{J}_{Z'/D}(n) \simeq \mathcal{O}_D(n-2)$ et, pour $n > 0$, ce faisceau n'a donc pas de H^1. On en déduit l'inégalité $h^1\mathcal{J}_Z(n) \le h^1\mathcal{J}_{Z''}(n-1)$ et, comme Z'' n'a pas non plus de trisécante, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et on obtient l'inégalité voulue.

On vérifie facilement que la borne $[d/2]-2$ est atteinte :
– si $d = 2t$ par une intersection complète $2 \times t$,
– si $d = 2t-1$ par une courbe liée à une droite par deux surfaces de degrés 2 et t.

b) Majoration de s_0.

Comme d est ≥ 2, le nombre $s = [-3+\sqrt{6d-2}]+1$ qui intervient dans 1.1.3 est le plus petit entier $n > 0$ qui vérifie $nd+1 < \binom{n+3}{3}$. Par ailleurs, on a, pour tout $n > 0$ l'inégalité $h^0\mathcal{O}_C(n) \le nd+1$. En effet, c'est clair par Riemann-Roch si $\mathcal{O}_C(n)$ est non spécial (car $g \ge 0$ puisque C est lisse connexe) et si $\mathcal{O}_C(n)$ est spécial cela résulte du théorème de Clifford. On a donc $h^0\mathcal{O}_C(s) < \binom{s+3}{3}$, donc $h^0\mathcal{J}_C(s) \ne 0$ et $s_0 \le s$. La valeur $s_0 = s$ est optimale (elle est atteinte pour les courbes rationnelles de degré d générales en vertu de [H]).

c) Un mot sur la majoration de r_o.

Le théorème de Gruson-Lazarsfeld et Peskine ($r_o \le d-3$ pour une courbe intègre de degré d) serait immédiat si la conjecture suivante était vraie :

Conjecture 4.2. *Soit C une courbe intègre de degré d. Alors C est liée à une courbe réduite Γ par deux surfaces de degrés s et t avec $s+t \le d+1$.*

En effet, si $n \ge d-2$ on a $h^1\mathcal{J}_C(n) = h^1\mathcal{J}_\Gamma(s+t-n-4) = 0$ car Γ est réduite et $s+t-n-4 < 0$.

5. Une application : étude du schéma de Hilbert $H_{4,0}$.

Le théorème 1.5 permet de prouver la proposition suivante :

Proposition 5.1. *Soit C une courbe de degré 4 et genre 0, M_C son module de Rao. Il y a deux cas :*
1) On a $M_C = k(-1)$ (module concentré en un seul degré 1 et de dimension 1). La courbe C est dans la classe de liaison de deux droites disjointes. La courbe générale de ce type est une courbe lisse de bidegré $(3,1)$ tracée sur une quadrique lisse.
2) Le module M_C est du type de $R/(X,Y,Z,T^3)$ (de dimension 1 en degrés $0,1,2$ et monogène). La courbe C est minimale. C'est une courbe extrémale au sens de [MDP4]. La courbe générale de ce type est réunion disjointe d'une cubique plane et d'une droite.

Démonstration. On vérifie que les courbes indiquées ci-dessus ont bien les modules de Rao annoncés. Réciproquement, si C est une courbe de $H_{4,0}$, le théorème 1.5 donne $r_a \ge 0$, $r_o \le 2$ et $h^1\mathcal{J}_C(n) \le 1$. De plus, comme C n'est pas plane, on a $e \le 0$, donc

$h^0\mathcal{O}_C(1) = 5$ par Riemann-Roch et donc $h^1\mathcal{J}_C(1) = 1$. Le théorème de Riemann-Roch donne aussi $h^0\mathcal{O}_C(2) = 9$ donc $s_0 \leq 2$. Cela permet d'éliminer le cas des modules de Rao fendus ou non connexes (cf. [MDP3]). Enfin, le cas d'un module monogène du type de $R/(X, Y, Z, T^2)$ est impossible car la courbe minimale associée à un tel module est de degré 3 et que C ne peut être biliée à une telle courbe. Il ne subsiste donc que les deux cas ci-dessus.

Proposition 5.2. *Le schéma de Hilbert $H_{4,0}$ a deux composantes irréductibles H_1 et H_2 qui sont les schémas à cohomologie constante correspondant aux deux cas de 5.1. Ces composantes sont toutes deux lisses de dimension* 16. *Il existe une famille de courbes de degré* 4 *et genre* 0 *paramétrée par un anneau de valuation discrète dont le point générique est dans H_1 et le point spécial dans H_2, de sorte que le schéma de Hilbert $H_{4,0}$ est connexe.*

Démonstration. L'irréductibilité et la lissité de H_1 résultent de [MDP1] VII, celle de H_2 de [MDP1] VII et [MDP4]. Le calcul des dimensions des schémas H_1 et H_2 se fait par les formules de [MDP1] IX. On en déduit que H_1 et H_2 sont des composantes, pour H_1 c'est la semi-continuité, pour H_2 la dimension. Enfin, la dernière assertion est dans [HMDP].

Références bibliographiques

[AA] Aït-Amrane S., Etude des schémas de Hilbert $H_{d,g}$ avec $g = \frac{(d-3)(d-4)}{2}$, en préparation.

[B] Beorchia V., On the arithmetic genus of locally Cohen-Macaulay pace curves, ?

[C] Castelnuovo G., Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica, Rend. Circ. Mat. Palermo, 7, 89-110 (1893).

[GLP] L. Gruson, R. Lazarsfeld et C. Peskine, On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves, Invent. Math., 72, 1983, p. 491-506.

[HMDP] R. Hartshorne, M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Triades, en préparation.

[Hi] A. Hirschowitz, Sur la postulation générique des courbes rationnelles, Acta. Math. 146, p. 209-230, 1981.

[MDP1] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur la classification des courbes gauches I, Astérisque, 184-185, 1990

[MDP2] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur les bornes du module de Rao, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, p. 1159-1162, 1993.

[MDP3] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur les courbes gauches à modules de Rao non connexes, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 233-236, 1994.

[MDP4] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Le shéma de Hilbert des courbes localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit. À paraître aux Annales Scient. E.N.S.

[S1] Strano R., A characterization of complete intersection curves in $\mathbf{P}^3$, Proc. A.M.S., 104, N^o 3, 711-755, (1988).

[S2] Strano R., Sulle sezione iperpiane delle curve, Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano, 57, 125-134, (1987).

[S] Szpiro L., Equations defining space curves, Tata Institut Lectures on math., 62, 1979.