Autour du schéma de Hilbert des courbes gauches (connexité, etc.)

Daniel PERRIN

Exposé au séminaire de géométrie analytique complexe

0. Introduction.

Comme vous le savez, je suis spécialiste de géométrie algébrique et pas de géométrie analytique et, si les objets dont nous nous occupons sont essentiellement les mêmes que les vôtres, notamment en géométrie projective, les techniques sont assez différentes, et celles que j'utilise sont très algébriques. Je vais essayer de vous présenter un exposé très général avec le moins de références possible à ces techniques. J'évoquerai cependant (brièvement) trois d'entre elles : la liaison, le module de Rao et les triades. J'essaierai de montrer en particulier que la nature de l'outillage n'est pas sans conséquence sur les choix des objets et des problèmes à étudier.

Précisons tout de suite le cadre : je vais vous parler de la classification des courbes gauches c'est-à-dire des courbes (algébriques bien sûr, i.e. définies par des équations polynômiales) de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ (mais tout autre corps algébriquement clos me conviendrait aussi bien)[1].

1. Les courbes : quelles courbes ?

Il y a deux pôles opposés pour définir les courbes et (à mon avis), la vérité se situe entre les deux.

a) Les courbes lisses.

Il est clair qu'historiquement les courbes lisses et connexes sont les plus importantes, celles à qui tout le monde accorde le nom de courbes sans hésitation et que chacun souhaite étudier. En fait, une idée importante c'est que, même si on s'intéresse aux courbes lisses, **il est utile de regarder des courbes plus générales**. Il y a deux raisons (au moins) pour cela :

• D'abord on peut déformer des courbes lisses en des courbes singulières (penser à une famille de cubiques planes lisses qui dégénèrent en une cubique nodale), ou les déformer en des courbes réductibles ou non réduites (penser à une famille de coniques qui dégénèrent en deux droites ou une droite double), etc. D'ailleurs l'idée de faire dégénérer une courbe lisse en une réunion de droites ("stick figure" en anglais) a été très utilisée dans l'histoire de la géométrie algébrique.

• L'autre raison, sur laquelle je reviendrai plus bas, est l'utilisation de la notion de liaison, outil fondamental d'étude des courbes gauches.

[1] Pour l'essentiel les travaux que j'ai effectués sur la classification des courbes gauches l'ont été en collaboration avec Mireille Martin-Deschamps.

b) Les sous-schémas.

À l'opposé de la notion de courbe lisse, l'objet le plus général à qui l'on puisse décemment donner le nom de courbe est simplement un sous-schéma fermé de dimension 1 de $\mathbf{P}^3$. Pour obtenir un tel objet on se donne un idéal homogène I de l'anneau $R = \mathbf{C}[X, Y, Z, T]$ tel que le lieu C des zéros communs des polynômes de I soit de dimension 1. Le point essentiel, qui fait que l'on est en train de parler de schéma et pas de variété, c'est que le faisceau $\mathcal{O}_C$ des fonctions sur C (qui indique sa structure schématique) est défini par la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_C \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

où $\mathcal{J}_C$ est le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C = \widetilde{I}$ associé à I, qui est *a priori* contenu dans le faisceau de toutes les fonctions "ensemblistement" nulles sur C mais ne lui est pas égal. De même l'idéal $I_C = H^0_* \mathcal{J}_C$ n'est pas l'idéal des polynômes nuls sur C. Il y a ici une idée fondamentale, due sans doute à Grothendieck : se donner un schéma ce n'est pas seulement se donner des points mais aussi, mais surtout, **des équations**.

Un tel sous-schéma fermé de dimension 1 peut être singulier, voire réductible, voire non connexe, voire non réduit. Il peut avoir des composantes ponctuelles isolées ou immergées.

Exemples 1.1.
1) La cubique gauche, que l'on peut voir sous forme paramétrique comme l'ensemble des points de coordonnées (u^3, u^2v, uv^2, v^3) avec $(u, v) \in \mathbf{P}^1$, est définie par l'idéal $I = (XT - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - YT)$. Dans ce cas, l'idéal I est exactement l'idéal $I(C)$ des polynômes nuls sur la courbe.
2) La courbe définie par l'idéal $I = (Z, Y^2)$ est une structure double sur l'axe des x. Ici on a $I(C) = (Y, Z) \neq I$.

c) Degré et genre.

Sur $\mathbf{P}^3$ on a le faisceau des fonctions (de degré 0) $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ mais aussi le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ des fonctions homogènes de degré 1 et ses tensorisés $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$. On en déduit par restriction les faisceaux $\mathcal{O}_C(n)$ pour $n \in \mathbf{Z}$. De l'existence de résolutions finies des modules sur R résulte le fait que la caractéristique d'Euler du faisceau $\mathcal{O}_C(n)$ est un polynôme en n :

$$\chi\mathcal{O}_C(n) = h^0\mathcal{O}_C(n) - h^1\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g$$

et ceci définit le **degré** d et le **genre** (arithmétique) g de C.
Bien entendu ces nombres ont aussi un sens géométrique. Le degré est le nombre de points d'intersection de C et d'un plan général (comptés avec leurs multiplicités). Le genre peut s'interpréter, dans le cas d'une courbe lisse et connexe, comme le nombre de trous de la surface réelle compacte associée à la courbe complexe C. Attention, dans le cas général cette description n'a aucun sens. Nous verrons d'ailleurs que le genre peut être < 0.

Exemple 1.2. La cubique gauche vue ci-dessus est une courbe de degré 3 et genre 0. Il suffit pour le voir de noter qu'on a une résolution de $\mathcal{O}_C$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-3)^2 \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)^3 \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

avec $u = (XT - YZ, Z^2 - YT, Y^2 - XZ)$ et $v = \begin{pmatrix} Y & Z \\ X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. On en déduit le polynôme de Hilbert :

$$\chi\mathcal{O}_C(n) = \binom{n+3}{3} - 3\binom{n+1}{3} + 2\binom{n}{3} = 3n + 1.$$

d) Quelques exemples de courbes de degré 2.

