SECTIONS PLANES DES COURBES GAUCHES

INTRODUCTION

Si C est une courbe projective (disons lisse et connexe mais ce n'est pas essentiel), l'idée d'étudier ses sections hyperplanes dans les divers plongements de C dans $\mathbf{P}^n$ est à peu près aussi vieille que la géométrie algébrique (moderne) et a montré depuis longtemps son efficacité. Lorsqu'on fait varier la dimension de plongement, cette idée revient essentiellement à l'étude des diviseurs sur C, la donnée d'une section hyperplane (ou plutôt du système linéaire associé) étant équivalente à celle du plongement. Dans le cas particulier des courbes de $\mathbf{P}^3$ on va s'intéresser aux sections planes, suivant en cela les glorieuses traces d'Halphen et de Castelnuovo, cf. [H], [C].

1. Courbes et cohomologie.

Notons tout d'abord que la seule considération des sections planes d'une courbe C fournit déjà une forme (faible) du théorème de Riemann-Roch. En effet, si H est un plan assez général, la section plane $Z = C \cap H$ (intersection schématique de C et H) est un schéma fini, lié à C par la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_C(n-1) \xrightarrow{\mu_H} \mathcal{O}_C(n) \to \mathcal{O}_Z(n) \to 0, \tag{1}$$

où μ_H désigne la multiplication par l'équation de H. On déduit de cette suite, par additivité des caractéristiques d'Euler, la formule

$$\chi\mathcal{O}_C(n) - \chi\mathcal{O}_C(n-1) = \chi\mathcal{O}_Z(n).$$

(On voit ici apparaître pour la première fois le fait que, lorsqu'on coupe une courbe par un plan (ou plus généralement une variété par un hyperplan), les invariants cohomologiques de la section sont reliés aux différences premières ([1]) de ceux de la courbe. Dans le cas de la caractéristique d'Euler on a une égalité, tandis que pour les h^i la suite exacte de cohomologie ne donne, en général, que des inégalités.)

Dans le cas présent, si on pose $d = h^0\mathcal{O}_Z$ et $g = g(C) = h^1\mathcal{O}_C$ (au moins dans le cas où C est lisse connexe ([2])) on en déduit aussitôt par récurrence sur n, la formule de Riemann-Roch qui donne la caractéristique d'Euler de $\mathcal{O}_C(n)$:

$$\chi\mathcal{O}_C(n) = h^0\mathcal{O}_C(n) - h^1\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g.$$

([1]) Si f est une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$, sa différence première ∂f est définie par $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$.

([2]) Dans le cas général, le genre arithmétique de C est donné par $g = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$ et on a $g \leq h^1\mathcal{O}_C$.

Cette formule montre que d et g sont indépendants du choix de la section plane et ces entiers sont bien entendu le degré et le genre de C. La classification des courbes de $\mathbf{P}^3$, selon la description qu'en donne par exemple Hartshorne, cf. [rH1], consiste maintenant à déterminer d'abord quels d et g sont possibles (cf. [GP2]), puis ensuite à étudier la famille (ou schéma de Hilbert) des courbes de degré d et genre g fixés de $\mathbf{P}^3$.

Cependant, on sait bien (cf. [MDP1]) que c'est là une tâche difficile et qu'il est souvent nécessaire d'introduire d'autres invariants numériques de C pour ordonner un peu (i.e. stratifier) le schéma de Hilbert. Par exemple, on peut vouloir calculer les dimensions $h^0\mathcal{O}_C(n)$ et $h^1\mathcal{O}_C(n)$ et pas seulement la caractéristique d'Euler de $\mathcal{O}_C(n)$ qui est leur différence.

En fait, on s'intéresse plutôt aux dimensions des espaces de cohomologie $H^i\mathcal{J}_C(n)$ (pour $i = 0, 1, 2$). Pour justifier ce choix, on notera que la caractéristique d'Euler de $\mathcal{J}_C(n)$ est déterminée elle aussi par d et g grâce à la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_C(n) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(n) \to \mathcal{O}_C(n) \to 0$$

et que c'est la même que celle de $\mathcal{O}_C(n)$ à un coefficient binômial près. On notera aussi que l'on a $h^2\mathcal{J}_C(n) = h^1\mathcal{O}_C(n)$ (ces nombres constituent la "spécialité" de C), de sorte que les invariants de $\mathcal{O}_C$ sont déterminés par ceux de $\mathcal{J}_C$.

