Sur la classification des courbes gauches

Daniel PERRIN (Exposé au CIEEST)

0. Introduction.

Cet exposé concerne la classification des courbes gauches. Il est bâti autour de quatre thèmes : les objets, les problèmes, les résultats, les questions ouvertes.
Le sujet abordé se place dans le domaine de la géométrie **algébrique**. Je donnerai une idée des problèmes dont s'occupe cette partie des mathématiques, mais pas du tout de ses méthodes qui sont très algébriques et nécessitent beaucoup de préliminaires[1].

1. Les objets.

a) Courbes gauches.

Une courbe gauche[2] est une courbe de l'espace à trois dimensions, qui est algébrique, c'est-à-dire définie par des équations polynomiales. C'est le cas par exemple, du cercle $X^2 + Y^2 = 1$, de l'hyperbole $XY - 1 = 0$, plus généralement des courbes planes $F(X, Y) = 0$.
C'est aussi le cas des courbes de l'espace, mais, bien entendu, dans l'espace il faut **au moins deux équations** pour définir une courbe (une équation définit une surface). On a ainsi, par exemple, la fenêtre de Viviani[3], intersection de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$ et du cylindre $X^2 + Y^2 - X = 0$, ou la cubique gauche paramétrée par $x = t, y = t^2, z = t^3$, qui a pour équations $Y - X^2, Z - X^3$ en affine.

Il y a plusieurs niveaux de généralité possibles pour parler de courbes : on peut se limiter aux courbes lisses (i.e. sans points singuliers, par exemple nœud ou rebroussement) et demander en plus qu'elles soient connexes. On peut, au contraire, tolérer des courbes singulières, voire non connexes (réunions disjointes de courbes algébriques, par exemple deux ou plusieurs droites "gauches"), ou seulement réductibles (réunions, pas nécessairement disjointes, de courbes algébriques, par exemple plusieurs droites planes), non réduites (avec des structures multiples, du type $Y^2 = 0$), avec ou sans points isolés ...
En fait, une idée importante c'est que, même si on s'intéresse aux courbes lisses, **il est utile de regarder des courbes plus générales**, (on verra tout à l'heure comment déformer des courbes en réunions de droites ; une autre idée essentielle est la liaison, un peu moins élémentaire). En revanche, on écarte absolument les

[1] Dans l'exposé oral il y avait de nombreux dessins qui n'ont pas été reproduits ici.
[2] Ce mot est utilisé par opposition à plane, mais on englobe les courbes planes dans les courbes gauches
[3] Il est commode de dessiner cette courbe sur un ballon.

courbes contenant des points isolés (ou immergés) qu'on ne considère pas comme de vraies courbes (et il y a, en plus, de fortes raisons techniques). On verra plus loin les conséquences de ce choix.

b) Points ou équations.

Il y a **deux pôles** un peu antagonistes en géométrie algébrique. On peut s'occuper en priorité, s'agissant, par exemple, d'une courbe algébrique C :
• Des points de C.
Par exemple : en géométrie réelle on s'intéresse au nombre de composantes connexes de C, cf. $Y^2 - X^3 + X = 0$. En géométrie arithmétique (i.e. sur $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Z}$ ou un corps fini), on compte le nombre de points des courbes, cf. codes, courbes elliptiques, théorème de Fermat, etc.
• Des équations de C.
C'est le **point de vue dual** (les équations correspondent aux surfaces contenant C, cf. cubique ou fenêtre, au lieu des points contenus dans C). En particulier une notion importante est celle de plus petite surface (au sens de surface de plus petit degré) contenant une courbe.

Dans notre domaine c'est le second aspect qui est privilégié.

c) L'exemple de Bézout.

Comme on privilégie le point 2) on s'arrange pour que le point 1) ne pose pas de problème : **les points, comme l'intendance, doivent suivre**. Voici un exemple de ce principe.

