GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE :

UNE INTRODUCTION

Groupe de travail animé par M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN.

0. Le thème.

Une partie importante de la géométrie algébrique consiste à étudier ce qu'on appelle les problèmes énumératifs : il s'agit de compter des objets satisfaisant certaines conditions. Historiquement, le premier problème de ce type semble bien être le problème d'Apollonius (environ 200 avant J.-C.) : combien y a-t-il dans le plan de cercles tangents à 3 cercles donnés ? (la réponse est 8). Ce type de questions a été très étudié au XIX-ème siècle notamment par Chasles, Halphen, Study, Zeuthen et surtout Schubert qui a inventé le calcul qui porte son nom et qui permet de traiter un grand nombre de problèmes énumératifs. Cependant, il subsistait, dans les méthodes de Schubert, beaucoup de lacunes touchant à la rigueur, à tel point que Hilbert en fit le quinzième de ses fameux problèmes :

"Établir rigoureusement et avec une détermination exacte des limites de validité les nombres géométriques que Schubert a déterminés sur la base du principe dit de position spéciale, (ou de conservation du nombre), par les moyens du calcul énumératif qu'il a développé."

Le groupe de travail que nous proposons cette année est, au moins au début, centré sur ce type de problèmes et sur les méthodes modernes pour les aborder.

Nous évoquerons ici quatre exemples, mais il y en a beaucoup d'autres :

1) Le théorème de Bézout sur l'intersection des courbes de $\mathbf{P}^2$ et ses généralisations dans $\mathbf{P}^n$.

2) Le problème "des quatre droites" : combien y a-t-il de droites de $\mathbf{P}^3$ coupant quatre droites données ?

3) Le problème "des sécantes communes" : toujours dans $\mathbf{P}^3$, combien y a-t-il de sécantes communes à deux courbes gauches données, par exemple à deux cubiques gauches?

4) Enfin, le plus beau peut-être de tous ces problèmes, étudié notamment par Chasles: dans $\mathbf{P}^2$, combien y a-t-il de coniques tangentes à 5 coniques données ?

Nous allons dire brièvement un mot de chacun de ces problèmes. Signalons dès maintenant que, dans tous les cas, on va interpréter les objets à dénombrer comme les points d'un schéma fini (avec multiplicités en général), obtenu la plupart du temps comme intersection de variétés (ou de schémas) de plus grandes dimensions : la géométrie énumérative est très proche de la théorie des intersections.

1. Le théorème de Bézout.

Il s'agit du théorème bien connu qui affirme que deux courbes planes de degrés d et d' ont dd' points d'intersection. On sait cependant que, pour que cet énoncé soit valable, il convient de prendre quelques précautions.

a) Les deux courbes peuvent a priori avoir une composante commune auquel cas l'intersection est infinie. On devra donc supposer les courbes C et C' sans composante commune : c'est une hypothèse **de position générale** (1)

b) Il faut supposer que le corps de base est algébriquement clos pour ne pas oublier les intersections "imaginaires".

c) Il faut travailler dans l'espace projectif pour ne pas oublier les intersections "à l'infini".

d) Enfin, il faut compter les points d'intersection avec leurs multiplicités. Un problème connexe important est de savoir si, en faisant encore une hypothèse de position générale, on peut s'arranger pour que les dd' points d'intersection soient distincts. C'est typiquement un problème "à la Bertini".

Nous retrouverons ce type d'hypothèses tout au long de notre étude.

Pour démontrer le théorème de Bézout, une fois faites ces hypothèses, il y a de nombreuses méthodes (cf. par exemple [F2] ou [H1]). Celle qui nous intéresse ici est fondée sur le principe de conservation du nombre évoqué dans le quinzième problème de Hilbert. Elle consiste à montrer l'assertion dans un cas particulier très simple (on parle plutôt de cas **spécial** en géométrie algébrique) : le cas où C (resp. C') est formée de d (resp. d') droites toutes distinctes. Dans ce cas en effet la réponse dd' est évidente. Il reste ensuite à expliquer (et ce n'est pas évident a priori) que ce nombre dd' vaut aussi dans le cas général.

