Groupe de travail 1998-99, introduction

Nous proposons un groupe de travail sur le schéma de Hilbert des courbes gauches, centré sur les techniques utilisant le module de Rao, dans la lignée des divers [MDP], avec notamment l'utilisation de la notion de triade récemment introduite par R. Hartshorne, M. Martin-Deschamps et D. Perrin, cf. [HMDP 1,2,3]. L'objectif de ce groupe, qui se veut plus tourné vers la recherche que les précédents, est double :

1) faire un bilan des questions ouvertes qui tournent autour de la notion de triade,

2) reprendre la classification d'Halphen, notamment en petit degré, à l'aide des techniques de [(H)MDP], en cherchant toutes les composantes (voire tous les composants, cf. ci-dessous) du schéma de Hilbert (des courbes localement Cohen-Macaulay, ou des courbes lisses) et faire un état des lieux des connaissances sur ces questions.

0. Classification des courbes gauches.

Rappelons de quelles courbes il s'agit : courbes algébriques de $\mathbf{P}^3_k$, espace projectif de dimension 3 sur un corps algébriquement clos, sans points isolés ni immergés, notamment lisses connexes.

Pour classifier les courbes on repère des invariants de ces courbes et, en premier lieu, leur degré. L'objectif, tel qu'il est résumé par Halphen pour les courbes lisses, cf. [H], est alors le suivant :

Énumérer, définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre, plus générale.

Halphen constate que dès le degré 4 (pour les courbes non planes) le degré est insuffisant pour séparer les diverses familles et il introduit un autre invariant h, le nombre de points doubles apparents. Cela revient à considérer le genre g des courbes. En effet, on a la formule : $g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2} - h$. En termes modernes, si $\mathcal{O}_C$ est le faisceau structural de la courbe C, se donner d et g revient, en vertu de Riemann-Roch, à se donner la caractéristique d'Euler de $\mathcal{O}_C$:

$$\chi\mathcal{O}_C(n) = h^0\mathcal{O}_C(n) - h^1\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g$$

On est donc ramené à étudier la famille des courbes de degré d et genre g, c'est-à-dire le schéma de Hilbert $H_{d,g}$, voire sa variante $H^0_{d,g}$ dans le cas des courbes lisses connexes. On peut alors se poser les questions naturelles sur ce schéma : est-il irréductible ? connexe ? lisse ? réduit ? quelle est sa dimension ?, etc.

En général, $H_{d,g}$ n'est pas irréductible. Le premier exemple est fourni par Halphen([1]), il s'agit de $H^0_{9,10}$ qui a deux composantes : l'une, H_1, formée des intersections complètes

([1]) On a montré depuis que la réductibilité de $H^0_{d,g}$ était un phénomène très fréquent et que la situation pouvait être très compliquée. Ainsi, Ellia, Hirschowitz et Mezzetti (cf. [EHM]) ont prouvé que le nombre de composantes pouvait ne pas être une fonction polynomiale du degré, cf. aussi [G2].

3×3 de deux surfaces cubiques, l'autre, H_2, formée des courbes de bidegré $6, 3$ sur une quadrique lisse. L'objectif, si on suit Halphen, est de trouver un moyen de distinguer ces composantes. Dans le cas de $H_{9,10}$, Halphen introduit pour cela un nouvel invariant n qui, en termes modernes, n'est autre que $d - e - 3$, où e désigne l'indice de spécialité :

$$e = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}.$$

En effet, on a $e = 2$ (donc $n = 4$) sur H_1 et $e = 1$ (donc $n = 5$) sur H_2.

En fait, il y a un autre invariant, peut-être plus simple, qui sépare les composantes dans le cas présent, c'est le nombre s_0, plus petit degré d'une surface contenant C :

$$s_0 = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$$

où $\mathcal{J}_C$ est le faisceau d'idéaux qui définit C dans $\mathbf{P}^3$.

1. La philosophie de [MDP].

a) La stratification.

