Exposé 3 :

Application des triades à la construction de familles de courbes

Daniel PERRIN

0. Introduction.

Nous revenons au problème de l'incidence des composants du schéma de Hilbert. Il s'agit donc, étant donnés deux composants X et X_0 de $H_{d,g}$ de savoir s'il existe une famille de courbes paramétrée par un anneau de valuation discrète A, dont le point spécial C_0 est dans X_0 et dont le point générique C est dans X.

Nous reprenons aussi notre fil conducteur : l'étude du schéma $H_{6,3}$. L'utilisation des triades permet de montrer la sous-adhérence des composants X_1 et X_2 d'une part (extrémales et sous-extrémales), pour laquelle nous renvoyons à [AA], et de X_2 et X_4 d'autre part (sous-extrémales et $k(-2)$). Comme X_3 et X_4 sont dans l'adhérence de X_5, cela suffit pour montrer la connexité de $H_{6,3}$. En fait, *via* une biliaison $2, +1$, la deuxième question se ramène à montrer la sous-adhérence des composants analogues H_1 et H_2 de $H_{4,0}$ (cf. Exposé 2 1.f) et donc la connexité[1] de $H_{4,0}$.

Le principe de cette étude est le suivant. Nous avons vu au cours de l'exposé 2 qu'à toute famille de courbes est associée une triade. Nous allons parcourir ici le chemin en sens inverse : pour construire les familles de courbes qui nous intéressent, nous allons construire des triades, puis récupérer les familles à partir des triades, exactement comme on construit les courbes à partir de leurs modules de Rao (cf. [MDP1] IV).

1. Des triades aux courbes.

[1] On notera que l'incidence entre les composants de $H_{4,0}$ n'est pas du tout évidente sur la géométrie des courbes. Rappelons que la courbe générique de H_1 est une courbe de bidegré $(3,1)$ sur une quadrique et celle de H_2 est réunion disjointe d'une cubique plane et d'une droite.

Certes, on peut assez facilement comprendre l'existence d'une famille reliant H_1 et H_2, mais en passant par des courbes **avec des points immergés** (c'est le théorème d'Hartshorne, cf. [rH1]). On procède de la façon suivante : d'un côté on part d'une courbe de H_1 formée de trois droites disjointes D_1, D_2, D_3 et d'une droite Δ coupant chacune des D_i. On déforme $D_1 \cup D_2$ en les rendant coplanaires, donc concourantes en m. Un petit calcul montre que, pour conserver le genre, le point m doit être immergé dans la réunion. On peut encore déformer la courbe obtenue en transformant m en un point isolé du plan P de D_1, D_2 et Δ. On obtient une courbe Γ. De l'autre côté, on part d'une courbe de H_2, réunion de trois droites D_1, D_2, Δ d'un plan P et d'une droite D_3 qui ne les rencontre pas. On déforme cette courbe de sorte que D_3 rencontre Δ, en un point p, immergé bien sûr. En transformant p en un point isolé de P on retrouve la courbe Γ.

Pour simplifier, nous travaillerons systématiquement sur un anneau de valuation discrète A, d'uniformisante a, de corps résiduel k et de corps des fractions K.

a) Introduction.

Rappelons que si $\mathcal{C}$ est une famille de courbes de $\mathbf{P}^3_A$, munie d'une résolution de type N triadique : $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_\mathcal{C} \to 0$ avec $\mathcal{N}$ donné par $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$, on lui associe la triade $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ (avec $L_i = H^0_* \mathcal{L}_i$).

Réciproquement, si on se donne une triade $L_\bullet$, on considère le faisceau (triadique) $\mathcal{N}$ associé à $N = \operatorname{Ker} d_1$. C'est un faisceau localement libre et il s'agit de plonger un faisceau dissocié $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{N}$, de telle sorte que le quotient soit l'idéal d'une famille de courbes. Pour comprendre la méthode, revenons d'abord au cas usuel des courbes sur un corps.

b) Rappels sur la fonction q ordinaire.