Exemple 1.3.
Voici un panorama, presque exhaustif, des courbes de degré 2 :
1) Les coniques lisses, avec par exemple $I_C = (X^2 - YT, Z)$, $g = 0$.
2) Les coniques décomposées, $I_C = (XY, Z)$, $g = 0$.
3) Les droites doubles "planes", $I_C = (X^2, Z)$, $g = 0$.
Dans tous ces cas on a une résolution de la forme

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-3) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1) \to \mathcal{J}_C \to 0.$$

4) Les réunions disjointes de deux droites, par exemple la réunion de $D_1 = (X, Z)$ et $D_2 = (Y, T)$: $I_C = (XY, XT, ZY, ZT)$, $g = -1$.
Pour montrer que le genre vaut -1 on peut, soit montrer que la résolution de $\mathcal{J}_C$ est :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-4) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-3)^4 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)^2 \to \mathcal{J}_C \to 0,$$

soit utiliser la décomposition $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{D_1} \oplus \mathcal{O}_{D_2}$.
5) Il y a beaucoup de courbes de degré 2 qui sont des structures doubles sur une droite, par exemple la courbe donnée par $I_C = (X^2, XY, Y^2, XZ^a + YT^a)$, avec $a \geq 1$, est de degré 2 et de genre $-a$. Il y a donc de telles courbes de tous les genres négatifs possibles.
Voilà la résolution de l'idéal de cette courbe :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a-3) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-3)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a-2)^2 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a-1) \to \mathcal{J}_C \to 0.$$

6) Enfin, pire encore que tout cela, il y a les courbes qui contiennent des composantes ponctuelles isolées ou immergées.

Par exemple la courbe C obtenue en ajoutant r points isolés à une conique Γ est de degré 2 et genre $-r$. En effet, si Z désigne le schéma fini des r points on a $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_\Gamma \oplus \mathcal{O}_Z$ d'où $\chi\mathcal{O}_C(n) = \chi\mathcal{O}_\Gamma(n) + \chi\mathcal{O}_Z(n) = 2n + 1 + r$.

Le cas d'une composante immergée est le cas limite du précédent. Partons de la réunion C_λ de la courbe $\Gamma = (XY, Z)$ (réunion de deux droites du plan $Z = 0$) et du point $P_\lambda = (0, 0, \lambda, 1)$ situé sur l'axe des z. Le point est défini par l'idéal $(X, Y, Z - \lambda T)$. Pour $\lambda \neq 0$, la réunion est disjointe et correspond à l'intersection des idéaux. On a ainsi $I_{C_\lambda} = (XY, XZ, YZ, Z(Z - \lambda T))$. Lorsqu'on fait tendre λ vers 0 le point P_λ tend vers le point $P_0 = (0, 0, 0, 1)$ qui est sur Γ. L'idéal limite est alors (XY, XZ, YZ, Z^2). Ensemblistement, les zéros de cet idéal sont réduits à Γ, mais l'idéal n'est pas I_Γ ; en un sens il se souvient de l'absorption du point limite $P_0 = (0, 0, 0, 1)$: ce point est **immergé** dans C_0. En termes de schémas,

cela signifie qu'on trouve parmi les fonctions polynomiales sur la réunion, outre les fonctions qu'on trouverait sur la courbe Γ ordinaire, la fonction $f = z$, non nulle, qui vérifie $xf = yf = zf = 0$ (donc en particulier $f^2 = 0$: c'est une fonction nilpotente) et qui est concentrée au point P_0 (puisque si x, y ou z est non nul on a $f = 0$).
Toutes les courbes C_λ (y compris C_0) sont de degré 2 et genre -1.

Nous verrons plus loin qu'il y a de bonnes raisons de rejeter ces courbes contenant des composantes ponctuelles, mais, patience !

2. Familles de courbes

On cherche maintenant à comprendre comment varient les courbes dans des familles et, en particulier, quel y est le sort des invariants (degré et genre). Il y a en gros deux voies pour définir et étudier les familles de courbes : le schéma de Hilbert et la variété (ou le schéma) de Chow. Je vais tenter de résumer rapidement les propriétés de l'un et de l'autre et de pointer leurs différences. Attention, si je peux passer pour un spécialiste du schéma de Hilbert, je demande en revanche votre indulgence en ce qui concerne la variété de Chow.

a) Le schéma de Hilbert.

Je continue à parler de courbes gauches, mais ce que je vais dire vaut de manière beaucoup plus générale.

Pour définir une famille de courbes de $\mathbf{P}^3$ paramétrée par un schéma S on commence par regarder le projectif au-dessus de S : c'est le produit fibré $\mathbf{P}^3_S = \mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}} S$. Il se projette sur S. On peut alors définir grossièrement une famille de courbes au-dessus de S comme un sous-schéma fermé $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}^3_S$ (muni de la restriction de la projection $p : \mathcal{C} \to S$), telle que les fibres $\mathcal{C}(s)$ de p soient des courbes de $\mathbf{P}^3$ (en un sens à préciser, pour l'instant des sous-schémas fermés de dimension 1). Telle quelle, cette définition est vraiment trop grossière. On souhaite tout de même que les courbes varient "continûment" en fonction du paramètre s. En géométrie algébrique, la bonne condition, qui a mis longtemps à se dégager, c'est que le morphisme $p : \mathcal{C} \to S$ soit **plat**.
On définit ainsi le foncteur de Hilbert $\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}}$ par la formule :

$$\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}}(S) = \left\{ \text{familles plates de courbes de } \mathbf{P}^3 \text{ au-dessus de } S \right\}.$$