L'idée naïve qui vient aussitôt, lorsqu'on examine l'exemple précédent, c'est d'utiliser, pour séparer les composantes de $H_{d,g}$, les dimensions $h^i\mathcal{J}_C(n)$ des espaces de cohomologie $H^i\mathcal{J}_C(n)$, pour $i = 0, 1, 2, 3$ et $n \in \mathbf{Z}$. (On notera que l'on a $h^1\mathcal{O}_C(n) = h^2\mathcal{J}_C(n)$.) Bien entendu, le h^3 étant trivial (égal au h^3 de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}$), on peut se limiter aux autres et même, par Riemann-Roch, à h^0 et h^1. De plus, en vertu des théorèmes de finitude et de dualité de Serre, il s'avère que seuls un nombre fini de ces dimensions sont pertinentes.

Il est commode d'introduire deux fonctions : le caractère de postulation $\gamma_C(n)$, dont la donnée est équivalente à celle des $h^0\mathcal{J}_C(n)$ (cf. [MDP1]) et la fonction de Rao ρ_C (à support fini) donnée par $\rho_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(n)$.

On stratifie alors (cf. [MDP1]) le schéma $H_{d,g}$ par les sous-schémas $H_{\gamma,\rho}$ sur lesquels la cohomologie de $\mathcal{J}_C$ est constante, espérant ainsi trouver les composantes de $H_{d,g}$ parmi les $H_{\gamma,\rho}$. Bien entendu, cet espoir repose sur l'idée que les schémas $H_{\gamma,\rho}$ sont irréductibles, idée qui était la nôtre au départ, mais dont on sait maintenant qu'elle est totalement fausse ! (cf. [MDP1,2]).

b) Les trois étapes.

Quoique les $H_{\gamma,\rho}$ ne soient pas irréductibles, leur introduction constitue un progrès car il se trouve que l'on possède un outil pour étudier ces schémas : le module de Rao.

Ce module, introduit par Hartshorne et étudié par Rao, est le $R = k[X, Y, Z, T]$-module gradué de longueur finie $M_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^1\mathcal{J}_C(n)$. Les dimensions de ses composantes sont données par la fonction de Rao ρ_C, mais sa structure de module contient beaucoup plus d'informations sur la courbe C, notamment vis à vis de la liaison.

L'introduction de ce module conduit à considérer le morphisme $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$ qui à C associe M_C, morphisme à valeurs dans le "schéma" des modules de dimensions données par ρ. Ce morphisme permet de scinder l'étude de $H_{d,g}$ en trois étapes :

1) l'étape du bas, c'est-à-dire l'étude de E_ρ,

2) l'étape intermédiaire, c'est-à-dire l'étude de Φ, étape résolue dans [MDP1] : Φ est lisse et irréductible,

3) l'étape du haut qui consiste à recoller les informations obtenues sur les $H_{\gamma,\rho}$ pour passer à $H_{d,g}$.

En fait, contrairement à nos espoirs initiaux, l'étape du bas s'est révélée très difficile. En particulier, le schéma E_ρ n'est presque jamais irréductible, cf. [MDP2] et [G1], et c'est ce qui fait que $H_{\gamma,\rho}$ ne l'est pas non plus.

c) Un programme.

La philosophie expliquée ci-dessus permet en tous cas de reformuler de manière plus précise le programme d'Halphen. Pour cela, appelons **composant** de $H_{d,g}$ toute composante irréductible d'un schéma $H_{\gamma,\rho} \subset H_{d,g}$. Le programme se formule alors ainsi :

Énumérer les divers composants X de $H_{d,g}$. Cela signifie, en particulier, donner toutes les cohomologies possibles, mais aussi identifier les composantes des E_ρ correspondants et décrire les résolutions des courbes génériques de X.

Pour chaque X préciser s'il est réduit, voire lisse et calculer sa dimension.

Préciser pour chaque couple de composants X_0, X si X_0 est adhérent à X ou sous-adhérent à X, i.e. si $\overline{X}$ rencontre X_0, c'est-à-dire s'il existe une famille de courbes paramétrée par un anneau de valuation discrète A, dont le point spécial C_0 est dans X_0 et dont le point générique C est dans X (problème d'incidence).

Déduire de l'étude précédente les composantes de $H_{d,g}$. Préciser si elles sont réduites, lisses, calculer leur dimension.

