Sur la classification des courbes gauches

Daniel PERRIN (Exposé au colloquium de Paris 7)

0. Introduction.

Cet exposé concerne la classification des courbes gauches. Il est bâti autour de quatre thèmes : les objets, les problèmes, les résultats, les questions ouvertes.
Le sujet relève de la géométrie **algébrique**. Je donnerai une idée des problèmes dont on s'occupe dans cette branche des mathématiques, mais très peu des méthodes qui sont très algébriques et nécessitent beaucoup de préliminaires. Je ferai beaucoup de dessins (même si l'on n'en fait pas toujours autant dans notre pratique habituelle) pour montrer que, même en algèbre, il y a une forte intuition géométrique.

1. Les objets.

a) Courbes gauches[1]*.*

Une courbe algébrique est une courbe définie par des équations polynomiales. C'est le cas par exemple, dans le plan affine, du cercle $X^2 + Y^2 = 1$, de l'hyperbole $XY - 1 = 0$, plus généralement des courbes d'équations $F(X, Y) = 0$.
C'est aussi le cas des courbes de l'espace, mais, bien entendu, dans l'espace il faut **au moins deux équations** (et même strictement plus que 2 dans les cas non triviaux, cf. plus loin) pour définir une courbe (une équation définit une surface). On a ainsi, par exemple, la fenêtre de Viviani, intersection de la sphère $X^2+Y^2+Z^2-1 = 0$ et du cylindre $X^2+Y^2-X = 0$ (dessin, ballon), ou la cubique gauche paramétrée par $x = t, y = t^2, z = t^3$, qui a pour équations $Y - X^2, Z - X^3$ en affine.

Il y a plusieurs niveaux de généralité possibles pour parler de courbes : on peut se limiter aux courbes lisses (i.e. sans points singuliers, qu'il s'agisse de nœud ou de rebroussement) et demander en plus qu'elles soient connexes. On peut, au contraire, tolérer des courbes singulières, voire non connexes (réunions disjointes de courbes algébriques, par exemple deux ou plusieurs droites "gauches"), ou seulement réductibles (réunions, pas nécessairement disjointes, de courbes algébriques, par exemple plusieurs droites[2]), non réduites (i.e. avec des structures multiples, cf. $Y^2 = 0$), avec ou sans points isolés ...
En fait, une idée importante c'est que, même si on s'intéresse aux courbes lisses, **il est utile de regarder des courbes plus générales**. Il y a (au moins) deux raisons à cela. D'abord on peut déformer des courbes lisses en des courbes

[1] Ce mot est utilisé par opposition à plane, mais on englobe les courbes planes dans les courbes gauches

[2] Nous utiliserons abondamment ces réunions de droites (les "figures en bâtons"). C'était un vieux rêve des anciens, et notamment de Severi, de tenter de ramener la classification des courbes gauches à celle de ces courbes particulières. On verra que ce rêve s'est un peu écroulé, cf. ci-dessous le problème de Zeuthen.

singulières, réductibles, etc. (on le verra tout à l'heure avec les réunions de droites). Une autre idée essentielle est la liaison : deux courbes sont dites liées si leur réunion est une intersection complète (i.e. intersection de deux surfaces exactement). Cette notion est un outil essentiel d'exploration des courbes gauches.
Si la première idée ne conduit à aucune restriction sur la nature des courbes à étudier, on montre, en revanche, que par liaison à partir des courbes lisses on peut obtenir toutes les courbes réductibles, singulières, non réduites etc. **sauf** celles qui contiennent des points isolés (ou immergés). On ne considère donc pas ces courbes contenant des points comme de vraies courbes (il y a, en plus, de fortes raisons techniques pour écarter ces cas). On verra plus loin les conséquences de ce choix.

b) Points ou équations.