L'un des apports essentiels de Grothendieck est d'avoir prouvé que ce foncteur est représentable par un schéma projectif, noté encore $\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}}$ qui, puisqu'il représente le foncteur, est livré avec une famille universelle $\mathcal{C}$ de courbes, plate sur Hilb.
Par ailleurs, le résultat suivant explique que les invariants se comportent bien dans les familles plates :

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{C} \to S$ une famille (plate) de courbes. On suppose S connexe. Alors le polynôme de Hilbert des fibres $\mathcal{C}(s)$ est constant (et donc aussi les degré et genre des fibres).*

Une conséquence de ce théorème c'est que le schéma de Hilbert est cassé en morceaux correspondant à des degré et genre fixés :

$$\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}} = \coprod_{d,g} \mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}}^{nd+1-g}.$$

Exemple 2.2.
Voici deux exemples de familles plates de courbes. D'abord, la famille de 1.3.6, puis la suivante :
On part des deux droites disjointes Δ d'équations (X, Z) et D_λ d'équations $(Y, Z + \lambda T)$. Pour $\lambda \neq 0$ ces droites sont disjointes et les équations de la réunion C_λ sont $XY, YZ, X(Z + \lambda T), Z(Z + \lambda T)$. Si on fait tendre λ vers 0, ces équations deviennent XY, XZ, YZ, Z^2. On reconnaît l'exemple 1.3.6 : ensemblistement le schéma limite C_0 est la réunion des droites X, Z et Y, Z qui se coupent en $P = (0, 0, 0, 1)$, mais le point P est immergé dans C_0, cf. 1.3.6. Le degré et le genre sont constants[2] dans la famille et respectivement égaux à 2 et -1.

b) La variété (ou le schéma) de Chow.

Cette fois il s'agit de définir des familles de **cycles** de $\mathbf{P}^3$. Un cycle de dimension 1 de $\mathbf{P}^3$ est une combinaison linéaire finie $\sum_i n_i C_i$ à coefficients entiers positifs ou nuls, dans laquelle les C_i sont des courbes de $\mathbf{P}^3$, irréductibles et réduites.
On peut, là encore, définir des familles de cycles, cf. [K] I 3.10. Soit S une base normale (sinon il faut prendre des précautions). Pour se donner une famille de cycles sur S on considère un sous-schéma réduit $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}_S$ dont toutes les fibres sont de dimension 1. On appelle $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_r$ les composantes irréductibles de $\mathcal{C}$. On suppose qu'elles dominent des composantes de S. Une famille de cycles est alors une combinaison linéaire $\sum_i n_i \mathcal{C}_i$. Attention, la difficulté c'est que la fibre de la famille en un point $s \in S$ n'est pas nécessairement $\sum_i n_i \mathcal{C}_i(s)$. Si $\mathcal{C}_i(s)$ n'est pas réduit il faut le remplacer par le cycle fondamental associé (qui est une combinaison linéaire convenable des composantes de $\mathcal{C}_i(s)_{red}$, cf. *c)* ci-dessous). On obtient ainsi un foncteur représentable $\mathrm{Chow}_{\mathbf{P}}$, muni d'une famille universelle de cycles.
Je vous renvoie à [AN], [A], [B], [K] pour toutes précisions sur ce schéma. Les choses sont moins claires (en tous cas pour moi) que dans le cas du schéma de Hilbert. Certains auteurs mettent des restrictions sur les schémas qui paramètrent les familles (normal, voire semi-normal donc réduit, cf. [K]), d'autres sur l'espace dans lequel vivent les courbes (il doit être lisse dans [A]). Pour la plupart des auteurs Chow est réduit par définition (donc est une variété, cf. [B], [K]). On peut cependant définir une structure de schéma[3] sur Chow, cf. [A].

c) Le morphisme Hilbert $\rightarrow$ Chow.

On a un morphisme naturel du schéma de Hilbert dans celui de Chow. Sur les points rationnels il est défini de la façon suivante : soit C une courbe (pour l'instant au sens général de sous-schéma fermé de dimension 1), soient C_i ses composantes irréductibles **de dimension 1**, munies de leur structure réduite et soit η_i le point générique de C correpondant à C_i. On définit la multiplicité n_i de C en η_i comme la longueur de l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{C,\eta_i}$. Alors, le "cycle fondamental" associé à C n'est autre que $\sum_i n_i C_i$.

---

[2] Pour montrer que la famille est plate, comme on est sur l'anneau principal $\mathbf{C}[\lambda]$ ou un de ses localisés, il y a deux solutions. On peut montrer que λ n'est pas diviseur de 0 dans R/I_{C_λ}, c'est-à-dire que si on a $\lambda f \in I_{C_\lambda}$, alors on a $f \in I_{C_\lambda}$. Plus simplement, la conservation du degré et du genre assure à elle seule la platitude.

[3] Mais il faut reconnaître que la construction d'Angéniol est loin d'être simple !

La plupart des auteurs se contentent de définir un morphisme de Hilb_{red} dans Chow (cf. [B], [K]). On peut cependant définir ce morphisme en respectant les structures schématiques lorsqu'il y en a, cf. [A].

On montre que le morphisme Ψ : Hilb $\to$ Chow ainsi défini est un isomorphisme au voisinage des courbes lisses, cf. [A] (c'est vrai au niveau des structures réduites si l'on a défini Chow comme schéma réduit). Autrement dit, pour les courbes lisses, Chow et Hilbert c'est chow vert et vert chow.

d) Le jeu des erreurs.