Soit $\mathcal{N}$ un faisceau localement libre sur $\mathbf{P}^3_k$, de rang $r+1 \geq 2$. On cherche un faisceau dissocié $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{p(n)}$ de rang r tel que la flèche générique $j : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ soit injective et que son conoyau soit l'idéal (tordu) $\mathcal{J}_C(h)$ d'une courbe.

Cette étude a été menée dans [MDP1,3]. L'idée est de construire $\mathcal{P}$ degré par degré en imposant que le morphisme générique de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{N}$ soit injectif et ait un conoyau sans torsion (disons dans ce cas que $\mathcal{P}$ est un faisceau convenable). L'étape ultime où $\mathcal{P}$ sera de rang r donnera alors *ipso facto* l'idéal attendu. On introduit pour cela la fonction q du faisceau $\mathcal{N}$ comme suit : $q^\sharp(n) = \sum_{k \leq n} q(k)$ est le plus grand entier m tel qu'il existe un faisceau dissocié $\mathcal{P}$ contenu dans $\mathcal{N}$, concentré en degrés $\leq n$, dont le conoyau soit sans torsion[2]. On montre alors qu'un faisceau $\mathcal{P}$ est convenable si sa fonction caractéristique p vérifie[3] $p^\sharp(n) \leq q^\sharp(n)$.

De plus, si on a une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to 0$ (comme dans les résolutions de type N) et une présentation de $N = H^0_* \mathcal{N}$: $L_2 \to N \to 0$, la fonction q se calcule explicitement en termes des mineurs de la matrice $s : L_2 \to L_1$, cf. [MDP1] IV.

c) La fonction q à paramètres.

On suppose cette fois qu'on a un faisceau localement libre $\mathcal{N}$ sur $\mathbf{P}^3_A$ et on veut encore décrire les faisceaux dissociés convenables $\mathcal{P}$. La méthode est tout à fait analogue, à une différence essentielle près. On note d'abord que si on a une flèche $j : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$, le fait que j soit injectif et $\operatorname{Coker} j$ sans torsion dans les fibres se teste au point fermé t de $\operatorname{Spec} A$. On est donc essentiellement ramené à la situation précédente, mais, attention, les morphismes $j : \mathcal{P} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-n)^{p(n)} \to \mathcal{N}$ correspondent à des sections de $N = H^0_*(\mathbf{P}^3_A, \mathcal{N})$ et, comme $H^0_* \mathcal{N}$ ne commute pas en général au changement de base, les images de ces sections dans $H^0_* \mathcal{N}(t)$ engendrent un certain sous-module N' distinct de $H^0_* \mathcal{N}(t)$ et on doit se limiter aux morphismes $\mathcal{P} \to \mathcal{N}$ "à valeurs dans N'".

[2] Toute cette construction repose sur l'idée toute simple que si le degré a est assez grand (par exemple si $\mathcal{N}(a)$ est engendré par ses sections) le conoyau d'une section générale $s : \mathcal{O}_\mathbf{P}(-a) \to \mathcal{N}$ est sans torsion comme on le voit en majorant la dimension de son lieu singulier.

[3] Il y a une condition supplémentaire pour les petits degrés.

A cela près, la définition de la fonction q, ses propriétés et le calcul explicite sont tout à fait analogues. Si $\mathcal{N}$ est triadique plongé dans $\mathcal{L}_1$ et si N est résolu par L_2, le calcul de q se fait en termes des mineurs de la matrice $s(t) : L_2(t) \to L_1(t)$ au point fermé et de ses sous-matrices $s_{n,t}$ qui correspondent[4] aux degrés $\leq n$.

d) Familles minimales et théorème de Lazarsfeld-Rao.