Il y a **deux pôles** un peu antagonistes en géométrie algébrique. On peut s'occuper en priorité, s'agissant, par exemple, d'une courbe algébrique C :
• Des points de C.
Par exemple : en géométrie réelle on s'intéresse au nombre de composantes connexes de C, cf. $Y^2 - X^3 + X = 0$. En géométrie arithmétique (i.e. sur $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Z}$ ou un corps fini), on compte le nombre de points des courbes, cf. codes, courbes elliptiques, théorème de Fermat, etc.
• Des équations de C.
C'est le **point de vue dual** (les équations correspondent aux surfaces contenant C, cf. cubique ou fenêtre, au lieu des points contenus dans C).

Dans notre domaine c'est le second aspect qui est privilégié.

c) L'exemple de Bézout.

Comme on privilégie le point 2) on s'arrange pour que le point 1) ne pose pas de problème : **les points, comme l'intendance, doivent suivre**. Voici un exemple de ce principe.

Si on étudie les intersections d'une conique (penser à une ellipse) et d'une droite du plan on voit qu'on a (souvent) deux points d'intersection. Avec une droite et une cubique on a trois points, avec deux coniques, quatre points (dessins). On aurait bien envie d'avoir un théorème (dit de Bézout) qui affirme que deux courbes planes C et C', de degrés d et d', ont toujours dd' points d'intersection : c'est typiquement un théorème qui privilégie les équations. Le problème c'est qu'il y a manifestement des obstructions, à cause des points, à la validité de cette assertion :

a) Si on travaille sur le corps des réels on sait bien que l'assertion n'est pas toujours vraie. Par exemple le cercle $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ et la droite $X = 2$ ne se coupent pas dans $\mathbf{R}^2$. En revanche, dans $\mathbf{C}^2$ ils ont bien deux points d'intersection : $(2, \mp i\sqrt{3})$. On supposera donc, pour avoir le théorème idéal que le corps de base est $\mathbf{C}$.

b) Un autre contre-exemple essentiel au théorème idéal est celui de deux droites parallèles, ou d'une hyperbole et de son asymptote qui n'ont pas de points d'intersection. Là encore on voit bien ce qu'il faut faire pour surmonter cette difficulté : introduire des points à l'infini. Pour nous, cela signifiera qu'il faut travailler dans l'espace projectif et pas dans l'espace affine.

c) Enfin, si l'on reprend le cas d'un cercle et d'une droite il est encore un cas où le nombre de points d'intersection n'est pas égal à deux, c'est le cas où la droite est tangente au cercle : les courbes $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ et $X = 1$ se coupent en l'unique

point $(1,0)$. Cependant si on résout le système formé par ces deux équations on tombe sur la relation $y^2 = 0$, de sorte que la solution $y = 0$ est racine double : le point d'intersection est multiple et il doit compter pour deux.
Avec toutes ces précautions on a alors le résultat idéal attendu.

On notera que le fait de se placer sur **C** et en projectif a de fortes **conséquences** :
1) Dans le plan deux courbes se coupent toujours.
2) Dans l'espace ce n'est plus vrai (penser à deux droites non coplanaires), mais une courbe rencontre toujours une surface.
3) Des courbes qui pouvaient sembler des intersections complètes en affine ne le sont plus en projectif. Ainsi la cubique gauche, qui est intersection en affine des surfaces $Y - X^2 = 0$ et $Z - X^3 = 0$ n'est pas intersection des surfaces projectives correspondantes $YT - X^2 = 0$ et $ZT^2 - X^3 = 0$ (l'intersection contient aussi, à l'infini, la droite triple d'équations $X^2 - YT, XT, T^2$).

2. Problèmes et résultats.

a) Classification : le cadre mathématique général.

Que signifie le mot **classification** ? De façon générale, en mathématiques, cela consiste, dans un premier temps, à repérer des **invariants** (notamment numériques) des objets étudiés.
Pour donner un exemple plus accessible, dans la théorie des groupes finis, l'invariant le plus simple est le cardinal $|G|$ du groupe et de même dans la théorie des corps finis.