Par ailleurs la dimension $h^0\mathcal{J}_C(n)$ (la "postulation" de C) a un sens géométrique très simple, c'est le nombre de surfaces de degré n indépendantes contenant C et ce nombre est non nul pour $n \geq s_0$, degré de la plus petite surface qui contient C. Quant au nombre $h^1\mathcal{J}_C(n)$, dimension de la n-ième composante du module de Rao de C, on sait qu'il intervient, en tous cas, dans l'étude des classes de liaison des courbes.

A partir de ce moment, une tâche essentielle est de contrôler ces nouveaux invariants. Par exemple on peut essayer de savoir quand ils sont non nuls, ce qui revient à calculer ou à borner les limites :

$$s_0 = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\},$$

$$e = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^2\mathcal{J}_C(n) = h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\},$$

$$r_a = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{J}_C(n) \neq 0\},$$

$$r_o = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}.$$

On peut aussi se demander comment ils varient, quels sont les rapports entre eux (par exemple entre d, g et s_0, entre d et e, entre r_o, r_a et d (cf. [MDP2]), voire g etc.)

2. Majoration du genre via les sections planes.

On se propose, à titre d'exemple, de chercher une majoration du genre g en fonction de d et de s_0, précisément on cherche à calculer le nombre $G(d, s)$, genre maximum d'une courbe (disons lisse connexe), de degré d, non tracée sur une surface de degré $< s$, c'est-à-dire vérifiant $s_0 \geq s$. La question n'est d'ailleurs pas entièrement résolue à l'heure actuelle et nous nous l'étudierons seulement dans le domaine $s(s-1) < d$.

La méthode, qui est due à Castelnuovo, repose sur l'utilisation d'une section plane générale $Z = C \cap H$ de C et notamment de la suite exacte suivante, portant cette fois sur les faisceaux d'idéaux :

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{J}_C(n-1) \to \mathcal{J}_C(n) \to \mathcal{J}_Z(n) \to 0.$$

Cette suite, comme la suite (1), permet, en écrivant les suites exactes de cohomologie associées, de comparer les invariants cohomologiques de $\mathcal{J}_C$ et $\mathcal{J}_Z$. Précisément, on va essayer de comparer la différence première

$$\partial h^i \mathcal{J}_C(n) = h^i \mathcal{J}_C(n) - h^i \mathcal{J}_C(n-1)$$

avec $h^i \mathcal{J}_Z(n)$ ou $h^{i-1}\mathcal{J}_Z(n)$. Par exemple si C est une courbe ACM (i.e. si on a $h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$ pour tout n) on a exactement $\partial h^0 \mathcal{J}_C(n) = h^0 \mathcal{J}_Z(n)$.

Pour étudier le genre $g = h^1\mathcal{O}_C = h^2\mathcal{J}_C$ la suite exacte à considérer est la suivante :

$$(3) \qquad \to H^1\mathcal{J}_Z(n) \to H^2\mathcal{J}_C(n-1) \to H^2\mathcal{J}_C(n) \to 0.$$

Cette suite donne l'inégalité

$$h^2\mathcal{J}_C(n-1) - h^2\mathcal{J}_C(n) = h^1\mathcal{O}_C(n-1) - h^1\mathcal{O}_C(n) \leq h^1\mathcal{J}_Z(n)$$

et, puisque $h^1\mathcal{O}_C(n)$ est nul pour n grand, on obtient par sommation la majoration

$$g(C) \leq \sum_{n \geq 1} h^1\mathcal{J}_Z(n).$$

La quantité $\sum_{n\geq 1} h^1\mathcal{J}_Z(n)$ est d'ailleurs appelée le genre virtuel de Z et notée $g(Z)$. On voit donc que, pour majorer $g(C)$, on est ramené à majorer $g(Z)$, donc les $h^1\mathcal{J}_Z(n)$, c'est-à-dire des invariants cohomologiques de la section plane de C.