Voici une justification sommaire de ce principe de conservation du nombre. Considèrons l'espace des courbes planes de degré d (resp. d'). Une courbe plane de degré d (resp. d') étant donnée par un unique polynôme homogène de degré d (resp. d'), défini à un scalaire multiplicatif près, cet espace est simplement l'espace projectif $\mathbf{P}^N$ (resp. $\mathbf{P}^{N'}$) associé à l'espace vectoriel $H^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(d))^*$ (resp. d'). On considère dans le produit $X = \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^N \times \mathbf{P}^{N'}$ le graphe Γ de la relation d'incidence :

$$\Gamma = \{(P, C, C') \in \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^N \times \mathbf{P}^{N'} \ \mid\ P \in C \cap C' \ \}.$$

C'est un sous-schéma fermé de X qui est muni de deux projections p sur $\mathbf{P}^2$ et π sur $\mathbf{P}^N \times \mathbf{P}^{N'}$. Il est facile de calculer la dimension de Γ en déterminant les fibres de p : les courbes de degré d (resp. d') passant par un point P forment un hyperplan de $\mathbf{P}^N$ (resp. $\mathbf{P}^{N'}$), de sorte que la fibre est de dimension $N + N' - 2$ et que Γ est donc de dimension $N + N'$. Il en résulte que π est fini sur un ouvert et on montre que toutes ses fibres sont alors de degré constant (2). Il suffit de calculer ce degré pour un couple C, C' spécial, c'est ce qu'on a fait ci-dessus.

---

(1) D'habitude lorsqu'on dit que telle propriété vaut si les deux courbes planes C, C' sont "en position générale" on entend par là qu'il existe un ouvert Ω non vide, mais non spécifié, de l'espace qui paramètre les couples de courbes (C, C') sur lequel la propriété est vraie. Dans le cas présent on a mieux puisqu'on sait exactement quel est plus grand ouvert Ω sur lequel la propriété est valable.

(2) C'est parce que Γ est une intersection complète de la bonne dimension, ou, si on préfère est défini comme schéma des zéros d'une section d'un fibré du bon rang.

Une manière très frappante de traduire le théorème de Bézout consiste à introduire ce qu'on appelle l'anneau de Chow de $\mathbf{P}^2$. On considère d'abord l'anneau dont les éléments sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers de sous-schémas de $\mathbf{P}^2$, gradué par la codimension. Cet anneau s'écrit donc : $A = A^0 \oplus A^1 \oplus A^2$. En degré 0 le seul sous-schéma de codimension 0 étant $\mathbf{P}^2$ lui-même on a donc ses multiples qui forment le groupe additif $A^0(\mathbf{P}^2) = \mathbf{Z}$. En codimension 1 (resp. 2), A^1 (resp. A^2) est engendré par les courbes (resp. les points) : ses éléments sont des combinaisons linéaires $\sum_i n_i x_i$ où les n_i sont des entiers et les x_i des courbes (resp. des points). L'addition est alors évidente et la multiplication donnée par linéarité à partir de l'intersection : $C.C' = \sum_i n_i P_i$ où les P_i sont les points d'intersections de C, C' avec les multiplicités n_i.(3)

En réalité si l'on veut avoir vraiment une structure d'anneau il faut pouvoir définir $C.C'$ lorsque C et C' ont des composantes communes, voire lorsqu'elles sont sont égales. Pour cela il faut passer au quotient par une relation d'équivalence, dite équivalence numérique (4), qui consiste, pour les courbes, (5) à identifier deux courbes C_1 et C_2 si et seulement si, pour toute courbe C "générale" (i.e., ici, sans composante commune avec les C_i) on a $C_1.C = C_2.C$. Le quotient obtenu est ce qu'on appelle l'anneau de Chow $A(\mathbf{P}^2)$.