Si on étudie les intersections d'une conique (penser à une ellipse) et d'une droite du plan on voit qu'on a (souvent) deux points d'intersection. Avec une droite et une cubique on a trois points, avec deux coniques, quatre points. On aurait bien envie d'avoir un théorème (dit de Bézout) qui affirme que deux courbes planes C et C', de degrés d et d', ont toujours dd' points d'intersection : c'est typiquement un théorème qui privilégie les équations. Le problème c'est qu'il y a manifestement des obstructions, à cause des points, à la validité de cette assertion :

a) Si on travaille sur le corps des réels on sait bien que l'assertion n'est pas toujours vraie. Par exemple le cercle $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ et la droite $X = 2$ ne se coupent pas dans $\mathbf{R}^2$. En revanche, dans $\mathbf{C}^2$ ils ont bien deux points d'intersection : $(2, \mp i\sqrt{3})$. On supposera donc, pour avoir le théorème idéal que le corps de base est $\mathbf{C}$.
b) Un autre contre-exemple essentiel au théorème idéal est celui de deux droites parallèles, ou d'une hyperbole et de son asymptote qui n'ont pas de points d'intersection. Là encore on voit bien ce qu'il faut faire pour surmonter cette difficulté : introduire des points à l'infini. Pour nous, cela signifiera qu'il faut travailler dans l'espace projectif et pas dans l'espace affine.
c) Enfin, si l'on reprend le cas d'un cercle et d'une droite il est encore un cas où le nombre de points d'intersection n'est pas égal à deux, c'est le cas où la droite est tangente au cercle : les courbes $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ et $X = 1$ se coupent en l'unique point $(1, 0)$. Cependant si on résout le système formé par ces deux équations on tombe sur la relation $y^2 = 0$, de sorte que la solution $y = 0$ est racine double : le point d'intersection est multiple et il doit compter pour deux.
Avec toutes ces précautions on a alors le résultat idéal attendu (théorème de Bézout).

On notera que le fait de se placer sur $\mathbf{C}$ et en projectif a de fortes **conséquences** :
1) dans le plan deux courbes se coupent toujours,
2) dans l'espace ce n'est plus vrai (penser à deux droites non coplanaires), mais une courbe rencontre toujours une surface.

2. Les problèmes.

a) Classification : le cadre mathématique général.

Que signifie le mot **classification** ? De façon générale, en mathématiques, cela consiste, dans un premier temps, à repérer des **invariants** (notamment numériques) des objets étudiés.
Pour donner un exemple plus accessible, dans la théorie des groupes finis, l'invariant le plus simple est le cardinal $|G|$ du groupe et de même dans la théorie des corps finis.

Une fois repérés ces invariants se posent deux **problèmes** naturels :
Problème A : déterminer quels sont les invariants possibles (ou encore l'image de l'application qui à un objet associe ses invariants).
Dans le cas des groupes finis il est clair que tous les entiers > 0 conviennent (penser au groupe des rotations d'un polygone régulier à n côtés), de sorte que la solution de ce problème est évidente. Pour le cas des corps en revanche on sait qu'il n'y a de corps fini qu'à p^n éléments, avec p premier (il n'y a donc pas de corps à 6 éléments, par exemple).

Problème B : pour un (ou des invariants) fixés, déterminer (ou classifier à nouveau en un sens à préciser) tous les objets admettant ces invariants. (ou encore, décrire les fibres de l'application précédente)
Cette fois, dans le cas des groupes finis, il s'agit de déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes finis de cardinal donné, problème totalement inabordable, en général. En revanche, pour les corps finis, il y a un seul corps à $q = p^n$ éléments, à isomorphisme près.

b) Invariants des courbes : le degré et le genre.

Dans le cas des courbes gauches, on dispose, depuis plus d'un siècle, de deux invariants bien connus : le degré et le genre.

Le **degré** d d'une courbe C (qu'on peut faire remonter à Descartes) a une interprétation géométrique simple, c'est le nombre de points d'intersection de la courbe C avec un plan général. Par exemple si C est plane, définie par $Z = 0$ et $P(X, Y) = 0$, c'est le degré de P.
Pour une courbe "intersection complète" de deux surfaces de degrés s et t, le degré est st, cela résulte de Bézout. Par exemple, si on coupe la fenêtre de Viviani par un plan vertical, l'intersection avec le cylindre est formée de deux droites parallèles, celle avec la sphère est un cercle et on obtient 4 points.
Pour la cubique gauche, un petit calcul avec la paramétrisation montre que le degré est 3. Il en résulte que C n'est pas définie par deux équations en projectif, sinon elle serait plane (les équations affines données plus haut définissent C plus la droite triple à l'infini $XT, T^2, X^2 - YT$).