3. Les sous-schémas finis de $\mathbf{P}^2$.

Soit Z un sous-schéma fini de $\mathbf{P}^2$ de degré $d = h^0\mathcal{O}_Z = h^0\mathcal{O}_Z(n)$. On cherche à étudier sa cohomologie et notamment les $h^1\mathcal{J}_Z(n)$. Notons déjà que les différents invariants cohomologiques de Z sont liés ([3]) par la suite exacte

$$(4) \qquad 0 \to H^0\mathcal{J}_Z(n) \to H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \to H^0\mathcal{O}_Z(n) \to H^1\mathcal{J}_Z(n) \to 0.$$

Cette suite donne déjà les valeurs de $h^1\mathcal{J}_Z(n)$ lorsque $h^0\mathcal{J}_Z(n)$ est nul : on a $h^1\mathcal{J}_Z(n) = d$ pour $n < 0$ et $h^1\mathcal{J}_Z(n) = d - \binom{n+2}{2}$ pour $0 \leq n < \sigma$ où σ est le plus petit degré d'une courbe contenant Z.

([3]) Outre les nombres $h^0\mathcal{J}_Z(n)$ et $h^1\mathcal{J}_Z(n)$, de nombreux auteurs considèrent la fonction de Hilbert $h_Z(n) = \binom{n+2}{2} - h^0\mathcal{J}_Z(n) = d - h^1\mathcal{J}_Z(n)$ qui est la dimension de la composante de degré n de l'anneau gradué R/I_Z. Cette prolifération d'invariants tous équivalents est sans doute à l'origine de quelques bévues, cf. ci-dessous §4.

Par ailleurs, notamment pour éliminer le coefficient binômial ([4]) $H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) = \binom{n+2}{2}$, (ou encore la partie triviale de $h^1\mathcal{J}_Z(n)$ il est astucieux de considérer la différence seconde $\partial^2 h^1\mathcal{J}_Z(n) = \gamma_Z(n)$.

Cette fonction est un **caractère** ce qui signifie qu'elle est à support fini et vérifie $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \gamma_Z(n) = 0$. De plus la connaissance de γ_Z est exactement équivalente à celle de $h^1\mathcal{J}_Z(n)$ (qui en est une "primitive"), grâce à la formule

$$h^1\mathcal{J}_Z(n) = \gamma_Z^{\flat\flat}(n) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{k-n-1}{1}\gamma_Z(k).$$

(Ce type de formule liant f et ∂f vaut pour toute fonction f nulle pour $n \gg 0$ ou, avec une variante, pour $n \ll 0$, cf. [MDP1].)

La donnée du caractère γ_Z redonne aussi le degré et le genre virtuel de Z par les formules :

$$d = \sum_{n\in\mathbf{Z}} n\gamma_Z(n) \qquad \text{et} \qquad g(Z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \binom{n-1}{2}\gamma_Z(n).$$

Un autre aspect fondamental du caractère est le lien étroit de γ_Z (ou plutôt de sa différence première) avec la résolution de l'idéal gradué (saturé) I_Z. Précisément, cette résolution peut s'écrire sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{r-1} R(-m_j) \xrightarrow{u} \bigoplus_{i=1}^{r} R(-n_i) \to I_Z \to 0,$$

$$0 \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{b(n)} \xrightarrow{u} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{a(n)} \to I_Z \to 0,$$

où R est l'anneau $k[X,Y,T]$, où les n_i et m_j sont des entiers vérifiant $\sum m_j = \sum n_i$ et où les fonctions $a(n)$ et $b(n)$ sont à valeurs dans $\mathbf{N}$ et à support fini et représentent les multiplicités d'apparition de l'entier n dans les sommes directes.