Étudier l'incidence des diverses composantes et la connexité de $H_{d,g}$.

On notera que pour que X_0 soit sous-adhérent à X il y a une condition nécessaire issue du théorème de semi-continuité : on doit avoir $h^i \mathcal{J}_C(n) \leq h^i \mathcal{J}_{C_0}(n)$ pour tout i et tout n, ce qu'on écrira $(\gamma, \rho) \leq (\gamma_0, \rho_0)$.

d) Mise en œuvre du programme.

Il y a deux problèmes distincts selon que l'on considère le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ de toutes les courbes (sans points isolés ni immergés) ou le schéma $H^0_{d,g}$ des courbes lisses connexes, mais tous deux sont extrêmement difficiles, voire impossibles en général.([2])

On va donc se contenter, dans un premier temps, de chercher tout ce qu'on est capable de dire sur $H_{d,g}$ (ou $H^0_{d,g}$) lorsque d est petit, voire lorsque g est grand, voire pour certains types de courbes (ACM, modules de Rao petits, ou de structure simple cf. Koszul).

Les premiers cas à regarder pour d petit sont $d = 2$ (connu), $d = 3$, (connu, cf. Nollet, mais à mieux comprendre avec nos techniques), $d = 4$ (en genre < 0, en commençant par $H_{4,-1}$ qui n'est déjà pas si simple).

Le cas le plus intéressant en genre grand, le seul non trivial, à vrai dire, où l'on sache appliquer le programme ci-dessus est le cas $g = (d-3)(d-4)/2$ étudié par Samir dans sa thèse, cf. [AA]. Je vais décrire, dans le cas de $H_{6,3}$ qui est l'un des cas de Samir, le processus d'application du programme.

([2]) Dans le cas des courbes lisses on a des atouts supplémentaires qui permettent de simplifier l'étude, par exemple le théorème de Gruson-Lazarsfeld-Peskine, le fait que $\mathcal{O}_C(n)$ est non spécial dès que $nd > 2g-2$, etc.

1) On commence par répertorier les fonctions de Rao possibles. On dispose pour cela de bornes du module de Rao (cf. [MDP4]) et de compléments dans le cas non extrémal (cf. Ellia et Nollet). On montre que les fonctions possibles sont les suivantes : la fonction extrémale, $\rho_1(n) = 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1$ en degrés de -2 à 6, la sous-extrémale $\rho_2(n) = 1, 1, 1$ en degrés $1, 2, 3$, deux fonctions ρ_3 et ρ_4 valant seulement 1 au point 1 (resp. 2) et enfin la fonction nulle ρ_5.

2) On répertorie les structures de module de Rao possibles pour une fonction ρ donnée et on décrit les sous-schémas des différents E_ρ correspondant à ces modules. C'est évidemment une question d'étape du bas, qui peut devenir très vite inextricable. Dans le cas présent on montre que tous les modules sont des modules de Koszul, cas bien connu depuis [MDP5].

3) En utilisant l'étape intermédiaire, on décrit les schémas $H_{\gamma,\rho}$ et leurs composants. On calcule leurs dimensions avec les formules de [MDP1]. Dans le cas de $H_{6,3}$ il y a 5 sous-schémas X_i de dimensions respectives 30, 24, 23, 23, 24, tous irréductibles, donc 5 composants.

4) On aborde l'étape du haut et les problèmes d'incidence entre les composants. On a vu qu'il y a une condition nécessaire de semi-continuité pour que X_i soit sous-adhérent à X_j. Les couples (i, j) vérifiant cette condition sont les suivants : $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$, $(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5)$. Pour des raisons de dimension, on voit aussitôt que X_3 et X_4 sont bien dans l'adhérence de X_5. Il reste à examiner les autres cas. On utilise pour cela un nouvel outil : la notion de triade.

2. Les triades.

a) Introduction.

Montrer que le composant X_0 est sous-adhérent à X revient à construire une famille de courbes paramétrée par un anneau de valuation discrète A d'uniformisante a, dont le point spécial C_0 est dans X_0 et dont le point générique C est dans X. L'idée qui nous guide est de copier la construction des courbes (notamment des courbes minimales) à partir de leur module de Rao (la fonction q de [MDP1] IV).