Cet anneau (commutatif) contient toute l'information sur la théorie de l'intersection pour les sous-schémas de $\mathbf{P}^2$, et rien d'autre. En effet, le théorème de Bézout affirme que toutes les courbes de degré d sont équivalentes et, si h est la classe d'une droite, que la classe de toute courbe de degré d n'est autre que dh. L'anneau de Chow de $\mathbf{P}^2$ est alors simplement l'anneau quotient $\mathbf{Z}[h]/(h^3)$. C'est un $\mathbf{Z}$-module libre dont voici une base : l'élément neutre 1 (qui correspond à $\mathbf{P}^2$) en codimension 0, la droite h en codimension 1 et le point h^2 en codimension 2. La traduction du théorème de Bézout avec ces notations est la formule triviale $(dh)(d'h) = (dd')h^2$.

Signalons que pour $\mathbf{P}^n$ la situation est tout à fait analogue à celle de $\mathbf{P}^2$: on a $A(\mathbf{P}^n) = \mathbf{Z}[h]/(h^{n+1})$ où h est la classe d'un hyperplan. Le calcul de l'anneau de Chow repose sur un théorème de Bézout généralisé qui affirme par exemple que si $X_1, \cdots, X_n$ sont des hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$ de degrés $d_1, \cdots, d_n$ dont l'intersection est finie, (ce qui est le cas en général), cette intersection est de "cardinal" $d_1 \cdots d_n$.

Nous verrons que la plupart des problèmes énumératifs que nous allons considérer vont se ramener à calculer dans l'anneau de Chow de certains schémas X (et en premier lieu à calculer ces anneaux de Chow).

2. Les quatre droites.

Rappelons qu'il s'agit de compter combien de droites de $\mathbf{P}^3$ coupent 4 droites données.

(3) Le groupe A^3 est nul de sorte que les autres intersections : un point et une droite ou deux points sont nulles. On notera que ceci vaut même si le point est sur la droite : il y a un lemme appelé "moving lemma" qui permet de calculer l'intersection en bougeant un peu les variétés.

(4) ou par une autre, appelée équivalence rationnelle, qui revient au même ici.

(5) les points sont tous équivalents.

On voit déjà que, pour qu'il y ait seulement un nombre fini de solutions, il faut supposer les 4 droites assez générales : si elles sont coplanaires ou concourantes, ou même si elles sont disjointes mais font partie de la même famille de génératrices d'une quadrique lisse, il y a une infinité de droites qui les coupent.

Pour aborder le problème posé on peut encore utiliser le principe de conservation du nombre en calculant le nombre de droites sécantes à 4 droites D_1, D_2, D_3, D_4 dans la position spéciale suivante : on suppose D_1, D_2 coplanaires et D_3, D_4 coplanaires. Il est facile de voir, dans ce cas, qu'il y a exactement deux droites sécantes : la droite Δ_1 qui joint les points d'intersection de D_1, D_2 et D_3, D_4 et la droite Δ_2 intersection des plans de D_1, D_2 et D_3, D_4. Le principe de conservation affirme alors que ce nombre 2 vaut aussi dans le cas général. ([6])

Pour traduire la situation en termes plus formels et puisqu'on souhaite trouver les droites cherchées comme des points d'une variété algébrique on doit travailler dans la variété, dite grassmannienne et notée $G_{3,1}$, des droites de $\mathbf{P}^3$. La description usuelle de $G_{3,1}$ par les coordonnées de Plücker (une droite D est repérée par 6 coordonnées homogènes l, l', m, m', n, n' qui sont des déterminants en les coefficients de deux points de D) montre que cette variété est en fait une hyperquadrique de $\mathbf{P}^5$, donnée par l'équation $ll' + mm' + nn' = 0$ et qu'elle est donc lisse de dimension 4.