Une fois repérés ces invariants se posent deux **problèmes** naturels :
Problème A : déterminer quels sont les invariants possibles (ou encore l'image de l'application Φ qui à un objet associe ses invariants).
Dans le cas des groupes finis il est clair que tous les entiers > 0 conviennent (penser au groupe cyclique d'ordre n), de sorte que la solution de ce problème est évidente. Pour le cas des corps en revanche on sait qu'il n'y a de corps fini qu'à p^n éléments, avec p premier.

Problème B : pour un (ou des invariants) fixés, déterminer (ou classifier à nouveau en un sens à préciser) tous les objets admettant ces invariants (ou encore, décrire les fibres de l'application Φ).
Cette fois, dans le cas des groupes finis, il s'agit de déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes finis de cardinal donné, problème totalement inabordable, en général. En revanche, pour les corps finis, il y a un seul corps à $q = p^n$ éléments, à isomorphisme près.

b) Invariants des courbes : le degré et le genre.

Dans le cas des courbes gauches, on dispose, depuis plus d'un siècle, de deux invariants bien connus : le degré et le genre.

Le **degré** d d'une courbe C (qu'on peut faire remonter à Descartes) a une interprétation géométrique simple, c'est le nombre de points d'intersection de la courbe C avec un plan général. Par exemple si C est plane, définie par $Z = 0$ et $P(X,Y) = 0$, c'est le degré de P.
Pour une courbe "intersection complète" de deux surfaces de degrés s et t, le degré est st, cela résulte de Bézout. Par exemple, si on coupe la fenêtre de Viviani par un

plan vertical, l'intersection avec le cylindre est formée de deux droites parallèles, celle avec la sphère est un cercle et on obtient 4 points.
Pour la cubique gauche, un petit calcul avec la paramétrisation montre que le degré est 3. Il en résulte que C n'est pas définie par deux équations en projectif, sinon elle serait plane (les équations affines données plus haut définissent C plus la droite triple à l'infini $XT, T^2, X^2 - YT$).

Pour le **genre** les choses sont un peu plus compliquées. On peut faire remonter cette notion à Riemann, vers 1850.
La courbe C étant une courbe (lisse) **complexe** est de dimension 1 sur $\mathbf{C}$, donc de dimension 2 sur $\mathbf{R}$, c'est donc, en fait, une surface réelle, compacte (car on est en projectif) et orientable (car on est sur $\mathbf{C}$). On montre alors qu'elle est homéomorphe à une sphère, à un tore ou à un tore à g trous, (dessin) le g en question étant justement le genre de C.
En fait, cette définition, qui se situe du côté des points, n'est pas celle qui est utile dans notre domaine où l'on privilégie les équations. Si on note A_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales homogènes de degré n sur une courbe C de degré d, il existe un entier g (le genre arithmétique) tel que l'on ait, pour $n \gg 0$, la formule

$$\dim A_n = nd + 1 - g$$

(théorème de Riemann-Roch). Si on note I_n l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n en X, Y, Z, T nuls sur la courbe C de degré d (donc les équations de degré n définissant C), il revient au même de dire qu'on a, pour $n \gg 0$, la formule :

$$\dim I_n = \binom{n+3}{3} - (nd + 1 - g)$$

dans laquelle le coefficient binômial est la dimension de tous les polynômes homogènes de degré n.

Un exemple : les courbes planes.

Supposons d'abord $d = 1$. La droite affine sur $\mathbf{C}$ c'est le plan sur $\mathbf{R}$. Comme il s'agit de la droite projective complexe, on doit ajouter un point à l'infini. Mais, un plan plus un point à l'infini c'est une sphère, comme on le voit avec une projection stéréographique, donc le genre est 0.
Supposons maintenant $d = 2$, de sorte que C est une conique plane. Pour calculer le genre de C on utilise le principe suivant :
Principe fondamental : le genre (arithmétique) ne change pas dans une famille "raisonnable", même si les courbes ne sont pas lisses.
Côté topologique une telle famille est obtenue par déformation, côté algébrique en bougeant les équations : par exemple, la famille[3] d'hyperboles $XY - \lambda = 0$, pour $\lambda \neq 0$, dégénère en les deux droites $XY = 0$.
Attention, les arguments qui vont suivre sont très intuitifs. On peut sans doute les rendre corrects en utilisant homologie ou homotopie, mais, de toute manière, ce ne sont pas les méthodes pertinentes dans notre cadre.