Si on pose $r(n) = a(n) - b(n) - \binom{n-1}{-1}$ on vérifie alors la formule $r(n) = \partial\gamma_Z(n)$ ([5]) qui montre que la résolution détermine le caractère γ_Z, la réciproque étant vraie si la résolution ne comporte pas de répétition i.e. de m_j égaux à des n_i (le caractère, qui ne fait intervenir que la différence $a(n) - b(n)$, ne prend pas en compte ces répétitions).

Par ailleurs, l'analyse de la flèche u (donnée par une matrice $r \times r-1$ à coefficients homogènes de degrés $m_j - n_i$) permet de montrer facilement (cf. [P] Examen 02/94) les deux assertions suivantes:

([4]) Les différences premières des coefficients binômiaux sont données par la formule de Pascal : $\partial\binom{n+k}{k} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

([5]) Cette formule s'écrit encore $r'(n) = a(n) - b(n) = \partial^3 h^0\mathcal{J}_Z(n)$ et, sous cette forme, elle se généralise dans $\mathbf{P}^N$: si Z est un sous-schéma de codimension 2 avec une résolution à 2 termes (ou plus), la fonction $r'(n)$ associée à cette résolution est la différence $N+1$-ème de la postulation du sous-schéma Z.

1) pour que la flèche générale u soit injective il faut qu'on ait $m_j > n_j$ pour tout j,

2) pour que le conoyau de u soit l'idéal d'un ensemble fini de $\mathbf{P}^2$ il faut qu'on ait $m_j > n_{j+1}$ pour tout j.

Ces conditions se traduisent aussitôt sur la forme du caractère $\gamma_Z(n)$: on a $\gamma_Z(n) = 0$ pour $n < 0$, puis $\gamma_Z(0) = -1$ et plus précisément, $\gamma_Z(n) = -1$ pour $0 \leq n < \sigma$ (où σ est le plus petit degré d'une courbe contenant Z). Ensuite, pour $\sigma \leq n$, on a d'abord $\gamma_Z(n) \geq 0$ (on dit que le caractère est "positif") et enfin, à partir d'un certain rang σ', on a $\gamma_Z(n) = 0$. Les informations pertinentes sur γ_Z sont donc :

1) la valeur de σ, que nous conviendrons d'appeler la hauteur du caractère, ([6])

2) les valeurs positives de γ_Z entre σ et σ'.

D'ailleurs, pour la plupart des auteurs (et notamment Gruson et Peskine qui en sont les inventeurs), ce sont ces données qui constituent le caractère qui est alors présenté comme une suite de σ entiers $n_0, \cdots, n_{\sigma-1}$ vérifiant la relation

$$n_0 \geq n_1 \geq \cdots \geq n_{\sigma-1} \geq \sigma$$

(cf. [GP1]). Cela étant, le lien entre les deux versions du caractère est clair : pour $n \geq \sigma$, $\gamma_Z(n)$ est le nombre de n_i égaux à n. ([7])

Voici quelques exemples de caractères de sous-schémas finis de $\mathbf{P}^2$:

1) Si Z est formé de d points alignés, la résolution est la suivante :

$$0 \to R(-d-1) \to R(-1) \oplus R(-d) \to I_Z \to 0$$

et on en déduit le caractère γ_Z dont les seules valeurs non nulles sont $\gamma_Z(0) = -1$ et $\gamma_Z(d) = 1$. Dans la version [GP1] c'est simplement la suite à un terme (d).

2) Si Z est intersection complète de deux courbes de degrés s et t, avec $s \leq t$, la résolution est :

$$0 \to R(-s-t) \to R(-s) \oplus R(-t) \to I_Z \to 0$$

d'où le caractère qui vaut -1 de 0 à $s-1$, puis 0 de s à $t-1$, 1 de t à $s+t-1$ et enfin 0 au-delà. Au sens de [GP1] c'est la suite $s+t-1, s+t-2, \cdots, t$.

3) Si Z est formé de 3 points non alignés, la résolution est

$$0 \to R(-3)^2 \to R(-2)^3 \to I_Z \to 0$$

et le caractère est $2, 2$.

4) Si Z est formé de 4 points dont 3 alignés. La résolution est la suivante :

$$0 \to R(-3) \oplus R(-4) \to R(-2)^2 \oplus R(-3) \to I_Z \to 0,$$

([6]) On notera que la suite exacte (4) montre aussitôt qu'on a $d \geq \binom{\sigma+1}{2}$.