Pour le **genre** les choses sont un peu plus compliquées. On peut faire remonter cette notion à Riemann, vers 1850.

La courbe C étant une courbe (lisse) **complexe** est de dimension 1 sur $\mathbf{C}$, donc de dimension 2 sur $\mathbf{R}$, c'est donc, en fait, une surface réelle, compacte car on est en projectif et orientable (car on est sur $\mathbf{C}$). On montre qu'elle est "homéomorphe" (de même forme, au sens topologique, et mieux...) à une sphère ou un tore ou à un tore à g trous, le g en question étant justement le genre de C (en fait la définition utile dans mon domaine n'est pas celle-là, mais elle est trop compliquée à dire ici).

Un exemple : les courbes planes.

Supposons d'abord $d = 1$. La droite affine sur $\mathbf{C}$ c'est le plan sur $\mathbf{R}$. Comme il s'agit de la droite projective complexe, on doit ajouter un point à l'infini. Mais, un plan plus un point à l'infini c'est une sphère, cf. projection stéréographique, donc le genre est 0.
Supposons maintenant $d = 2$, de sorte que C est une conique plane. Pour calculer le genre de C on utilise le principe suivant :
Principe fondamental : le genre ne change pas dans une famille "raisonnable", même si les courbes ne sont pas lisses.
Côté topologique une telle famille est obtenue par déformation, côté algébrique en bougeant les équations : par exemple, la famille d'hyperboles $XY - \lambda = 0$, pour $\lambda \neq 0$, dégénère en les deux droites $XY = 0$. (Mathématiquement il s'agit d'une famille plate, mais c'est assez minime comme hypothèse : algébrique et pas de saut de dimension des fibres et bien sûr le genre est le genre arithmétique.)
Attention, les arguments qui vont suivre sont très intuitifs. On a deux droites (projectives complexes, donc deux sphères) se coupant en un point. On déforme le tout en une sphère. Le genre est donc encore $g = 0$.

Pour $d = 3$ on a une cubique plane que l'on déforme en trois droites formant triangle. On a donc trois sphères avec 3 points d'intersection que l'on déforme en un tore, d'où $g = 1$.

On montre, de manière analogue :

Lemme.
1) Une réunion de deux surfaces S_1 et S_2 de genres g_1 et g_2 avec n points d'intersection est de genre $g = g_1 + g_2 + n - 1$.
2) Une réunion de d droites avec n points d'intersection (simples) est de genre $n + 1 - d$.

(Le point 2) résulte de 1) par récurrence.)

Corollaire. *Une courbe plane de degré d est de genre $(d - 1)(d - 2)/2$. Les genres possibles sont donc : 0,1,3,6,10, etc. (les coefficients binômiaux $\binom{d-1}{2}$).*

(On se ramène au cas de d droites générales. Elles ont $n = d(d - 1)/2$ points d'intersection (attention on est en projectif), d'où le résultat. On note que c'est aussi le nombre de régions "bornées".

c) Le problème A pour le degré **ou** *le genre.*

Tous les degrés ≥ 1 sont atteints par les courbes planes. Par exemple $X^d + Y^d - 1 = 0$ est une courbe (lisse connexe) de degré d. Bien entendu on a aussi des courbes de l'espace de tout degré d.
Pour le genre, c'est un peu plus compliqué (et ça dépend ce qu'on appelle courbes).

On a vu que dans le plan il n'y a pas tous les genres, par exemple il n'y a pas de courbe de genre 2. Pourtant on voit bien comment dessiner une courbe de genre 2 avec 5 droites se coupant en 6 points . Mais ce dessin n'est pas possible dans le plan projectif : deux droites se coupent toujours.
On passe donc dans l'espace. **La surface la plus simple après le plan est la quadrique** Q, surface de degré 2. Sur une telle surface on a deux familles infinies de génératrices (en réel, pas toujours, mais en complexes, si). Ce sont des droites, avec de belles propriétés : deux droites d'une même famille ne se coupent jamais, deux droites de familles distinctes se coupent toujours. On a donc une courbe de degré 5 et genre 2 en prenant 2 droites d'une famille et 3 de l'autre. De plus, on sait "lissifier" cette courbe.
Plus généralement, on a sur Q des courbes de type a, b (a droites d'une famille, b droites de l'autre), lissifiables si $a, b > 0$. On a $d = a + b$, $g = (a - 1)(b - 1)$.
Moralité, si on prend $a = 2$, $b = g + 1$ on a une courbe (lisse connexe) de genre g et de degré $g + 2$.