[3] Mathématiquement il s'agit d'une famille plate, mais c'est assez minime comme hypothèse : la famille doit être algébrique et ne pas présenter de de saut de dimension dans les fibres. Bien sûr le genre est le genre arithmétique.

On a deux droites (projectives complexes, donc deux sphères) se coupant en un point. On déforme le tout en une sphère. Le genre est donc encore $g = 0$.

Pour $d = 3$ on a une cubique plane que l'on déforme en trois droites formant triangle (dessin). On a donc trois sphères avec 3 points d'intersection que l'on déforme en un tore, d'où $g = 1$.

On montre, de manière analogue :

Lemme 1.
1) Une réunion de deux courbes C_1 et C_2 de genres g_1 et g_2 avec r points d'intersection (simples) est de genre $g = g_1 + g_2 + r - 1$ (dessin avec les surfaces réelles correspondantes).
2) Une réunion de d droites avec r points d'intersection[4] *(simples) est de genre $r + 1 - d$.*

Démonstration. Le point 2) résulte de 1) par récurrence. Pour le point 1) on utilise le fait que les fonctions polynomiales sur la réunion sont données par des fonctions polynomiales sur chaque courbe avec r conditions de coïncidence aux intersections. On a donc, pour $n \gg 0$, $nd + 1 - g = nd_1 + 1 - g_1 + nd_2 + 1 - g_2 - r$, d'où le résultat.

Corollaire 2. *Une courbe plane de degré d est de genre $(d-1)(d-2)/2$. Les genres possibles sont donc : 0,1,3,6,10, etc. (les coefficients binômiaux $\binom{d-1}{2}$).*

Démonstration. On se ramène au cas de d droites générales. Elles ont $r = d(d-1)/2$ points d'intersection (attention on est en projectif) (dessin), d'où le résultat. On note que c'est aussi le nombre de régions "bornées" limitées par les droites.

c) Le problème A pour le degré **ou** *le genre.*

Tous les degrés ≥ 1 sont atteints par les courbes planes. Par exemple $X^d + Y^d - 1 = 0$ est une courbe (lisse connexe) de degré d. Bien entendu on a aussi des courbes de l'espace de tout degré d.
Pour le genre, c'est un peu plus compliqué (et ça dépend de ce qu'on appelle courbes).
On a vu que dans le plan il n'y a pas tous les genres, par exemple il n'y a pas de courbe de genre 2. Pourtant on voit bien comment faire une courbe de genre 2 avec 5 droites se coupant en 6 points (cf. dessin). Mais ce dessin n'est pas possible dans le plan projectif : deux droites se coupent toujours.
On passe donc dans l'espace. **La surface la plus simple après le plan est la quadrique** Q, surface de degré 2. Sur une telle surface on a deux familles infinies de génératrices (en réel, pas toujours, penser à la sphère, mais en complexes, si). Ce sont des droites, avec de belles propriétés : deux droites d'une même famille ne se coupent jamais, deux droites de familles distinctes se coupent en un unique point. On a donc une courbe de degré 5 et genre 2 en prenant 2 droites d'une famille et 3 de l'autre. De plus, on sait "lissifier" cette courbe.
Plus généralement, on a sur Q des courbes de type a, b (a droites d'une famille, b droites de l'autre), lissifiables si $a, b > 0$. On a $d = a + b$, $g = ab + 1 - a - b = (a-1)(b-1)$ en vertu du lemme 1.

[4] D'ailleurs Halphen, dans les années 1880, ne parlait par de genre mais du nombre de "points doubles apparents" de la courbe (ici r)

Moralité : si on prend $a = 2$, $b = g + 1$ on a une courbe (lisse connexe) de genre g et de degré $g + 2$.