La fonction q permet de montrer la surjectivité de l'application Φ_A qui à une famille de courbes associe sa triade de Rao. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit A un anneau de valuation discrète[5] et soit $L_\bullet$ une triade sur A. On suppose que le conoyau C de $L_\bullet$ est de torsion. Soient $\mathcal{N}$ le faisceau triadique associé, q la fonction associée à $\mathcal{N}$ (cf. [HMDP2] 2.4) et posons $h_0 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} nq(n) + \deg \mathcal{N}$.*
1) Il existe une famille de courbes $\mathcal{C}_0$ et une résolution $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}_0}(h_0) \to 0$ avec $\mathcal{P}$ dissocié de fonction caractéristique q. La triade associée à $\mathcal{C}_0$ est pseudo-isomorphe à $L_\bullet$ à décalage près.
2) Si $\mathcal{C}_1$ est une famille de courbes dont la triade est pseudo-isomorphe à $L_\bullet$ à décalage près, le décalage, le degré et le genre de $\mathcal{C}_1$ sont supérieurs ou égaux à ceux de $\mathcal{C}_0$. Pour tout $h \geq h_0$ il existe de telles familles de courbes $\mathcal{C}_1$ correspondant au décalage h.
On dit que $\mathcal{C}_0$ est une **famille minimale** *de courbes et les autres familles de courbes de la classe de biliaison s'obtiennent à partir de $\mathcal{C}_0$ par des biliaisons élémentaires suivies d'une déformation à cohomologie uniforme (cf. [HMDP2] 2.8) et triade constante.*

e) Un exemple.

Considérons l'exemple le plus simple de triade, définie par le complexe

$$R_A \oplus R_A(-1)^4 \xrightarrow{d_1} R_A \xrightarrow{d_0} 0$$

avec $d_1 = (a, X, Y, Z, T)$. On voit aussitôt que la matrice s associée à une résolution du noyau de la triade est

$$s = \begin{pmatrix} U & 0 \\ a\, I_4 & V \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad U = (X, Y, Z, T) \quad \text{et}$$

$$V = \begin{pmatrix} Y & Z & T & 0 & 0 & 0 \\ -X & 0 & 0 & Z & T & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T \\ 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la seule valeur non nulle de la fonction q est $q(2) = 3$. La famille minimale de courbes associée a pour résolution de type $N : 0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}(-2)^3 \xrightarrow{u} \mathcal{N} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(2) \to 0$. On reconnaît la famille qui joint les composants X_4 et X_5 de $H_{6,3}$. C'est la plus petite famille à spécialité constante qui joint une courbe ACM et une courbe de la classe de deux droites.

[4] Pour donner une idée du genre de calculs, si on appelle α_n le plus grand entier α tel que $s_{n,t}$ ait un α-mineur non nul et β_n le plus grand entier β tel que les β-mineurs de $s_{n,t}$ soient sans facteur commun, on a $q^\sharp(n) = \inf(\alpha_n - 1, \beta_n)$, au moins pour n assez grand.

[5] Le résultat vaut sur un anneau local, avec des modifications mineures.

2. Construction de triades.

Nous venons de voir comment construire une famille de courbes à partir d'une triade. Nous allons maintenant aborder la dernière phase du travail qui consiste à construire des triades, notamment pour obtenir les familles de courbes qui joignent deux composants.

a) Reconstruction d'une triade à partir de ses éléments caractéristiques.

Rappelons que, si $L_{\bullet} = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ est une triade, on a posé $H = \operatorname{Ker} d_0 / \operatorname{Im} d_1$ (le cœur de la triade) et $C = \operatorname{Coker} d_0$ (le conoyau). La suite exacte

$$0 \to H \to \operatorname{Coker} d_1 \to L_{-1} \to C \to 0$$

définit un élément u de $\operatorname{Ext}^2_{R_A}(C, H)$. Réciproquement il résulte de [Ho] que la donnée de C, H, u permet de reconstituer la triade $L_{\bullet}$, à *psi* près. Pour une description explicite de la construction à partir d'une résolution libre de C, cf. [HMDP3] 5.3.

Notre objectif, pour construire une triade, est donc de construire les modules H et C, ainsi que l'extension u.

b) Triades et sous-quotients.