Dans le cas présent, il est facile de voir que l'ensemble u des droites Δ qui coupent une droite fixe D est donné dans $G_{3,1}$ par une équation linéaire en les coordonnées de Plücker ([7]) : c'est donc la trace sur $G_{3,1}$ d'un hyperplan de $\mathbf{P}^5$ de sorte que les points cherchés sont à l'intersection de $G_{3,1}$ et de 4 hyperplans, donc à l'intersection de $G_{3,1}$ et d'une droite de $\mathbf{P}^5$. Le théorème de Bézout généralisé (évident en l'occurrence) affirme alors qu'il y a 2 solutions puisque $G_{3,1}$ est défini par une équation de degré 2. On a ainsi justifié le nombre 2 trouvé plus haut.

En fait on peut calculer complétement l'anneau de Chow $A(G_{3,1})$ (et plus généralement celui des grassmanniennes : c'est en cela que consiste le calcul de Schubert et ce sera l'un de nos objectifs essentiels dans ce groupe de travail).

Cet anneau est gradué en degrés $0, \cdots, 4$ par la codimension et nous allons le décrire un peu en détail. Il y a deux phases dans cette description. La première concerne la structure additive de l'anneau.

En degré 0 la seule sous-variété de dimension 4 de $G_{3,1}$ est $G_{3,1}$ elle-même et on a donc $A^0 \simeq \mathbf{Z}$.

En codimension 1 on a déjà vu la variété u_D des droites rencontrant D. On montre que ces variétés sont toutes numériquement équivalentes et qu'elles engendre A^3. On note u leur classe et on a donc $A^3 = \mathbf{Z}u$.

([6]) Le lecteur qui possède un peu d'expérience de la géométrie algébrique sait bien que dans nombre de cas il n'est pas aussi simple que cela de passer d'un cas spécial au cas général. Il mesure ainsi facilement les réticences et les polémiques qu'a pu susciter ce principe de conservation du nombre à l'époque de Schubert. Il n'empêche que dans les cas qui vont nous intéresser il est parfaitement valable, encore une fois parce qu'on travaille avec des intersections complètes de bonne dimension.

([7]) donnée par la forme polaire de la forme quadratique $ll' + mm' + nn'$.

En dimension (ou codimension 2) il y a deux types de familles bien connues. Il y a d'abord la famille a_x, pour $x \in \mathbf{P}^3$, formée des droites passant par x (si P est un plan ne contenant pas x on voit facilement que a_x est isomorphe à P donc est de dimension 2). Toutes ces familles sont équivalentes et on note a leur classe. Il y a ensuite les familles b_P des droites contenues dans le plan P (c'est encore un plan projectif comme on le voit en examinant leurs équations). Là encore elles sont toutes équivalentes et on note b leur classe. On montre alors qu'on a $A^2 = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b$.

En codimension 3 (i.e., dimension 1) il y a les familles du type

$$c_{x,P} = \{ D \in G_{3,1} \mid x \in D \subset P \}.$$

Elles sont toutes équivalentes, notées c et on a $A^3 = \mathbf{Z}c$.

Enfin en codimension 4 on a $A^4 = \mathbf{Z}\epsilon$ où ϵ est la classe d'un singleton $\{D\}$.

Ce qui précède décrit entièrement le groupe abélien gradué $A(G_{3,1})$ qui est libre de base $1, u, a, b, c, \epsilon$, ([8]) mais il reste à préciser sa structure multiplicative : c'est la deuxième phase du calcul. On se souviendra que la multiplication est compatible avec la graduation : $A^i A^j \subset A^{i+j}$. C'est bien entendu $G_{3,1}$ tout entier qui est l'élément neutre de la multiplication

On vérifie d'abord les formules $a^2 = b^2 = \epsilon$ qui expriment qu'une droite est déterminée par deux points ou deux plans, puis la formule $ab = 0$ (le 0 correspond à l'ensemble vide) qui signifie qu'il n'y a pas (si $x \notin P$) de droite contenant x et contenue dans P. ([9])

On a ensuite les formules $au = bu = c$. Faisons le pour bu, l'autre est analogue : les droites de b_P sont contenues dans le plan P, celles de u_Δ s'appuient sur la droite Δ (supposée non contenue dans P) donc l'intersection est formée des droites de $c_{x,P}$ où x est le point d'intersection de P et Δ.