([7]) L'intérêt du caractère écrit sous la forme γ_Z réside dans la manipulation des formules avec les différences. Par ailleurs, il permet de définir des caractères non positifs dans le cas de sous-schémas dont la résolution est à plus de deux termes, cf. [MDP1].

(on notera la répétition) le caractère est $3, 2$.

5) Si Z est formé de 5 points dont 4 alignés, la résolution est la suivante :

$$0 \to R(-3) \oplus R(-5) \to R(-2)^2 \oplus R(-4) \to I_Z \to 0,$$

le caractère est $4, 2$.

Voyons déjà ce que donne la description des caractères produite ci-dessus pour la majoration du genre (virtuel) de Z. On étudie la fonction $h^1\mathcal{J}_Z(n)$ (pour $n \geq 0$) en étudiant ses différences successives, comme on le ferait avec des fonctions d'une variable réelle à l'aide des dérivées.

On sait que $h^1\mathcal{J}_Z(n)$ est nul pour n grand. Soit t le plus petit entier tel que $h^1\mathcal{J}_Z(t) = 0$. Comme le caractère $\gamma_Z = \partial^2 h^1 \mathcal{J}_Z$ est < 0 puis ≥ 0, ∂h^1 décroît puis croît, et, comme ∂h^1 est nulle pour $n < 0$ et pour $n \geq t+1$, c'est que cette fonction est strictement négative entre 0 et t, de sorte que h^1 est strictement décroissante entre 0 et t. Comme on connaît explicitement h^1 entre 0 et $\sigma - 1$ on en déduit le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit Z un sous-schéma fini de $\mathbf{P}^2$ de degré d et soit σ le plus petit degré d'une courbe contenant Z. Posons $N = \binom{\sigma+1}{2}$. Alors, on a*

$$g(Z) \leq \frac{(d-N)(d-N+1)}{2} + (\sigma-2)d + 1 - \binom{\sigma+1}{3}.$$

En particulier, pour $\sigma = 1$ (resp. 2) on a

$$g(Z) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} \qquad \Big(\text{resp.} \quad g(Z) \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2}\Big).$$

Nous étudions maintenant une propriété géométrique du sous-schéma Z qui a une répercussion importante sur le caractère γ_Z, c'est la propriété de "position uniforme".

Définition 2. *Soit Z un sous-schéma fini de $\mathbf{P}^2$ de degré d. On dit que Z est en position uniforme si pour tout sous-schéma Z' de Z et pour tout entier n on a*

$$h^1\mathcal{J}_{Z'}(n) = 0 \qquad \text{ou} \qquad h^0\mathcal{J}_{Z'}(n) = h^0\mathcal{J}_Z(n).$$

Il revient encore au même (mais ce n'est pas tout à fait évident) de dire que les quantités $h^0\mathcal{J}_{Z'}(n)$ et $h^1\mathcal{J}_{Z'}(n)$ ne dépendent que du degré du sous-schéma Z', ou encore, comme disaient les anciens, que tous les sous-schémas Z' de degré d' imposent le même nombre de conditions aux courbes de degré n. Cela implique, entre autres, que, sauf si Z lui-même est aligné, trois points quelconques de Z ne sont jamais colinéaires (on dit que Z est en position linéaire générale). Bien entendu, cette condition ne suffit pas à elle seule à assurer la position uniforme.

L'analyse de la flèche u de la résolution montre que si Z est en position uniforme on a $m_j > n_{j+2}$ pour tout $j \leq r-2$, ce qui, concernant le caractère, admet la conséquence suivante, cf. [MR] :

Proposition 3 (Maggioni-Ragusa). *Si le sous-schéma Z est en position uniforme, le caractère γ_Z est* **connexe**, *i.e. l'ensemble des n tels que $\gamma_Z(n)$ est > 0 est un ensemble connexe d'entiers* ([8]).