Si $L_{\bullet}$ est une triade sur un anneau de valuation discrète A, le foncteur associé V prend deux valeurs essentielles, l'une $V(K) = M_K = \operatorname{Ker}(d_0 \otimes_A K)/\operatorname{Im}(d_1 \otimes_A K)$ sur le corps des fractions K de A et l'autre $V(k) = M_0 = \operatorname{Ker}(d_0 \otimes_A k)/\operatorname{Im}(d_1 \otimes_A k)$ sur le corps résiduel k. Nous allons analyser le lien entre ces deux valeurs et les éléments caractéristiques de la triade.

Tout d'abord, comme K est plat sur A, on a $M_K = H \otimes_A K$. Bien entendu, le module H n'est pas plat sur A en général, mais, sur un anneau de valuation discrète, il y a un moyen simple de le rendre plat qui est de tuer sa torsion. Si on note H_τ le sous-module de A-torsion de H, le R_A-module gradué $M_A = H/H_\tau$ est plat sur A et on a encore $M_A \otimes_A K = V(K)$. Si on pose $M = M_A \otimes_A k$, le module M_K au point générique apparaît donc comme le point générique d'une déformation plate M_A du R-module M.

De plus, on a la suite exacte $0 \to H_\tau \to H \to M_A \to 0$ qui donne, en tensorisant par k et en posant $M_1 = H_\tau \otimes_A k$ et $J = H \otimes_A k$, la suite $0 \to M_1 \to J \to M \to 0$.

De l'autre côté, pour décrire $M_0 = V(k)$, on a la suite exacte

$$0 \to H \otimes_A k \to V(k) \to \operatorname{Tor}^1_A(C, k) \to 0$$

(qu'on peut voir directement, cf. [HMDP3] 1.5, ou comme issue de la suite spectrale associée à un produit tensoriel de complexes). Si on pose $M_{-1} = \operatorname{Tor}^A_1(C, k)$ cette suite s'écrit $0 \to J \to M_0 \to M_{-1} \to 0$ et on a donc le diagramme suivant :

$$
(M \triangleleft M_0) \qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & M_1 & = & M_1 & & & & \\
 & & \Big\downarrow l & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & J & \xrightarrow{i} & M_0 & \xrightarrow{p} & M_{-1} & \to & 0 \\
 & & \Big\downarrow \pi & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & M & \to & M_0/M_1 & \to & M_{-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

On dit alors que M est un **sous-quotient** de M_0 (c'est, au choix, un quotient d'un sous-module ou un sous-module d'un quotient de M_0) et on note $M \triangleleft M_0$.

En définitive, on a obtenu le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Soit $L_{\bullet}$ une triade sur un anneau de valuation discrète A. Alors le module $M_K = V(K)$ au point générique est le point générique d'une déformation plate M_A d'un sous-quotient M du module $M_0 = V(k)$ au point fermé. Précisément, les éléments caractéristiques C et H de la triade et les modules définissant le sous-quotient $(M \triangleleft M_0)$ sont liés par les formules :*
$M_A = H/H_\tau$, $M_K = M_A \otimes_A K$, $M = M_A \otimes_A k$, $M_1 = H_\tau \otimes_A k$ et $M_{-1} = \mathrm{Tor}_1^A(C, k)$.

c) Familles de courbes et sous-quotients.

S'il existe une famille de courbes $\mathcal{C}$ de point fermé C_0, de point générique C_ξ on a vu qu'on a la condition de semi-continuité[6] : $h^i \mathcal{J}_{C_\xi}(n) \leq h^i \mathcal{J}_{C_0}(n)$ pour tout i et tout n. En particulier, on a $\rho_{C_\xi}(n) \leq \rho_{C_0}(n)$ pour tout n : le module de Rao M_ξ de C_ξ est "plus petit" que celui de C_0, soit M_0. En appliquant 2.1 à une triade de Rao de $\mathcal{C}$, on obtient une condition plus forte, non seulement numérique mais algébrique, sur les modules de Rao :