Enfin, on a $u^2 = a + b$: du point de vue numérique l'ensemble des droites coupant deux droites données est équivalent à l'ensemble des droites passant par un point, plus celui des droites contenues dans un plan. Cette formule n'est pas évidente dans le cas général mais, si l'on croit au principe de spécialisation, on la comprend aisément : on spécialise les deux droites D_1 et D_2 en deux droites coplanaires et les droites qui coupent à la fois D_1 et D_2 sont alors soit celles qui contiennent le point d'intersection de D_1 et D_2, soit celles qui sont contenues dans le plan $< D_1, D_2 >$.

En résumé, l'anneau de Chow de $G_{3,1}$ est donc engendré comme $\mathbf{Z}$-algèbre par les éléments u et a.

Cherchons maintenant les relations entre a et u (outre les relations $a^3 = u^5 = 0$ qui expriment que les variétés de dimension négatives sont vides). On a les formules vues ci-dessus : $au = bu$, $ab = 0$ et $a^2 = b^2$. Ces relations se traduisent aussitôt en remplaçant b par $u^2 - a$ et on trouve $u^3 = 2au$, $a^2 = au^2$ et $u^4 = 2au^2$. La troisième est visiblement superflue et on peut montrer qu'il n'y a pas d'autres relations entre a et u, de sorte que l'anneau de Chow est entièrement décrit par les générateurs a, u et les relations ci-dessus :

$$A(G_{3,1}) \simeq \mathbf{Z}[u, a]/(u^5, a^3, au^2 - a^2, u^3 - 2au)$$

([8]) Ces éléments sont appelés les cycles de Schubert.

([9]) Si le point est dans le plan l'ensemble des droites en question est de dimension 1 : ce n'est pas la bonne codimension. Ce cas est justiciable du “moving lemma”.

et qu'en théorie au moins, tout problème énumératif sur les droites de $\mathbf{P}^3$ est résolu par un simple calcul dans cet anneau.

Par exemple, résoudre le problème des quatre droites revient à calculer l'intersection de quatre variétés de type u, ou encore, puisqu'elles sont toutes équivalentes, à calculer dans l'anneau de Chow l'élément $u^4 \in A^4(G_{3,1})$.

Or, un calcul immédiat donne la formule $u^4 = u^3u = 2au^2 = 2a^2 = 2\epsilon$ donc l'ensemble des droites rencontrant quatre droites données est de cardinal 2 comme annoncé.

3. Sécantes à deux courbes gauches.

Soit C une courbe de $\mathbf{P}^3$ lisse, connexe et non plane, de degré d et genre g et considérons, dans $G_{3,1}$, la sous-variété (cf. principe) Y des sécantes à C i.e., des droites qui joignent deux points de C. Il est clair que Y est de dimension 2 comme $C \times C$. Dans l'anneau de Chow de $G_{3,1}$, la classe y de Y s'écrit donc comme combinaison linéaire de a et b, disons $y = \lambda a + \mu b$. Nous allons calculer les entiers λ et μ.

Pour cela calculons d'abord le produit by. Il représente les droites de $\mathbf{P}^3$ qui sont contenues dans un plan P et qui coupent C en deux points. Ces deux points sont parmi les d points d'intersection de C et P et il y a $\binom{d}{2}$ droites convenables les joignant. On a donc $by = \binom{d}{2}a^2 = \binom{d}{2}\epsilon$.