J'essaie de répertorier ci-dessous les principales différences entre les schémas de Hilbert et de Chow.

i) Chow est grossier avec les structures multiples.
Par exemple, toutes les courbes de degré 2 et genre $-a$ rencontrées ci-dessus et d'équations $(X^2, XY, Y^2, XP+YQ)$, avec P, Q de degré a, par exemple $P = Z^a$ et $Q = T^a$, qui dans le schéma de Hilbert forment une famille de dimension $2a+1$, sont toutes envoyées sur le même cycle $2D$ où $D = (X, Y)$.

ii) Chow ne comprend rien aux points isolés ni immergés.
En effet, seules les composantes irréductibles de dimension 1 sont prises en compte dans les multiplicités et seules les multiplicités aux points génériques comptent. Ainsi la famille de l'exemple 2.2 devient simplement une famille qui part de deux droites disjointes et les transforme en deux droites concourantes.

iii) Chow conserve le degré mais pas le genre (sur une base connexe).
Montrons la conservation du degré. Il suffit de le faire pour une famille de cycles sur un anneau de valuation discrète A. On a alors un schéma $\mathcal{C}$ au-dessus de A dont les composantes dominent $\operatorname{Spec} A$, de sorte que $\mathcal{C}$ est plat sur A et on se ramène au cas où $\mathcal{C}$ est irréductible. Si ξ (resp. 0) est le point générique (resp. spécial) de A on a $\deg \mathcal{C}_\xi = \deg \mathcal{C}_0$ par platitude. Attention, si $\mathcal{C}_0$ n'est pas intègre, la valeur de la famille de cycles en 0 n'est pas $\mathcal{C}_0$ mais le cycle fondamental associé à $\mathcal{C}_0$, ce qui revient à oublier les composantes ponctuelles. Comme cette opération ne change par le degré, on a le résultat.
L'exemple 2.2 montre en revanche que le genre n'est pas constant puisque les droites disjointes sont de genre -1 et celles qui se coupent de genre 0.

iv) Les constructions de Hilbert et de Chow sont radicalement différentes.
• Pour Hilbert on associe à une courbe C de degré d et genre g l'espace vectoriel $H^0\mathcal{J}_C(n)$ des polynômes "schématiquement nuls" sur C (la partie de degré n de I_C). Pour $n \gg 0$ cet espace détermine C et c'est un sous-espace de dimension $\binom{n+3}{3} - nd - 1 + g$ de $H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$, autrement dit un point d'une grassmannienne. On représente ainsi Hilb comme sous-schéma fermé d'une grassmannienne. Par exemple, les cubiques gauches sont vues comme certains sous-espaces de dimension 3 de l'espace vectoriel de dimension 10 des quadriques de $\mathbf{P}^3$: $H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(2)$.

• Pour Chow on utilise les formes introduites par Cayley vers 1860. À une courbe intègre C de degré d on associe l'ensemble des droites de $\mathbf{P}^3$ qui rencontrent C. On montre que ces droites forment une hypersurface de degré d de la grassmannienne $G_{3,1}$, d'équation F_C. À un cycle quelconque on associe $\prod_i F_{C_i}^{n_i}$. Comme les hypersurfaces de degré fixé forment un espace projectif on obtient ainsi un plongement de Chow_d dans un projectif. (Précisément les hypersurfaces F de la grassmannienne qu'on obtient ainsi sont celles qui vérifient

$$\frac{\partial F}{\partial p_{12}}\frac{\partial F}{\partial p_{34}}-\frac{\partial F}{\partial p_{13}}\frac{\partial F}{\partial p_{24}}+\frac{\partial F}{\partial p_{14}}\frac{\partial F}{\partial p_{23}}=0$$

où les p_{ij} sont les coordonnées de Plücker). Si l'on préfère, on peut aussi représenter les courbes commes des hypersurfaces de bidegré (d,d) de $[(\mathbf{P}^3)^\vee]^2$ en remplaçant une droite par deux plans dont elle est intersection. On pose ensuite $\mathrm{Chow}=\coprod_d \mathrm{Chow}_d$.

v) Le morphisme de Hilbert vers Chow oublie les structures schématiques.
Comme pour la plupart des auteurs le schéma de Chow est réduit par définition, on voit disparaître dans le passage Hilbert-Chow les structures non réduites sur Hilb, structures que Mumford appelait “pathologies” mais dont on sait maintenant qu'elles sont le lot commun de la plupart des schémas de Hilbert, cf. [MDP3].

Conclusion.

Évidemment, comme je fréquente assidûment le schéma de Hilbert depuis de nombreuses années, j'ai une nette préférence pour lui, notamment parce qu'il permet de prendre en compte les phénomènes évoqués ci-dessus, que Chow traite de façon rudimentaire. En contrepartie, nous verrons qu'il s'agit d'un objet très compliqué ce qui explique que, parfois, le passage par Chow puisse être préférable. Par exemple, Kollár utilise l'existence de Chow_d et le fait qu'il n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles pour montrer l'existence de courbes rationnelles sur les variétés projectives de grande dimension, cf. [K] II 5.8 .

3. Deux outils essentiels : la liaison, le module de Rao.

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet en présentant notre premier outil pour l'étude des courbes gauches

a) Liaison.

Le point de départ de l'idée de liaison est la constatation qu'il y a des objets vraiment triviaux dans la théorie qui sont les intersections complètes (schématiques) de deux surfaces i.e. les courbes C dont l'idéal est engendré par deux générateurs. (Mario Fiorentini, plagiant Kronecker, dit que Dieu a donné les intersections complètes et que les géomètres ont fait le reste). En effet, ces courbes sont parfaitement connues aussi bien du côté de la cohomologie, que des résolutions, du schéma de Hilbert, etc. La relation de liaison[4] consiste essentiellement à considérer les intersections complètes comme négligeables :

Définition 3.1. *On dit que deux courbes C et Γ sans composante commune sont géométriquement* **liées** *si leur union schématique est une intersection complète X, c'est-à-dire si on a $I_X = I_C \cap I_\Gamma$. Si X est intersection de deux surfaces de degrés s et t on parle d'une liaison $s \times t$.*

Exemple 3.2. La cubique gauche C d'idéal $I_C = (XT-YZ, Y^2-XZ, Z^2-YT)$ est liée à la droite (X,Y) par l'intersection complète des surfaces $(XT-YZ, Y^2-XZ)$.