Proposition 2.2. *Avec les notations ci-dessus, M_ξ est le point générique d'une déformation[7] plate sur A d'un sous-quotient M de M_0.*

On a donc un diagramme $(M \triangleleft M_0)$ et un module M_A comme ci-dessus. De plus, on montre que les dimensions des modules M_1 et M_{-1} intervenant dans le diagramme correspondent respectivement à la variation de la postulation et de la spécialité dans la famille $\mathcal{C}$:

[6] Cette condition est suffisante dans le cas de $H_{6,3}$, mais ce n'est pas vrai dans le cas général.

[7] L'exemple du schéma $H_{3,-2}$ montre que la déformation peut être indispensable et que toute déformation ne convient pas, cf. [MDP6].

Proposition 2.3. *On a les formules :*

$$h^0\mathcal{J}_{C_0}(n) - h^0\mathcal{J}_{C_\xi}(n) = \dim M_{1,n} \qquad \text{et} \qquad h^2\mathcal{J}_{C_0}(n) - h^2\mathcal{J}_{C_\xi}(n) = \dim M_{-1,n}\,.$$

Pour d'autres conditions nécessaires, plus algébriques, portant sur les modules C et H, cf. [AA] 4.2 et 4.21.

d) Triades triviales.

L'objectif est maintenant, partant d'une déformation d'un sous-quotient M de M_0, de construire les modules C et H et l'extension u.

Nous supposons désormais que l'anneau de valuation discrète A est une k-algèbre. Dans ce cas, il y a toujours une triade, dite triviale, qui joint les modules M et M_0 :

Proposition 2.4. *Avec les notations du diagramme $(M \lhd M_0)$, le complexe*

$$M_{\bullet} = \left(M_1 \otimes_k A \xrightarrow{il\otimes a} M_0 \otimes_k A \xrightarrow{p\otimes a} M_{-1} \otimes_k A\right)$$

est une triade. Le foncteur associé V, vérifie $V(K) = M \otimes_k K$ et $V(k) = M_0$.

Cette triade est triviale au sens où la déformation M_A est triviale ($M_A = M \otimes_k A$) et où les choix de C, H, u sont triviaux. Cela signifie, par exemple, qu'on prend pour C le R-module M_{-1} (considéré comme R_A-module annulé par a), pour H le module $J \otimes_k A$ etc., cf. [HMDP3] 5.16.

Dans le cas des composants X_3 et X_5 de $H_{6,3}$ ce choix conduit à la triade :

$$R_A(-1)^4 \oplus R_A(-2)^6 \xrightarrow{d_1} R_A \oplus R_A(-1)^4 \xrightarrow{d_0} R_A$$

$$\text{avec} \qquad d_0 = (a\,X\,Y\,Z\,T) \qquad \text{et} \qquad d_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ -aI_4 & V \end{pmatrix}$$

où U et V sont définies comme ci-dessus. Le calcul de la fonction q est facile et on trouve comme famille minimale la famille $6,3$ attendue.

En revanche, la construction triviale échoue lorsqu'il s'agit de joindre les composants H_1 et H_2 de $H_{4,0}$ (la triade triviale a pour famille minimale une famille de courbes de degré 12) ou les composants X_1 et X_2 de $H_{6,3}$.

e) Construction de triades : modifications de C, H, u.

Lorsque la construction triviale ne fonctionne pas on cherche à modifier les choix de u, C, H. Dans les deux cas examinés ci-dessus, il suffit[8] de modifier u.

[8] Ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, dans $H_{6,3}$, pour montrer que X_1 est sous-adhérent à X_3 ou à X_5 il faut modifier C et H, cf. [AA] 4.6.3 et 4.7.5.