Calculons ensuite ay. Il s'agit de compter les droites passant par un point x de $\mathbf{P}^3$ et coupant C en 2 points. On considère un plan P ne passant pas par x et la projection π de $\mathbf{P}^3$ sur P de centre x. L'image de C est une courbe plane Γ de même degré d que C, birationnellement équivalente à C donc de genre géométrique g et ses points doubles (qui sont ordinaires si x est assez général) correspondent aux points de C qui ont même image par π, c'est-à-dire aux sécantes à C passant par x i.e., à ay. Mais on sait, par ailleurs, que le genre de Γ est donné par la formule :

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n$$

où n est le nombre de points doubles de C'. On a donc $ay = na^2 = (\frac{(d-1)(d-2)}{2} - g)a^2 = n\epsilon$.

Mais on a aussi, si $y = \lambda a + \mu b$, $ay = \lambda a^2 = \lambda\epsilon$ et $by = \mu b^2 = \mu\epsilon$. On en déduit les valeurs de λ et μ :

$$\lambda = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g \qquad \mu = \binom{d}{2}.$$

Si maintenant C' est une autre courbe de $\mathbf{P}^3$ de degré d' et genre g' et si Y' est sa variété des sécantes, on a $y' = \lambda' a + \mu' b$ dans l'anneau de Chow et le problème proposé est résolu en calculant le produit d'intersection $yy' = (\lambda\lambda' + \mu\mu')\epsilon$ (on a vu plus haut les relations $ab = 0$ et $a^2 = b^2 = \epsilon$). On obtient le nombre cherché en remplaçant $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ par leurs valeurs calculées ci-dessus. Ainsi, par exemple, dans le cas de deux cubiques gauches générales ($d = 3, g = 0$) on trouve qu'il y a $10 = 1 + 9$ sécantes communes.

4. Le problème de Chasles.

Il s'agit de trouver combien de coniques sont tangentes à 5 coniques données dans $\mathbf{P}^2$. On peut interpréter les coniques comme les points d'un $\mathbf{P}^5$ (la conique Γ d'équation $aX^2 + bY^2 + cT^2 + 2dYT + 2eTX + 2fXY = 0$ est donnée par 6 coefficients a, b, c, d, e, f, déterminés à un scalaire près). Si C est une conique fixée (disons $Y^2 - XT = 0$) il est facile de trouver les coniques tangentes à C. On paramètre C par $x = u^2, y = uv, t = v^2$, on coupe par la conique générale Γ et on trouve l'équation :

$$au^4 + 2fu^3v + (b + 2e)u^2v^2 + 2duv^3 + cv^4 = 0.$$

Dire que Γ est tangente à C signifie que cette équation a une racine multiple donc que son discriminant est nul. Or ce discriminant est un polynôme $F(a, \cdots, f)$ homogène de degré 6, de sorte que les coniques tangentes à C forment une hypersurface de degré 6 de $\mathbf{P}^5$. L'ensemble des coniques tangentes à 5 coniques fixées est donc l'intersection de 5 telles hypersurfaces et donc, si elles sont en position générale, il est fini de cardinal $6^5 = 7776$ en vertu de Bézout généralisé.

Malheureusement, ce calcul est incorrect. En effet, les 5 hypersurfaces ne sont pas en position générale, au contraire, elles contiennent toutes la variété V de dimension 2 formée des coniques qui sont des droites doubles. En effet les droites doubles sont tangentes à toute conique (car leur intersection avec une conique est toujours multiple). L'intersection des 5 hypersurfaces est donc infinie et le nombre 6^5 n'a aucun sens.

Comment se sortir de ce mauvais pas ? Il faut essayer de faire disparaître ces intersections superflues qui ont lieu sur V. Pour cela il y a un moyen standard en géométrie algébrique : on éclate V dans $\mathbf{P}^5$. On obtient ainsi une nouvelle variété B, encore lisse de dimension 5, mais dans laquelle les 5 hypersurfaces éclatées F'_i ne se coupent plus au dessus de V (pourvu que les F_i se coupent transversalement sur V). Il s'agit alors de calculer l'intersection $F'_1 \cdots F'_5$ dans l'anneau de Chow de B.