[4] Cette notion a été introduite par Max Noether en 1882, mais a connu une seconde jeunesse avec l'article [PS] de Peskine et Szpiro.

Remarques 3.3.
1) Étant donnée une courbe C contenue dans une intersection complète X on souhaiterait pouvoir définir **la** courbe Γ liée à C par X. Cela n'est pas possible si on tolère des courbes avec des composantes ponctuelles. En effet, si C et Γ sont liées par X, il en est de même de C et de $\Gamma \cup Z$ où Z est un sous-schéma fini quelconque de C. L'importance de l'outil liaison est telle dans la théorie que cela va nous conduire à prohiber les composantes ponctuelles dans la définition des courbes.
2) Si C et Γ sont sans composantes ponctuelles (et sans composante commune de dimension 1), on calcule facilement l'idéal de Γ à partir de celui de C, c'est le transporteur (cf. par exemple 3.2) :

$$(*) \qquad I_\Gamma = (I_X : I_C) = \{f \in R \mid fI_C \subset I_X\}$$

et on a la formule symétrique pour I_C. Cette formule permet de s'affranchir de la restriction concernant les composantes communes en définissant de manière générale le schéma Γ (algébriquement) lié à C par X par la formule $(*)$ ci-dessus. Comme on l'a vu, cette opération oublie les composantes ponctuelles.

b) Biliaison.

Nous verrons plus bas que la liaison comporte une part de dualité, ce qui fait que la relation de **biliaison** est plus intéressante encore : deux courbes sont dans la même classe de biliaison si l'on passe de l'une à l'autre par un nombre **pair** de liaisons. Les éléments minimaux de chaque classe de biliaison (au sens où le degré et le genre sont minimaux) sont appelés courbes **minimales** et elles sont très importantes.

Exemples 3.4.
1) La réunion disjointe de deux droites est une courbe minimale (non connexe). On a par exemple, dans sa classe, les courbes de degré 4 et genre 0 (lisses et connexes) obtenues par deux liaisons 2×2, 2×3.
2) Les courbes de degré 2 et genre -2 vues en 1.3.5 (non réduites) sont minimales dans leur classe de liaison. Leur classe contient notamment des courbes lisses de degré 14 et genre 24 obtenues par deux liaisons 2×3 et 3×6.

c) Usage de la liaison pour l'étude du schéma de Hilbert.

Lorsque des courbes sont liées beaucoup de propriétés (concernant les invariants, la cohomologie, les résolutions, etc.) se transmettent de l'une à l'autre, ce qui fait de la liaison un puissant moyen d'étude des courbes gauches, l'idée étant de ramener l'étude des courbes à celles de courbes de plus petits degrés.

En particulier, lorsque Γ et C sont liées il y a une sorte de diagramme d'incidence qui relie leurs schémas de Hilbert et qui permet souvent de calculer la dimension ou d'étudier la lissité de l'un en fonction de celle de l'autre.
Ce point est essentiel. Souvent on ne comprend les "pathologies" de certaines composantes du schéma de Hilbert des courbes lisses (par exemple le fait que certaines composantes soient non réduites, cf. $H_{14,24}$, Mumford, 1965) qu'en revenant aux courbes minimales de leur classe de biliaison. Or ces courbes minimales sont souvent non connexes, ou non réduites, cf. 3.4.

d) Conséquences sur le choix des courbes.

L'exemple précédent et beaucoup d'autres montrent que même si on s'intéresse en priorité aux courbes lisses, leur approche *via* liaison conduit à donner droit de cité aussi à des courbes plus générales qui vont apparaître comme courbes minimales des classes de biliaison. C'est ce fait qui nous incite à étendre la définition des courbes.
Par ailleurs, nous avons vu en 3.2 que l'usage de la relation de liaison conduisait à bannir les courbes possédant des composantes ponctuelles.
Nous pouvons donc (enfin !) définir les courbes qui nous intéressent vraiment, celles à qui nous donnerons simplement désormais le nom de courbes :

Définition 3.5. *On appelle courbe un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^3$, sans composantes ponctuelles, ni isolées, ni immergées. On note $H_{d,g}$ l'ouvert de $\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}}^{nd+1-g}$ formé des courbes au sens précédent et $H^0_{d,g}$ l'ouvert de $H_{d,g}$ formé des courbes lisses et connexes.*

Cette fois les courbes sont stables par liaison, et cette opération permet aussi de les "régulariser" (cf. [PS]) :

Proposition 3.6.
1) Un sous-schéma lié à une courbe au sens de la formule $(*)$ est une courbe et la relation de liaison entre courbes est symétrique.
2) Dans la classe de liaison (ou de biliaison) d'une courbe il y a toujours des courbes lisses et connexes.

f) L'outil numéro 2 : le module de Rao.

C'est le second outil fondamental (et peut-être pour nous le principal) pour étudier les courbes gauches. Il a été introduit par Hartshorne dans les années 1970 et étudié par Rao (cf. [R]). On associe à une courbe un nouvel invariant, algébrique cette fois, il s'agit du module $M_C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1 \mathcal{J}_C(n)$. C'est un $R = \mathbf{C}[X, Y, Z, T]$-module gradué qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls[5].

Exemples 3.7.
1) Le module de Rao est nul pour une droite, une conique, une courbe plane, plus généralement pour une intersection complète ou une courbe liée à une intersection complète comme la cubique gauche.
2) Le module de Rao de deux droites disjointes est réduit à $\mathbf{C}$ en degré 0 avec des multiplications triviales.
3) Le module de Rao de la courbe d'équations $X^2, XY, Y^2, XZ^a + YT^a$ est, à décalage près, le module $R/(X, Y, Z^a, T^a)$.