Ainsi, dans l'exemple 5) ci-dessus, Z n'est pas en position uniforme (à cause des 4 points alignés) et le caractère $4, 2$ n'est pas connexe (il manque l'entier 3).

Attention, la réciproque est fausse : la condition de position uniforme est plus forte que celle de connexité du caractère, cf. ci-dessus, exemple 4).

Dans le cas d'un Z dont le caractère est connexe on peut grandement améliorer la majoration du genre virtuel. Nous nous contenterons ici d'énoncer le résultat dans le cas où l'on a $\sigma(\sigma - 1) < d$.

Théorème 4 (Gruson-Peskine). *Soit Z un sous-schéma fini de $\mathbf{P}^2$ de degré d, et soit σ le plus petit degré d'une courbe contenant Z.*([9]) *On suppose que l'on a $\sigma(\sigma - 1) < d$ et que le caractère γ_Z est connexe. On pose $d = \sigma t - r$ avec $0 \leq r < \sigma$. On a alors*

$$g(Z) \leq 1 + d/2(\sigma + d/\sigma - 4) - r(\sigma - r)(\sigma - 1)/2\sigma.$$

En particulier, pour $\sigma = 2$ on a

$$g(Z) \leq \begin{cases} \dfrac{d^2}{4} - d + 1, & \text{si } d \text{ est pair,} \\ \dfrac{d^2 - 1}{4} - d + 1 & \text{si } d \text{ est impair.} \end{cases}$$

On notera que, dans le cas $\sigma = 2$, on est passé d'une borne qui est asymptotiquement en $d^2/2$ à une borne en $d^2/4$.

Démonstration. Faisons le cas $\sigma = 2$. Le caractère γ de Z vérifie $\gamma(0) = \gamma(1) = -1$ et $\gamma(2) \geq 0$. Comme γ est un caractère la somme des $\gamma(n)$ est nulle et comme γ est positif, il y a ou bien un seul entier ≥ 2 en lequel le caractère vaut 2, ou bien deux entiers ≥ 2 en lesquels γ vaut 1. Dans ce dernier cas, comme le caractère est connexe, ces entiers sont consécutifs. On a donc soit $\gamma(a) = 2$, soit $\gamma(a) = \gamma(a + 1) = 1$, le degré valant alors $2a - 1$ ou $2a$ et le genre la valeur indiquée.

Lorsque σ est > 2 la situation se complique car il y a en général plusieurs caractères connexes de même degré. Par exemple, pour $\sigma = 3$ et $d = 9$ on a les deux caractères $3, 4, 5$ et $4, 4, 4$. Il faut donc déterminer parmi tous ceux qui conviennent celui qui a le plus grand genre. Gruson et Peskine introduisent pour cela une relation d'ordre sur les caractères $n_0, \cdots, n_{\sigma-1}$, qui consiste à les comparer selon l'ordre lexicographique et ils montrent que le genre maximum correspond au caractère maximum pour l'ordre lexicographique. En explicitant ce caractère on obtient la borne ci-dessus.

([8]) *Cela signifie que si on a $\gamma_Z(a) > 0$ et $\gamma_Z(b) > 0$ avec $a \leq b$ on a $\gamma_Z(n) > 0$ pour tout n compris entre a et b*

([9]) *L'inégalité vaut, plus généralement, si Z n'est pas sur une courbe de degré $< \sigma$.*

4. Des courbes aux points.

L'analyse menée au paragraphe précédent montre que, pour obtenir une bonne majoration du genre d'une courbe C par la méthode de Castelnuovo, il faut prouver deux types de théorèmes reliant les propriétés de C et celles de la section plane générale Z de C :

1) des théorèmes permettant d'affirmer que la section plane est assez belle (par exemple qu'elle en position uniforme, ou au moins n'a pas de triplets de points alignés, ou encore que son caractère est connexe),

2) des théorèmes permettant de préciser la hauteur du caractère de la section plane, c'est-à-dire le plus petit degré σ d'une courbe contenant Z. Déjà, il est clair que si C est sur une surface S de degré s_0, la section plane $Z = C \cap H$ est sur la courbe $S \cap H$, de sorte que l'on a $\sigma \leq s_0$ et la question essentielle est de savoir si on a l'égalité $\sigma = s_0$.