Pour cela, il faut disposer d'une notion qui généralise au cas des familles de courbes (avec un module de Rao variable) celle de module de Rao ordinaire.

Une idée (trop) simple en ce sens consiste à considérer le R_A-module gradué $H^1_* \mathcal{J}_\mathcal{C} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1(\mathbf{P}_A, \mathcal{J}_\mathcal{C}(n))$. Cette définition est convenable si on se place sur un sous-schéma $H_{\gamma,\rho}$. C'est d'ailleurs elle qui permet de définir le morphisme Φ. En revanche, elle n'est pas valable sur $H_{d,g}$ tout entier car le A-module $H^1_* \mathcal{J}_\mathcal{C}$ ne commute pas au changement de base en général.

L'idée que nous proposons pour surmonter cette difficulté s'inspire de ce que l'on fait pour prouver les théorèmes de cohomologie et changement de base. Elle consiste, dans un premier temps, à regarder les foncteurs $V : Q \mapsto V(Q)$, de la catégorie des A-modules dans la catégorie des R_A-modules gradués (en pensant notamment comme A-modules aux corps résiduels $k(t)$ pour $t \in T = \operatorname{Spec} A$). À une famille de courbes $\mathcal{C}$ quelconque est associé le foncteur de Rao $V_\mathcal{C} : Q \mapsto \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1(\mathbf{P}_A, \mathcal{J}_\mathcal{C}(n) \otimes_A Q)$ qui décrit en particulier la variation du module de Rao en les points de T.

b) Quelques exemples.

Si l'on ne fait pas d'hypothèses complémentaires, la notion de foncteur évoquée ci-dessus est trop grossière. Pour comprendre quelles sont les hypothèses pertinentes à faire, nous allons examiner quelques exemples de familles de courbes de $H_{6,3}$ et déterminer les foncteurs associés.

L'idée directrice de ce qui suit est, une fois encore, de copier ce que nous savons faire pour le module de Rao ordinaire. On sait que, dans le cas d'une courbe C sur un corps, le module de Rao M_C se calcule à partir des résolutions de type N et E de C. Précisément, si ces résolutions sont, respectivement :

$$0 \to P \to [L_1 \to L_0] \to I_C \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to L_4 \to L_3 \to F \to I_C \to 0,$$

(on note $[A \xrightarrow{u} B]$ le noyau de u) on sait qu'on a $M_C = \operatorname{Coker}(L_1 \to L_0)$ et $M_C^*(4) = \operatorname{Coker}(L_3^\vee \to L_4^\vee)$. C'est donc aussi à partir des résolutions des familles de courbes que nous allons tenter de comprendre la variation du module de Rao.

On a vu que la courbe générale C de X_5 est ACM (arithmétiquement de Cohen-Macaulay : son module de Rao est nul). Celle de X_4 est une courbe de bidegré $(4,2)$ sur une quadrique, de module de Rao $k(-2)$, celle de X_3 est réunion d'une quartique plane et de deux droites qui la coupent chacune en un point, avec comme module de Rao $k(-1)$.

On sait qu'il y a une famille $\mathcal{C}_1$, qui est à à spécialité constante, et joint X_4 et X_5. Cette famille admet la résolution "de type N" (cf. [MDP1] VII 2.6) suivante :

$$0 \to R_A(-4)^3 \to [R_A(-3)^4 \oplus R_A(-2) \xrightarrow{d_1} R_A(-2)] \to I_{\mathcal{C}_1} \to 0$$

avec $d_1 = (X, Y, Z, T, a)$. On voit aussitôt que pour a inversible, c'est-à-dire au point générique de $\operatorname{Spec} A$, le facteur $R_A(-2)$ se simplifie, donnant la courbe ACM C. Dans ce cas, la variation du module de Rao est décrite par le module global $H^1_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1} = M_A = \operatorname{Coker} d_1 = R_A/(a, X, Y, Z, T)(-2)$.