Remarques.
1) Attention à ce problème de lissification. L'union d'une quartique plane et d'une droite se coupant en un point est une courbe de degré 5 et genre 3 non lissifiable.
2) Les courbes non connexes peuvent être de genre < 0. Par exemple d droites disjointes ont pour genre $-(d - 1)$.

c) Le problème A pour le degré **et** *le genre.*

En vérité, le problème sérieux est pour le couple (d, g).
Le problème A consiste à dire quels sont les couples (d, g) qui correspondent effectivement à des courbes (lisses connexes). La réponse est connue depuis 1882 (Halphen), mais une démonstration convaincante n'a été fournie qu'un siècle plus tard par Gruson et Peskine (1982).

Théorème. *Les couples (d, g) possibles pour degré et genre sont les suivants :*
1) Le cas des courbes planes : $\left(d, \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}\right)$, (on a $g \sim d^2/2$)
2) Le cas des courbes sur les quadriques (on a $g \leq d^2/4$)
3) Les couples (d, g) avec $g \leq 1 + \dfrac{d(d-3)}{6}$ ($g \leq d^2/6$).

Exemple. Pour $d = 20$ on a les courbes planes, $g = 171$, celles sur les quadriques, $g = 81, 80, 77, 72, 65, 56, ...$, et les autres : tous les genres $g \leq 57$.

Remarques.
1) Halphen prétendait qu'on pouvait trouver tous les (d, g) sur des surfaces cubiques. Grusson et Peskine ont montré que c'est faux, mais ce n'est pas évident ! Ils construisent les courbes cherchées sur des surfaces de degré 3 (en utilisant les 27 droites tracées sur une telle surface) mais aussi 4.
2) Si on prend des courbes (sans points) on a tous les genres $g \leq (d-2)(d-3)/2$ (y compris $g < 0$, penser aux d droites, genre $-d + 1$).

d) Le problème B pour degré et genre.

Le problème B consiste ensuite à décrire l'ensemble (on dit le schéma de Hilbert) $H_{d,g}$ des courbes de degré d et de genre g fixés. Il s'agit d'abord de comprendre ce que signifie décrire. **Une idée importante est qu'on peut munir cet**

ensemble d'une structure de variété algébrique (ou plutôt de schéma, cf. Grothendieck, 1960). Les anciens considéraient cela comme évident, pourtant c'est loin d'être le cas et il y a des surprises (par exemple $H_{d,g}$ peut ne pas être réduit).

Exemple. La famille des droites de $\mathbf{P}^3$ est ce qu'on appelle une grassmannienne, elle est de dimension 4.

On peut alors se poser nombre de questions sur ce schéma : est-il réductible ? (i.e. réunion de deux morceaux algébriques, penser à une réunion de deux plans ou de deux surfaces), ou, au moins, connexe ? a-t-il des points singuliers ? (penser au sommet d'un cône), quelle est sa dimension ?
On notera que les problèmes sont différents suivant le type de courbes qu'on accepte.

Ces problèmes qui remontent essentiellement au siècle dernier (un prix pour la classification des courbes gauches a été offert en 1882 par Steiner et partagé entre Halphen et Noether) sont encore largement ouverts actuellement (certains esprits pessimistes pensent qu'il y a encore pour 1000 ans de travail !)

e) Résultats.

• *Irréductibilité*
C'est sans doute le problème le plus important car il gouverne les autres.

Dans le cas lisse et connexe ($H^0_{d,g}$) on a un résultat quand le genre est petit par rapport au degré :

Théorème. *(Severi 1920, Ein 1985) Si on a $g \leq d-3$, $H^0_{d,g}$ est irréductible.*

Comme on sait que le genre peut aller jusqu'à $d^2/6$ on voit qu'il ne s'agit que d'un résultat très partiel, d'ailleurs le théorème est faux si g est grand, ainsi par exemple $H_{9,10}$ est réductible. Il y a deux types de courbes $(9,10)$, donc deux composantes irréductibles, les unes de type $(6,3)$ sur la quadrique, les autres, intersections complètes 3×3. Faire un dessin avec des réunions de 9 droites, avec 18 points d'intersection, mais pas répartis de la même manière : les unes avec 3 droites à 6 points et 6 droites à 3 points, les autres toutes à 4 points.
En tous cas, le problème est très complexe. Ainsi, on a montré récemment (Ellia, Hirschowitz et Mezzetti) que le nombre de composantes irréductibles pouvait croître exponentiellement en d (par exemple être de l'ordre de 2^d).