Remarques 3.
1) Attention, ce problème de lissification est crucial.
D'abord, une réunion de droites n'est pas toujours lissifiable. Ainsi, l'union d'une quartique plane et d'une droite se coupant en un point est une courbe de degré 5 et genre 3 non lissifiable (sinon elle serait sur une quadrique lisse et les degré et genre ne sont pas les bons). Ensuite, une courbe lisse ne se déforme pas toujours en une réunion de droites. C'est un problème non évident, dit problème de Zeuthen, qui motivait l'espoir de Severi de ramener l'étude des courbes gauches à celle des figures en bâtons. Cependant, Hartshorne a donné une réponse négative à ce problème en 1995 : le plus petit contre-exemple connu est une courbe de degré 30 et genre 113.
2) Les courbes non connexes peuvent être de genre < 0. Par exemple d droites disjointes ont pour genre $-(d-1)$.

c) Le problème A pour le degré **et** *le genre.*

En vérité, le problème sérieux est pour le couple (d, g).
Le problème A consiste à dire quels sont les couples (d, g) qui correspondent effectivement à des courbes (lisses connexes). La réponse est connue depuis 1882 (Halphen), mais une démonstration convaincante n'a été fournie qu'un siècle exactement plus tard par Gruson et Peskine (1982).

Théorème 4. *Les couples (d, g) possibles pour le degré et le genre des courbes lisses et connexes sont les suivants :*
1) Dans le cas des courbes planes on obtient les couples $\big(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2}\big)$, et on a $g \sim d^2/2$.
2) Dans le cas des courbes sur les quadriques on obtient les couples de la forme $(a+b, (a-1)(b-1))$ avec $a, b > 0$, et on a $g \leq d^2/4$.
3) Avec les courbes tracées sur des surfaces de degré ≥ 3 on obtient les couples (d, g) avec $g \leq 1 + \frac{d(d-3)}{6}$ et on a $g \leq d^2/6$.

Exemple 5. Pour $d = 20$ on a les courbes planes, $g = 171$, celles sur les quadriques, $g = 81, 80, 77, 72, 65, 56, 45, 32, 17, 0$, et les autres : tous les genres $0 \leq g \leq 57$.

Remarques 6.
1) Halphen prétendait qu'on pouvait trouver tous les (d, g) sur des surfaces cubiques. Gruson et Peskine ont montré que c'est faux, mais ce n'est pas évident ! Ils construisent les courbes cherchées sur des surfaces de degré 3 (en utilisant les 27 droites tracées sur une telle surface) **et 4**. Cela montre que les courbes qu'ils construisent sont très particulières car les courbes générales ne sont pas sur des surfaces d'aussi petits degrés. Ainsi une réunion disjointe de 7 droites générales ou une courbe rationnelle générale de degré 9 ne sont pas sur une surface de degré 4.
2) Si on admet les courbes éventuellement singulières, éventuellement réductibles, éventuellement réduites, éventuellement non connexes (mais toujours sans points) on obtient tous les genres $g \leq (d-2)(d-3)/2$ (y compris pour $g < 0$, penser aux d droites qui sont de genre $-d + 1$). Il suffit pour cela d'utiliser les courbes extrémales, cf. [MDP].

3) Avec les réunions de droites on n'obtient pas tous les genres $\leq (d-2)(d-3)/2$, mais tous ceux $\leq d^2/4$ (donc tous ceux des courbes lisses). Cependant, comme Zeuthen est faux, il est inutile d'espérer prouver Gruson-Peskine par ce biais !

d) Le problème B pour degré et genre.

Le problème B consiste ensuite à décrire l'ensemble (on dit savamment le schéma de Hilbert) $H_{d,g}$ (resp. $H^0_{d,g}$) des courbes de degré d et de genre g fixés (resp. des courbes lisses et connexes). Il s'agit d'abord de comprendre ce que signifie décrire. **Une idée essentielle est qu'on peut munir cet ensemble d'une structure de variété algébrique** (ou plutôt de schéma, cf. Grothendieck, 1960). Les anciens considéraient cela comme évident, pourtant c'est loin d'être le cas et il peut y avoir des surprises (par exemple $H_{d,g}$ peut ne pas être réduit).