Il y a aussi une famille $\mathcal{C}_2$, à postulation constante, qui joint X_3 et X_5. Cette fois, la famille admet la résolution "de type E" suivante (avec le même d_1) :

$$0 \to R_A(-5) \xrightarrow{{}^t d_1} R_A(-4)^4 \oplus R_A(-5) \to R_A(-3)^4 \oplus R_A(-4) \to I_{\mathcal{C}_2} \to 0$$

(cf. [MDP1] VII 2.1) et on voit, là encore, la simplification du terme $R_A(-5)$ au point générique.

Cependant, comme cette famille vérifie $M_A = H^1_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}_2} = 0$ alors que certaines courbes de la famille ont un module de Rao non nul, il est clair que la variation du module de Rao ne peut être décrite par le module M_A et le foncteur $V_{\mathcal{C}}$ n'est donc pas évident.

Dans les deux exemples précédents la famille $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) admet une résolution à trois termes, de type N (resp. E) et le passage de la courbe spéciale à la courbe générique correspond à une simplification évidente de la résolution. L'exemple suivant montre que les choses peuvent être plus complexes lorsque la famille n'est ni à spécialité, ni à postulation constante.

Il s'agit cette fois de relier les composants X_2 (courbes sous-extrémales) et X_4 (module $k(-2)$) de $H_{6,3}$. En fait, s'il existe bien une telle famille, elle n'est pas minimale, mais provient par une biliaison $(2,+1)$ d'une famille de $H_{4,0}$. Nous allons regarder cette dernière, plus simple, mais tout à fait analogue.

Considérons donc le schéma $H_{4,0}$. Il possède deux composantes, toutes deux de dimension 16, l'une H_1 dont la courbe générale C_1 est une courbe de bidegré $(3,1)$ sur une quadrique, de module de Rao $k(-1)$, l'autre H_2 dont la courbe générale C_2 est réunion disjointe d'une cubique plane et d'une droite et a un module de Rao du type de $R/(X,Y,Z,T^3)$ de dimensions $1,1,1$, en degrés $0,1,2$. Voici les résolutions de type E de ces courbes :

$$0 \to R(-5) \to R(-4)^4 \to R(-2) \oplus R(-3)^3 \to I_{C_1} \to 0$$

$$0 \to R(-6) \to R(-3) \oplus R(-5)^3 \to R(-2)^2 \oplus R(-4)^2 \to I_{C_2} \to 0.$$

Nous verrons que H_2 est sous-adhérente à H_1 mais, cette fois, ce n'est pas clair au vu des résolutions de type E, pas plus d'ailleurs qu'avec celles de type N. En particulier, à l'inverse des exemples ci-dessus, aucune simplification n'est apparente.

On comprend un peu mieux ce phénomène si on note qu'il y a dans l'idéal de C_2 une équation de degré 2 de plus que dans celui de C_1 et si on supprime cette équation en **désaturant** l'idéal I_{C_2}. Par exemple, si C_2 est réunion de (X,Y) et de (Z,T^3) ([3]), son idéal est (XZ, YZ, XT^3, YT^3) et, si on remplace YZ par les équations XYZ, Y^2Z, YZ^2, YZT, ce qui ne change pas C_2, on obtient un idéal J non saturé dont la résolution a **quatre** termes est :

$$0 \to R(-6) \to R(-5)^4 \oplus R(-6) \to R(-4)^6 \oplus R(-5)^3 \to R(-2) \oplus R(-3)^3 \oplus R(-4)^2 \to J \to 0$$

et là, on voit, après simplifications d'un 6, de trois 5 et de deux 4 apparaître les chiffres de la résolution de I_{C_1} dans celle de J (bien entendu ce calcul ne prouve pas l'existence d'une famille mais il donne un indice numérique favorable).

L'idée fondamentale que nous voulons éclairer par cet exemple c'est qu'on ne saurait comprendre les familles générales de courbes (celles qui ne sont ni à spécialité, ni à postulation constante) si l'on ne tolère pas cette opération de désaturation, avec comme conséquence inéluctable l'apparition de résolutions à quatre termes des idéaux.