Bien entendu l'anneau de Chow de B n'est plus le même que celui de $\mathbf{P}^5$. On montre qu'il est engendré par deux éléments : la classe de l'image réciproque $\mathbf{m}$ d'un hyperplan de $\mathbf{P}^5$ et celle du diviseur exceptionnel $\mathbf{p}$ (image réciproque de V), dont on sait aussi calculer les intersections. On montre alors que la classe des hypersurfaces F'_i est égale à $2\mathbf{m} + \mathbf{p}$. Un petit calcul permet de calculer sa puissance cinquième $(2\mathbf{m} + \mathbf{p})^5$ et on trouve ainsi que le nombre de coniques tangentes à 5 coniques données est de 3264.

On peut d'ailleurs montrer que si les 5 coniques initiales sont en position générale, les 3264 coniques en question sont propres et distinctes.

Bibliographie.

0. Ouvrages généraux.

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, Geometry of Algebraic Curves, Vol. I, Springer Verlag, 1985.

[F1] W. Fulton, Intersection theory, Springer Verlag, 1984.

[F2] W. Fulton, Algebraic Curves, Benjamin, 1969.

[GH] P. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, New-York, 1978.

[H1] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.

1. Articles généraux sur la géométrie énumérative.

[K2] S.L. Kleiman, Problem 15. Rigorous foundations of Schubert's enumerative calculus, Amer. Math. Soc. Symposium on Hilbert's problems. (1974) De Kalb.

[K4] S.L. Kleiman, Intersection theory and enumerative geometry : a decade in review, in Algebraic geometry, Bowdoin 1985, Proc. Symp. pure Math. 46, Amer. Math. Soc., 1987, p. 321-370.

[P] R. Piene, On the enumeration of algebraic curves – from circles to instantons, Proc. ECM Paris 1992, Birkhäuser.

Voir aussi [F1] Ch. 8 et 10, [K3], [KL].

2. Sur l'anneau de Chow.

[BS] A. Borel et J.-P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France, 86, 1958, p. 97-136.

[C] C. Chevalley, Séminaire C. Chevalley, 2ème année, Anneaux de Chow et applications, Secrét. Math. IHP, Paris, 1958.

[DV] A. Douady et J.-L. Verdier, Séminaire de géométrie analytique de l'ENS 1974-1975, Astérisque 36-37, 1976.

[G] A. Grothendieck, La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. France, 86, 1958, p. 137-154.

[H2] R. Hartshorne, Equivalence relations on algebraic cycles and subvarieties of small codimension, in Algebraic geometry, Arcata 1974, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. pure Math. 29, 1975, p. 129-164.

[M] J.I. Manin, Lectures on the K-functor in algebraic geometry, Russian Math. Surveys 24 (1969), p. 1-89.

Voir aussi [F1] Ch. 1-10, [H1] Appendice 1, [K2,3,4], [L].

3. Sur les grassmanniennes et le problème de Schubert.

[HP] W. Hodge, D. Pedoe, Methods of Algebraic Geometry, Cambridge University Press Vol. II, 1952.

[K1] S.L. Kleiman, Geometry on grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles, Publ. Math. IHES, Numéro 36, 1969.

[KL] S.L. Kleiman, D. Laksov, Schubert calculus, Am. Math. Monthly, 79, 1972, p. 1061-1082.

[L] D. Laksov, Algebraic cycles on Grassmann varieties, Advances in Math. 9, 1972, p. 267-295.

Voir aussi [ACGH] Ch. 2, [F1] Ch. 14, [GH] 1.5 et 6.2, [K 2,4].

4. Sur le problème de Chasles.

[FMP] W. Fulton, R. MacPherson, Defining algebraic intersections, in Algebraic Geometry, Proceedings Tromsø1977, Lecture notes in Math. 687, 1977, Springer.

[K3] S.L. Kleiman, Chasles's enumerative theory of conics : a historical introduction, Studies in algebraic geometry, Math. Assoc. Amer. Stud. Math. 20, 1980, p. 117-138.

Voir aussi [F1] 10.4, [GH] 6.1, [K2,4], [M].