Exemple 7. La famille des droites de $\mathbf{P}^3$ est ce qu'on appelle une grassmannienne. Elle est de dimension 4 comme on le voit en considérant le morphisme qui à deux points distincts associe la droite qui les joint.

On peut alors se poser nombre de questions sur ce schéma : est-il irréductible ? (i.e. non réunion de deux morceaux algébriques, penser à une réunion de deux plans ou de deux surfaces, dessin), ou, au moins, connexe, (dessin) ? a-t-il des points singuliers ? (penser au sommet d'un cône, dessin), quelle est sa dimension ?
On notera que les problèmes sont différents suivant le type de courbes qu'on accepte.

Ces problèmes remontent essentiellement au siècle dernier (un prix pour la classification des courbes gauches a été offert en 1882 par Steiner et partagé entre Halphen et Noether). Voilà le programme proposé par Halphen à l'époque :
Énumérer, définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre, plus générale.
Dit en termes modernes, il s'agit essentiellement de décrire les composantes irréductibles de $H_{d,g}$.
En l'an 2001 on est encore loin du compte (certains esprits pessimistes pensent qu'il y a encore pour 1000 ans de travail !)

e) Résultats.

Le problème de l'irréductibilité est le plus important car il gouverne les autres.
D'abord, on ne se pose la question de la connexité que lorsque le schéma est réductible. Ensuite, la lissité ne subsiste pas en général si le schéma est réductible (dessin).

Pour la dimension, il n'y pas beaucoup d'espoir de calcul si $H_{d,g}$ n'est pas irréductible (la dimension est le Max des dimensions des composantes, dessin).

Dans le cas des courbes lisses et connexes ($H^0_{d,g}$) on a un résultat quand le genre est petit par rapport au degré :

Théorème 8. *(Severi 1920, Ein 1985) Si on a $g \leq d-3$, $H^0_{d,g}$ est irréductible et de dimension $4d$. Il est lisse pour $g \leq d/2$.*

Comme on sait que le genre peut aller jusqu'à $d^2/6$ on voit qu'il ne s'agit que d'un résultat très partiel, d'ailleurs le théorème est faux si g est grand, ainsi par exemple $H_{9,10}$ est réductible. En effet, il y a deux types de courbes $(9,10)$, donc deux

composantes irréductibles, l'une formée de courbes de type $(6,3)$ sur la quadrique, l'autre de courbes intersections complètes 3×3.
On a d'ailleurs des figures en bâtons de chaque sorte, qui sont réunions de 9 droites, avec 18 points d'intersection. Dans le cas de la quadrique on prend 6 droites d'une famille et 3 de l'autre. Dans le cas des intersections complètes on prend l'intersection des surfaces cubiques P (resp. Q) formées de la réunion de trois plans P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3). On notera que les 18 points d'intersection ne sont pas répartis de la même manière : sur la quadrique on a 3 droites à 6 points et 6 droites à 3 points tandis que dans le cas de l'intersection complète toutes sont à 4 points. (C'est ainsi que Severi projetait de séparer les composantes. Tel quel, l'argument est un peu court.)

En tous cas, le problème est très complexe. Ainsi, on a montré récemment (Ellia, Hirschowitz et Mezzetti) que le nombre de composantes irréductibles pouvait croître exponentiellement en d (par exemple être de l'ordre de 2^d). Dans ce cas le schéma de Hilbert n'est pas lisse et sa dimension est beaucoup plus grande que $4d$.

Pour les courbes générales, on montre que $H_{d,g}$ n'est presque jamais irréductible ni réduit ([MDP], 1996).