Le résultat suivant, dû à Rao (cf. [R]), explique l'importance du module qui porte son nom :

Théorème 3.8.
1) Deux courbes C et C' sont dans la même classe de liaison (resp. de biliaison) si et seulement si elles ont le même module de Rao à décalage et dualité près (resp. à décalage près).

[5] Cette assertion serait fausse si l'on tolérait des courbes avec des composantes ponctuelles. En effet, ces courbes vérifient $H^0 \mathcal{O}_C(n) \neq 0$ (et donc aussi $H^1 \mathcal{J}_C(n) \neq 0$) pour tout $n < 0$. Ce point est une autre raison technique fondamentale qui justifie notre définition des courbes.

2) Tout module de longueur finie sur R est, à décalage près, le module de Rao d'une courbe lisse.

De plus, on connaît (cf. [MDP1]) un algorithme pour déterminer les courbes minimales de module donné, puis pour trouver ensuite les autres courbes de la classe.

4. Le schéma de Hilbert des courbes de $\mathbf{P}^3$.

a) Problématique.

Nous en venons à l'étude du schéma de Hilbert. Comme pour n'importe quel schéma on peut poser à son sujet les questions usuelles de la géométrie algébrique : est-il irréductible ? ou, à défaut, connexe ? est-il lisse ? ou, à défaut, réduit ? quelle est sa dimension ?

Ces problèmes remontent essentiellement au siècle dernier (un prix pour la classification des courbes gauches, offert par Steiner a été partagé en 1882 entre Halphen et Noether). Voilà le programme proposé par Halphen à l'époque :
Énumérer, définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre, plus générale.
Dit en termes modernes, il s'agit essentiellement de décrire les composantes irréductibles de $H_{d,g}$. En l'an 2001 on est encore loin du compte (certains esprits pessimistes pensent qu'il y a encore pour 1000 ans de travail !)

Bien entendu, et nous allons le voir, les problèmes sont différents suivant le type de courbes qu'on étudie.

b) Irréductibilité.

Le problème de l'irréductibilité est le plus important car il gouverne tous les autres. D'abord, on ne se pose la question de la connexité que lorsque le schéma est réductible. Ensuite, la lissité ne subsiste pas en général si le schéma est réductible car les points situés à l'intersection de deux composantes sont nécessairement singuliers. Enfin, pour la dimension, il n'y pas beaucoup d'espoir de calcul si $H_{d,g}$ est très réductible (car la dimension est le maximum des dimensions des composantes).

Dans le cas des courbes lisses et connexes ($H^0_{d,g}$) on a un résultat (annoncé par Severi en 1925, rigoureusement prouvé par Ein en 1985) quand le genre est petit par rapport au degré :

Théorème 4.1. *Si on a $g \leq d-3$, $H^0_{d,g}$ est irréductible et de dimension $4d$. Il est lisse pour $g \leq d/2$.*

Comme genre des courbes lisses de degré d peut aller jusqu'à environ $d^2/6$ (c'est un résultat annoncé par Halphen en 1882 mais prouvé seulement cent ans plus tard par Gruson et Peskine, cf. [GP]) on voit qu'il ne s'agit que d'un résultat très partiel, d'ailleurs le théorème est faux si g est grand, par exemple $H^0_{9,10}$ est réductible et même non connexe (il a deux composantes : les intersections complètes 3×3 et les courbes de bidegré $(3,6)$ sur une quadrique).

Le problème de déterminer les composantes irréductibles de $H^0_{d,g}$ est très complexe. Ainsi, on a montré récemment (cf. [EHM] ou [G2]) que le nombre de composantes irréductibles pouvait croître exponentiellement en d (par exemple être de l'ordre de 2^d). Dans ce cas le schéma de Hilbert n'est pas lisse et sa dimension est beaucoup plus grande que $4d$.

Pour les courbes générales, on montre que $H_{d,g}$ n'est presque jamais irréductible ni réduit ([MDP3], 1996).

c) La philosophie de [MDP].

Pour aborder un objet aussi complexe, nous avons proposé, Mireille Martin-Deschamps et moi-même, une stratégie.
Comme $H_{d,g}$ n'est pas irréductible, on cherche à introduire, selon l'idée d'Halphen, des invariants pour séparer les composantes. Des candidats en ce sens sont les dimensions des espaces de cohomologie $H^i\mathcal{J}_C(n)$ (ainsi, les deux composantes de $H_{9,10}$ sont séparées par les valeurs de $h^0\mathcal{J}_C(2)$ et $h^2\mathcal{J}_C(2)$). On commence donc par stratifier le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ par les schémas $H_{\gamma,\rho}$ sur lesquels les $h^i\mathcal{J}_C(n)$ sont constants (les fonctions γ et ρ indiquent ces dimensions). Puis, pour étudier les schémas $H_{\gamma,\rho}$, on utilise le morphisme $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$ qui à une courbe C associe son module de Rao M_C, morphisme à valeurs dans l'espace des modules de dimensions données. Ce morphisme permet de scinder l'étude de $H_{d,g}$ en trois étapes :
1) l'étape du bas, c'est-à-dire l'étude de E_ρ,
2) l'étape intermédiaire, c'est-à-dire l'étude de Φ,
3) l'étape du haut qui consiste à recoller les informations obtenues sur les $H_{\gamma,\rho}$ pour passer à $H_{d,g}$.

L'étape intermédiaire est résolue dans [MDP1] : Φ est lisse et irréductible et on sait calculer la dimension de ses fibres, de sorte que tout résultat sur E_ρ (irréductibilité, lissité, etc.) se transporte en principe à $H_{\gamma,\rho}$.
Malheureusement, contrairement à nos espoirs initiaux, l'étape du bas s'est révélée très difficile. En particulier, E_ρ n'est presque jamais irréductible[6], cf. [MDP2] et [G1], et c'est ce qui fait que $H_{\gamma,\rho}$ ne l'est pas non plus. De plus, dans le cas où E_ρ n'est pas irréductible, la situation devient vite compliquée. On montre, par exemple, que $E_{2,2,2}$ (qui correspond à $\rho(n) = h^1\mathcal{J}_C(n) = 2$ pour $n = 0, 1, 2$) a déjà 6 composantes irréductibles, cf. [MDP2].