À cet égard, on introduit, dans [HMDP3], des résolutions de type E "cotriadiques" du faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C$. Il s'agit de résolutions de la forme $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C \to 0$ où $\mathcal{E}$ est localement libre et défini par une suite exacte $0 \to \mathcal{L}_5 \to \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_3 \to \mathcal{E} \to 0$ avec $\mathcal{F}$ et les $\mathcal{L}_i$ dissociés (i.e., dans le cas d'un anneau local, somme directe finie de faisceaux inversibles). Nous utilisons aussi la notion duale de résolution de type N "triadique" de la forme : $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C \to 0$, où $\mathcal{N}$ est défini par une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$ avec $\mathcal{P}$ et les $\mathcal{L}_i$ dissociés. Par rapport à une résolution de type E (resp. N) sur un corps, on notera la présence du terme supplémentaire $\mathcal{L}_5$ (resp. $\mathcal{L}_{-1}$).

L'intérêt de ces résolutions est de répondre à la question de la nature du foncteur V_C défini ci-dessus et qui décrit la variation du module de Rao. On montre en effet par un

([3]) Cet exemple est choisi parce que le calcul est facile, mais les courbes de H_2 réunions disjointes d'une cubique et d'une droite ne sont pas dans l'adhérence de H_1. Il faut utiliser des structures multiples, mais le calcul de la résolution du désaturé est identique.

petit calcul cohomologique que, si $L_\bullet = (L_1 \to L_0 \to L_{-1})$ est le complexe de R_A-modules gradués associé à une résolution de type N, on a $V_{\mathcal{C}}(Q) = h_0(L_\bullet \otimes Q)$, où h_0 désigne l'homologie en degré 0 du complexe.

Le complexe $L_\bullet$ ci-dessus est appelé une **triade**. C'est cette notion qui généralise celle de module de Rao.

c) Triades et familles de courbes.

L'intérêt des triades est double.

• D'abord, (cf. [HMDP] 1,2,3), c'est la notion adéquate pour généraliser aux familles la notion de module de Rao. En effet, on obtient les énoncés qui généralisent le théorème de Rao sur la liaison, la construction des courbes minimales (la fonction q de [MDP1]), le théorème de Lazarsfeld-Rao, la dualité. De plus, on a un dictionnaire triades-familles de courbes qui explique quand une courbe est à spécialité ou postulation constante.

• Ensuite, et c'est essentiel, l'utilisation des triades permet de construire des familles de courbes joignant deux composants X et X_0. C'est ainsi qu'on construit, par exemple, la famille de $H_{4,0}$ évoquée ci-dessus cf. [HMDP3], ou encore, dans le cas de $H_{6,3}$, que Samir construit toutes les familles possibles vérifiant les conditions de semi-continuité.

Références bibliographiques.

[AA] Aït-Amrane S., Sur le schéma de Hilbert $H_{d,(d-3)(d-4)/2}$, en préparation.

[G1] Ginouillac S., Sur les schémas des modules de Rao de longueur 3, note CRAS, t. 320, Série I, 1327-1330, 1995.

[G2] Ginouillac S., en préparation.

[H] G. Halphen, Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, Oeuvres complètes, t.3, 261–455.

[HMDP1] Hartshorne R., Martin-Deschamps M. et Perrin D., Un théorème de Rao pour les familles de courbes gauches.

[HMDP2] Hartshorne R., Martin-Deschamps M. et Perrin D., Construction de familles minimales de courbes gauches.

[HMDP3] Hartshorne R., Martin-Deschamps M. et Perrin D., Triades et familles de courbes gauches.

[LR] Lazarsfeld R. et Rao A. P., Linkage of general curves of large degree, Lecture notes 997, Springer Verlag, 1983, 267-289.

[MDP 1] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Sur la classification des courbes gauches, Astérisque, Vol. 184-185, 1990.

[MDP 2] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Courbes gauches et Modules de Rao, J. reine angew. Math. 439 (1993), 103-145.

[MDP4] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Le schéma de Hilbert des courbes localement de Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4 série, t. 29, 757-785, 1996.

[R] Rao A.P., Liaison among curves in $\mathbf{P}^3$, Invent. Math., 50, 1979, 205-217.