3. Une question ouverte : la connexité de $H_{d,g}$.

Le problème le plus intéressant concernant $H_{d,g}$ (le schéma de Hilbert des courbes générales) est, à mon avis, celui de la connexité. Je proposerais volontiers la conjecture suivante (cf. HMDP) :

Conjecture 9. *Le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est connexe.*

Cette conjecture a une histoire assez amusante. En effet, dans un premier temps, nous avions cru prouver (vers 1994-95) que $H_{d,g}$ n'était "presque" jamais connexe. La démonstration était écrite, soumise à une revue prestigieuse, contrôlée par un rapporteur, acceptée, et pourtant fausse ! Passant d'un extrême à l'autre, nous cherchons maintenant à montrer que le schéma de Hilbert est toujours connexe (enfin, peut-être ...).

C'est en étudiant le schéma de Hilbert $H_{4,0}$ que nous avons découvert l'erreur. Ce schéma a deux composantes H_1 et H_2 : les courbes de type (3,1) sur la quadrique et des réunions disjointes d'une cubique plane et d'une droite (dessin) et il est connexe, contrairement à ce que nous pensions alors.

Attention, un théorème analogue a bien été montré par Hartshorne en 1965, mais en tolérant des points dans les courbes ce qui facilite grandement le travail. Voici par exemple comment on montre ce théorème pour les $(4,0)$ avec des points. On note que rajouter un point isolé (ou immergé, cf. annexe) à une courbe diminue le genre de 1.
Il s'agit de fabriquer une famille qui joint H_1 et H_2.
On procède de la façon suivante : d'un côté on part d'une courbe de H_1 formée de trois droites disjointes D_1, D_2, D_3 et d'une droite Δ coupant chacune des D_i. On déforme $D_1 \cup D_2$ en les rendant coplanaires, donc concourantes en m. Un petit calcul (ou l'intuition géométrique, dessin !) montre que, pour conserver le genre, le point m doit être **"immergé"** dans la réunion. On peut encore déformer la

courbe obtenue en transformant m en un point isolé du plan P de D_1, D_2 et Δ. On obtient une courbe Γ. De l'autre côté, on part d'une courbe de H_2, réunion de trois droites D_1, D_2, Δ d'un plan P et d'une droite D_3 qui ne les rencontre pas. On déforme cette courbe de sorte que D_3 rencontre Δ, en un point p, immergé bien sûr. En transformant p en un point isolé de P on retrouve la courbe Γ.

Une manière de procéder plus systématique consiste à déformer la réunion de droites pour la rendre plane, en ajoutant pour cela le nombre convenable de points immergés, puis en isolant ces points. On aboutit ici, avec l'un ou l'autre point de départ, à une courbe plane de degré 4 avec 3 points isolés. C'est essentiellement ainsi qu'Hartshorne montre la connexité dans le cas des courbes avec des points : on ramène toute courbe (d, g) à une courbe plane de degré d avec $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$ points isolés.

Dans le cas de $H_{4,0}$ on peut aussi montrer la connexité pour les vraies courbes de manière géométrique. C'est la méthode dite "des petits dessins" de R. Hartshorne. Elle consiste à déformer la première courbe en une réunion de deux structures doubles, l'une de genre 0 provenant de $D_2 \cup \Delta$, l'autre de genre -1 provenant de $D_1 \cup D_3$, le schéma intersection étant encore de longueur 2. La seconde courbe est déforméee en une courbe similaire, la structure double de genre 0 venant de $D_1 \cup D_2$, celle de genre -1 de $D_3 \cap \Delta$.

Malheureusement, cette méthode a ses limites. Par exemple, elle ne fonctionne pas pour relier une courbe $5, 2$ sur une quadrique et la réunion disjointe d'une quartique plane et d'une droite. On peut cependant montrer, par d'autres méthodes, que ces courbes sont dans la même composante connexe de $H_{5,2}$.