Il n'empêche que cette méthode a déjà permis d'obtenir quelques succès dans la classification, cf. [MDP3] ou [AA].

d) Une question ouverte : la connexité de $H_{d,g}$.

À l'heure actuelle, le problème le plus intéressant concernant $H_{d,g}$ est, à mon avis, celui de la connexité. Il faut faire très attention ici à la nature des courbes dont on parle. En effet, Hartshorne a montré en 1965 le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Le schéma de Hilbert* $\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}}^{nd+1-g}$ *est connexe.*

Il s'agit ici des courbes au sens général de sous-schémas de dimension 1 (donc des courbes avec des points et c'est essentiel !)

Du côté du schéma Chow_d des cycles de degré d la situation est plus triviale encore :

[6] Il est réductible dès que la largeur de ρ, c'est-à-dire le nombre de valeurs non nulles consécutives, est ≥ 4.

Théorème 4.3. *Le schéma* Chow_d *est connexe (indépendamment du genre).*

Démonstration.
La démonstration qui suit prouve 4.3 (et essentiellement aussi 4.2). Soit C une courbe de degré d et genre g. On choisit un point m n'appartenant pas à C et un plan P ne contenant pas m et on considère la projection de centre m de C sur P. On construit alors une famille C_λ de courbes (paramétrées par un ouvert de la droite affine ou par un anneau de valuation discrète A d'uniformisante λ) qui joint C à sa projection Γ. Si on prend $m = (0, 0, 0, 1)$ et P d'équation $T = 0$, C_λ est l'ensemble des points $(x, y, z, \lambda t)$ avec $(x, y, z, t) \in C$. En termes d'idéaux, cela signifie que si l'on a $I_C = (f_1, \cdots, f_r)$ l'idéal I_λ de C_λ est $(f_1^\sharp, \cdots, f_r^\sharp)$ où l'on a posé, pour $f(X, Y, Z, T) = a_n(X, Y, Z)T^n + a_{n-1}(X, Y, Z)T^{n-1} + \cdots + a_0(X, Y, Z)$, $f^\sharp(X, Y, Z, T) = a_n(X, Y, Z)T^n + \lambda a_{n-1}(X, Y, Z)T^{n-1} + \cdots + \lambda^n a_0(X, Y, Z)$.
Attention, cet idéal ne définit pas une famille plate sur A. Cependant, comme il est plat au point générique ξ, on peut prolonger la famille C_ξ en une famille plate sur A dont on note C_0 la courbe spéciale (c'est le fait que le schéma de Hilbert est propre). Cette famille est donc dans le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}_{\mathbf{P}}^{nd+1-g}$. Dans la pratique, pour obtenir une famille plate il faut supprimer la torsion du quotient $A[X, Y, Z, T]/I_\lambda$ et cela revient à ajouter à I_λ les polynômes P qui sont tels que $\lambda^k P$ soit dans I_λ. On obtient ainsi un idéal J_λ avec $I_\lambda \subset J_\lambda$.

L'hypothèse que m n'est pas sur C signifie que l'un des f_i a un terme qui est un monôme T^n (sans termes en X, Y, Z). Cela implique que le polynôme $f_i^\sharp$ se réduit en T^n au point spécial, donc que la courbe $C_{0,red}$ est dans le plan $T = 0$. Mais alors, dans le schéma de Chow, on a une famille qui joint C à une courbe plane (une certaine combinaison linéaire des composantes de $C_{0,red}$) et comme le schéma des courbes planes de degré d est irréductible on a le résultat.

On peut préciser exactement la courbe C_0 (au moins dans le cas où C est lisse). On sait que si on choisit un centre de projection assez général, la projection Γ de C sur le plan est une courbe plane qui n'a que des points doubles ordinaires (correspondant aux sécantes à C qui passent par m), en nombre n. La courbe plane Γ obtenue est de genre arithmétique $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$ mais de genre géométrique $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2} - n$ et ce nombre est égal à g car la projection est birationnelle. La courbe C_0, elle, doit être de genre arithmétique g par platitude. On voit facilement que C_0 n'est autre que Γ mais avec un point immergé en chacun de ses n points singuliers.

Exemple 4.4. Si on part de la cubique gauche ($d = 3, g = 0$) d'idéal

$$I_C = (T^2 + XT - Z^2, YT - XZ, XT + X^2 - YZ),$$

l'idéal I_λ est donné par $I_\lambda = (T^2 + \lambda XT - \lambda^2 Z^2, YT - \lambda XZ, XT + \lambda(X^2 - YZ))$. Il y a dans cet idéal le polynôme $\lambda(X^2Y + X^2Z - Y^2Z) = -X(YT - \lambda XZ) + Y(XT + \lambda(X^2 - YZ))$, de sorte qu'il faut ajouter $X^2Y + X^2Z - Y^2Z$ pour obtenir le platifié J_λ. Pour $\lambda = 0$ on a alors $I_{C_0} = (X^2Y + X^2Z - Y^2Z, XT, YT, T^2)$. On reconnaît bien l'idéal de la cubique plane $(X^2Y + X^2Z - Y^2Z, T)$ ($d = 3, g = 1$)) avec un point immergé en le point singulier $(0, 0, 1, 0)$ pour rétablir le genre 0.