Les résultats principaux connus à ce jour sur ces deux points sont les suivants. D'abord, sur le point 1) :

Théorème 5 (Harris). *Si C est une courbe intègre sa section plane générale est en position uniforme.*

C'est un résultat difficile et valable seulement en caractéristique 0. La preuve initiale (cf. [jH] ou [ACGH]) faisait appel à des techniques de géométrie différentielle. Pour une démonstration algébrique, voir [R].

Avec la proposition 3 on en déduit :

Corollaire 6. *Si C est une courbe intègre sa section plane générale a un caractère connexe.*

Il est amusant de noter que ce résultat a été prouvé directement par Gruson et Peskine en 1977, sans utiliser le théorème de Harris qui date de 1980, puis a été retrouvé par Sauer (cf. [Sa]) en 1984 sous une autre forme (faisant intervenir les résolutions) et par Maggioni et Ragusa (cf. [MR]), encore sous une autre forme (en termes de fonction de Hilbert) en 1988, chacun de ces auteurs n'étant – semble-t-il – pas conscient qu'il redémontrait, en fait, le théorème de Gruson-Peskine ! Une clarification des techniques combinatoires évoquées ici est donc sans doute nécessaire.

Concernant le point 2) le résultat le plus simple est le suivant :

Théorème 7 (Laudal). *Soit C une courbe lisse et connexe de degré d et s un entier. On suppose que l'on a $s_0 \geq s$ et $s(s-1) < d$. Alors, si Z est une section plane générale de C on a $\sigma \geq s$.*

Ce lemme, dont la démonstration initiale (cf. [L]) n'est pas vraiment limpide a été retrouvé, éclairci et amélioré par Strano, cf. [S1] et [S2].

En mettant ensemble les points 4, 6 et 7 on obtient la majoration du genre dans le domaine $s(s-1) < d$:

Théorème 8 (Gruson-Peskine). *Soient d et s des entiers vérifiant $s(s-1) < d$ et posons $d = st - r$ avec $0 \leq r < s$. Alors, on a :*

$$G(d, s) = 1 + d/2(s + d/s - 4) - r(s-r)(s-1)/2s.$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris, Geometry of Algebraic Curves, Springer, 1985.

[C] Castelnuovo G., Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica, Rend. Circ. Mat. Palermo, 7, 89-110 (1893).

[GP1] L. Gruson et C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif, Lecture Notes 687, Springer Verlag, 1977, 31–59.

[GP2] L. Gruson et C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 15, 1982, 401–418.

[H] G. Halphen, Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, Oeuvres complètes, t.3, 261–455.

[jH] J. Harris, The genus of space curves, Math. Ann. 249, 191-204 (1980).

[rH1] R. Hartshorne, On the classification of algebraic space curves, in Vector bundles and differential equations, Proceedings, Nice, France, 1979, Progress in Math.7, Birkhäuser.

[L] Laudal 0.A., A generalized trisecant lemma, Lecture Notes 687, Springer Verlag, 1977, 112–149.

[MR] R. Maggioni, A. Ragusa, The Hilbert function of generic sections of curves of $\mathbf{P}^3$, Invent. Math. 91, 253-258 (1988).

[MDP1] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur la classification des courbes gauches I, Astérisque, 184-185, 1990

[MDP2] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur les bornes du module de Rao, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, p. 1159-1162, 1993.

[P] D. Perrin, Géométrie algébrique, une introduction, Interéditions, 1995.

[R] Rathmann J. The uniform position principle for curves in characteristic p, Math. Ann. 276, 565-579, 1987.

[Sa] Sauer T., Smoothing projectively Cohen-Macaulay space curves, Math. Ann. 272, 83-90, (1985).

[S1] Strano R., A characterization of complete intersection curves in $\mathbf{P}^3$, Proc. A.M.S., 104, N^o 3, 711-755, (1988).

[S2] Strano R., Sulle sezione iperpiane delle curve, Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano, 57, 125-134, (1987).