A l'heure actuelle on ne sait toujours pas si le schéma de Hilbert est connexe (dans le cas des courbes sans points). Tous les résultats obtenus vont dans ce sens. Ils l'ont été par trois types de méthodes :
• un travail direct sur les équations (cf. $H_{4,0}$, ou extrémales-sous-extrémales, etc.)
• la méthode "des petits dessins",
• la méthode des triades : outil plus puissant sans doute mais assez calculatoire introduit dans [HMDP]. Cet outil est celui qui correspond à la philosophie de [MDP] : on construit la famille au niveau des modules de Rao (cf. annexe) puis on passe aux courbes.
La méthode consiste à aller vers les courbes extrémales ; celles qui ont le module de Rao le plus grand possible. J'ai récemment montré ainsi, par spécialisations successives, qu'une classe importante de courbes était dans la composante des extrémales. Un bémol toutefois : dans le cas des 4 droites sur une quadrique il semble bien qu'on ne peut pas spécialiser directement ces courbes pour aller vers les extrémales (il faut d'abord passer par 4 droites génériques, non sur une quadrique).

4. Annexes.

a) Quelques exemples de points immergés.

Le but de ces quelques lignes est de montrer comment on peut avoir une intuition géométrique des équations, même sur des objets aussi complexes que les points immergés.

Pour comprendre ce qui suit il faut d'abord rappeler comment les géomètres algébristes définissent des points multiples à l'aide des éléments nilpotents. Si par exemple on veut étudier l'intersection de la parabole d'équation $Y - X^2$ avec la droite $Y - \lambda$, on calcule l'idéal du schéma intersection S_λ qui n'est autre que la réunion des deux points $(\sqrt{\lambda}, \lambda)$ et $(-\sqrt{\lambda}, \lambda)$. Cet idéal est $(Y - \lambda, Y - X^2) = (Y - \lambda, X^2)$. Quand λ tend vers 0 la droite devient tangente à la parabole et le schéma S_0 est défini par l'idéal limite (on travaille sur les équations, toujours !) (Y, X^2) qui n'est pas tout à fait celui de l'origine (à cause de l'équation X^2 qui remplace X). La différence est l'existence, parmi les fonctions polynomiales sur ce schéma de la fonction x, non nulle, mais de carré nul (une fonction infinitésimale en quelque sorte).

Passons maintenant aux points immergés.

• Un premier exemple s'obtient à partir de la réunion d'une droite D du plan d'équation X et d'un point $P_\lambda = (\lambda, 0, 1)$ de ce plan. Les équations du point sont $Y, X - \lambda T$, donc celles de la réunion S_λ, pour $\lambda \neq 0$, sont $XY, X^2 - \lambda XT$ (l'idéal de la réunion est l'intersection des idéaux). Selon notre bon principe de déformation, pour obtenir le schéma limite S_0, on fait tendre λ vers 0 dans les équations précédentes. Il reste alors les équations XY, X^2. Ensemblistement il s'agit de la droite D. Mais les équations ne sont pas exactement celles de D, elles se souviennent de l'absorption du point limite $P_0 = (0, 0, 1)$: ce point est **immergé** dans S_0. En termes de schémas, cela signifie qu'on trouve parmi les fonctions polynomiales sur la réunion, outre les fonctions y^n qu'on trouverait sur la droite D ordinaire, une fonction x qui vérifie $x^2 = xy = 0$ et qui est concentrée au point P_0.

• Un deuxième exemple, pas fondamentalement différent consiste à faire se rapprocher deux droites disjointes. On part des deux droites Δ d'équations (X, Y) et D_λ d'équations $(Z, X + \lambda T)$. Pour $\lambda \neq 0$ ces droites sont disjointes et les équations de la réunion S_λ sont $XZ, YZ, \lambda XT + X^2, \lambda YT + XY$. Si on fait tendre λ vers 0, ces équations deviennent XZ, YZ, X^2, XY. Ensemblistement le schéma limite S_0 est la réunion des droites X, Y et X, Z qui se coupent en $P = (0, 0, 0, 1)$ mais, là encore, le point P est immergé dans S_0.

b) Le module de Rao.

Pour une courbe C (sans points) il s'agit du $k[X, Y, Z, T]$-module gradué :

$$M_C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1 \mathcal{J}_C(n).$$

Il est de longueur finie (il n'y a qu'un nombre fini de H^1 non nuls et ils sont de dimension finie). Ce module a la propriété fondamentale d'être invariant par liaison.