Dans le cas lisse, le schéma de Hilbert n'est pas connexe en général comme en témoigne le cas de $H^0_{9,10}$. En fait, le problème n'est vraiment intéressant que pour les courbes au sens de 3.5. Dans ce cas, je proposerais volontiers la conjecture suivante (cf. HMDP) :

Conjecture 4.5. *Le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est connexe.*

Cette conjecture a une histoire assez amusante. En effet, dans un premier temps, nous avions cru prouver (vers 1994-95) que $H_{d,g}$ n'était “presque” jamais connexe. La démonstration était écrite, soumise à une excellente revue, contrôlée par un rapporteur, acceptée, et pourtant fausse ! Passant d'un extrême à l'autre, nous cherchons maintenant à montrer que le schéma de Hilbert est toujours connexe (enfin, peut-être ...).

C'est en étudiant le schéma de Hilbert $H_{4,0}$ que nous avons découvert l'erreur. Ce schéma a deux composantes H_1 et H_2 : les courbes de type (3,1) sur une quadrique et des réunions disjointes d'une cubique plane et d'une droite et il est connexe, contrairement à ce que nous pensions alors.
Attention, il s'agit de montrer la connexité pour les “vraies” courbes (sans points) et la méthode de 4.3 ne s'applique pas. Dans ce cas on peut toutefois montrer la connexité de $H_{4,0}$ de manière géométrique. C'est la méthode dite “des petits dessins” de R. Hartshorne.
On procède de la façon suivante : d'un côté on part d'une courbe de H_1 formée de trois droites disjointes D_1, D_2, D_3 et d'une droite Δ coupant chacune des D_i. On la déforme en une réunion de deux structures doubles, l'une de genre 0 provenant de $D_3 \cup \Delta$, l'autre de genre -1 provenant de $D_1 \cup D_2$, le schéma intersection étant de longueur 2. De l'autre côté, on part d'une courbe de H_2, réunion de trois droites D_1, D_2, Δ d'un plan P et d'une droite D_3 qui ne les rencontre pas. On la déforme en une courbe similaire, la structure double de genre 0 venant de $D_1 \cup D_2$, celle de genre -1 de $D_3 \cap \Delta$.

Malheureusement, cette méthode a ses limites. Par exemple, elle ne fonctionne pas pour relier une courbe $5, 2$ sur une quadrique et la réunion disjointe d'une quartique plane et d'une droite. On peut cependant montrer, par d'autres méthodes, que ces courbes sont dans la même composante connexe de $H_{5,2}$.

A l'heure actuelle on ne sait toujours pas si le schéma de Hilbert est connexe (dans le cas des courbes sans points). Tous les résultats obtenus vont dans ce sens. Ils l'ont été par trois types de méthodes :
- un travail direct sur les équations (cf. $H_{4,0}$, ou extrémales-sous-extrémales, etc.)
- la méthode “des petits dessins”,
- la méthode des triades.

Il s'agit d'un outil plus puissant introduit dans [HMDP]. Cet outil correspond à la philosophie de [MDP]. Pour construire une famille de courbes paramétrée par un anneau de valuation discrète A on construit, au niveau des modules de Rao, une famille de modules de dimensions variables, puis on passe aux courbes. La difficulté, sur les modules, c'est que la famille n'est pas donnée, en général par un R_A-module mais par un complexe.
Pour montrer la connexité, la méthode consiste à aller vers les courbes extrémales : celles qui ont le module de Rao le plus grand possible. J'ai récemment montré ainsi, par spécialisations successives, qu'une classe importante de courbes était dans la composante des extrémales, cf. [P]. Un bémol toutefois : dans le cas de 4 droites sur une quadrique il semble bien qu'on ne peut pas spécialiser directement ces courbes

pour aller vers les extrémales (il faut d'abord passer par 4 droites génériques, non sur une quadrique). La question est donc encore tout à fait ouverte.

5. Références

[A] Angéniol B., Familles de cycles algébriques. Schéma de Chow, Lecture Notes in Math. 896, Springer Verlag (1981).

[AA] Aït-Amrane S., Sur le schéma de Hilbert $H_{d,(d-3)(d-4)/2}$, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[AN] Andreotti A. et Norguet F., La convexité holomorphe dans l'espace des cycles d'une variété algébrique, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. Mat., III Ser. 21, 31-82 (1967).

[B] Barlet D., Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie, *in* Séminaire François Norguet, Lecture Notes in Math. 482, 1-158, Springer Verlag (1975).

[EHM] Ellia Ph., Hirschowitz A., Mezzetti E., On the number of irreducible components of the Hilbert scheme of smooth space curves, Int. J. Math. 3, No 6, 799-807, (1992).

[G1] Ginouillac S., Sur les schémas des modules de Rao de longueur 3, note CRAS, t. 320, Série I, 1327-1330, 1995.

[G2] Ginouillac S., Sur le nombre de composantes du schéma de Hilbert des courbes ACM de $\mathbf{P}^3_k$, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math. 329 (1999), 857-862.

[GP] L. Gruson et C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 15, 1982, 401–418.

[HMDP] Hartshorne R., Martin-Deschamps M. et Perrin D., Triades et familles de courbes gauches, Math. Ann. 315, 397-468 (1999).

[K] Kollár J., Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse der Math., Springer Verlag (1995).

[MDP 1] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Sur la classification des courbes gauches, Astérisque, Vol. 184-185, 1990.

[MDP 2] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Courbes gauches et Modules de Rao, J. reine angew. Math. 439 (1993), 103-145.

[MDP3] Martin-Deschamps M. et Perrin D., Le schéma de Hilbert des courbes localement de Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4 série, t. 29, 757-785, 1996.

[P] Perrin D., Un pas vers la connexité du schéma de Hilbert, les courbes de Koszul sont dans la composante des extrémales, en préparation.

[PS] C. Peskine et L. Szpiro, Liaison des variétés algébriques, Invent. Math., 26, 1974, 271–302.

[R] A. P. Rao, Liaison among curves in $\mathbf{P}^3$, Invent. Math., 50, 1979, 205–217.