Un exemple plus simple (mais avec des courbes non connexes) est celui de $H_{4,0}$. Il y a deux composantes : les courbes de type (3,1) sur la quadrique et des réunions disjointes d'une cubique plane et d'une droite. C'est un schéma de dimension 16.

Pour les courbes générales, on a montré que $H_{d,g}$ n'est presque jamais irréductible ([MDP], 1996).

Pourquoi l'irréductibilité est-elle essentielle :
D'abord, on ne se pose la question de la connexité que lorsque le schéma est réductible. Ensuite, la lissité ne subsiste pas en général si le schéma est non irréductible. (On sait, pour les lisses, que le schéma de Hilbert $H^0_{d,g}$ est lisse si $g \leq d/2$, mais il y a des contre-exemples sinon, cf. Mumford, 1964. Pour les générales : $H_{d,g}$ n'est presque jamais lisse, cf. [MDP], 1996).

Pour la dimension, il n'y pas beaucoup d'espoir de calcul si $H_{d,g}$ n'est pas irréductible (la dimension est le Max des dimensions des composantes). Si $g \leq d-3$ la dimension est $4d$ (sinon elle est $\geq 4d$ et ça peut être beaucoup plus grande, cf. 16,33 ou planes, ou ACM).

Conclusion : lissité et dimension sont inabordables en général.

4. Problèmes ouverts.

a) Le programme d'Halphen.

Le voilà tel qu'il est formulé en 1882 :
Énumérer, définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre, plus générale.
Dit en termes modernes, il s'agit essentiellement de décrire les composantes irréductibles de $H_{d,g}$.
À l'aube de l'an 2000 on est loin du compte ! MMD et moi-même avons proposé une nouvelle l'approche qui scinde le problème en trois étapes, et permet de formuler un nouveau programme à la Halphen. Cependant, si l'étape intermédiaire est assez facile, les autres sont très coriaces.

b) La connexité.

Ma conjecture favorite est la suivante (cf. HMDP) :

Conjecture. *Le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est connexe.*

Cette conjecture a une histoire assez amusante. En effet, dans un premier temps, nous avions cru prouver que $H_{d,g}$ n'était "presque" jamais connexe. La démonstration était écrite, soumise à une revue prestigieuse, contrôlée par un rapporteur, acceptée, et pourtant fausse !
Toujours est-il que, passant d'un extrême à l'autre, nous cherchons maintenant à montrer que le schéma de Hilbert est toujours connexe.

Un théorème analogue a été montré par Hartshorne en 1965, mais en tolérant des points dans les courbes. Or, c'est bien plus facile, comme on le constate en faisant un dessin dans le cas des courbes $(4, 0)$ munies de points. On a deux composantes H_1 et H_2 de $H_{4,0}$ et il faut fabriquer une famille qui les joint. La courbe générique de H_1 est une courbe de bidegré $(3, 1)$ sur une quadrique et celle de H_2 est réunion disjointe d'une cubique plane et d'une droite.
On procède de la façon suivante : d'un côté on part d'une courbe de H_1 formée de trois droites disjointes D_1, D_2, D_3 et d'une droite Δ coupant chacune des D_i. On déforme $D_1 \cup D_2$ en les rendant coplanaires, donc concourantes en m. Un petit calcul (ou l'intuition géométrique !) montre que, pour conserver le genre, le point m doit être **"immergé"** dans la réunion. On peut encore déformer la courbe obtenue en transformant m en un point isolé du plan P de D_1, D_2 et Δ. On obtient une courbe Γ. De l'autre côté, on part d'une courbe de H_2, réunion de trois droites D_1, D_2, Δ d'un plan P et d'une droite D_3 qui ne les rencontre pas. On déforme cette courbe de sorte que D_3 rencontre Δ, en un point p, immergé bien sûr. En transformant p en un point isolé de P on retrouve la courbe Γ.

Mais tout le problème, bien entendu, est de faire disparaître ces @@**@$ de points immergés !