Pour les détails de ces constructions (qui peuvent être délicats et donner lieu à des calculs assez compliqués) nous renvoyons le lecteur à [HMDP3] 5 ou à [AA]. Dans le cas de $H_{4,0}$, la triade obtenue est la suivante :

$$L_\bullet = (1^3, 2^6 \xrightarrow{d_1} \underline{0}, 1^4 \xrightarrow{d_0} \underline{0}) \quad \text{avec} \quad d_0 = (a, X, Y, Z, T) \quad \text{et}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T^2 \\ -a & 0 & 0 & Z & T & 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & Z & T & 0 & -X \\ 0 & 0 & -a & -X & 0 & -Y & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z & -aT \end{pmatrix}$$

La fonction q se calcule facilement (il faut calculer une résolution de $\operatorname{Ker} d_1$, mais Macaulay est fait pour cela) et on obtient une famille de courbes $\mathcal{C}$ avec la résolution :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-3)^3 \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to 0$$

$$\text{avec} \quad 0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-1)^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-2)^6 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A}(-1)^4 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_A} \to 0.$$

Il s'agit bien d'une famille de courbes de degré 4 et genre 0 qui joint H_1 et H_2, comme attendu.

3. Problèmes ouverts.

Je regroupe dans ce paragraphe quelques questions autour des triades. J'ai l'habitude d'appeler conjectures des énoncés dont la formulation me semble intéressante, même si je n'ai pas d'idée d'une éventuelle démonstration parce que je crois que la simple formulation d'une conjecture fait avancer les choses. Nombre des conjectures proposées ci-dessous sont donc certainement fausses. Pour me couvrir un peu, je rappelle le beau texte de Grothendieck à ce sujet dans Récoltes et semailles : *Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux ... Ça permet de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".*

a) Conditions pour la sous-adhérence.

La question suivante est fondamentale pour comprendre "l'étape du haut" :

Conjecture 1. *Soient X_0 et X sont deux composants de $H_{d,g}$. On suppose qu'on a la condition de semi-continuité sur la cohomologie : $(\gamma, \rho) \leq (\gamma_0, \rho_0)$ et la condition sur les modules de Rao : le module de Rao générique de X est déformation d'un sous-quotient d'un module de Rao de X_0. Alors*[9] *X_0 est sous-adhérent à X.*

Voici d'autres questions importantes qui se posent autour de ces notions :

[9] Pour l'heure nous pensons plutôt que la conjecture est fausse, mais ...

1) donner des conditions, lorsque X_0 est sous-adhérent à X, permettant d'affirmer qu'il est adhérent,

2) étudier le comportement de la notion de sous-adhérence par liaison (on voit facilement que, dans certains cas, elle peut devenir adhérence),

3) lorsqu'il y a sous-adhérence et pas adhérence, préciser l'intersection $X_0 \cap \overline{X}$.

b) Questions de connexité.

La conjecture ultime est la suivante :

Conjecture 2. *Pour tous d, g le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est connexe.*

Une conjecture plus forte, confortée par les résultats de Nollet et Aït-Amrane serait :

Conjecture 3. *La composante H_0 des courbes extrémales rencontre toute composante de $H_{d,g}$.*

(On peut même se demander, en l'absence de contre-exemple, si deux composantes irréductibles quelconques de $H_{d,g}$ ne se coupent pas toujours.)

Pour aborder la conjecture 2, outre la conjecture 1, on aurait besoin d'un résultat du type suivant :

Conjecture 4. *Soit C une courbe générique de $H_{d,g}$ et soit M son module de Rao. Alors M est déformation plate d'un sous-quotient d'un module extrémal de $H_{d,g}$.*

Bien entendu, ici, le mot déformation est essentiel sinon le résultat est faux car les modules extrémaux sont des $k[Z,T]$-modules, ce qui n'est pas en général le cas des autres, voir l'exemple $(3,-2)$ de [MDP6]. Ce qui est clair c'est que M est plus petit (en dimensions) que l'extrémal.

c) Un morphisme global.

Il s'agit de trouver un espace (un champ ?) Θ des modules de Rao de dimensions variables (ou des triades) et un morphisme $\Phi : H_{d,g} \to \Theta$, puis d'étudier les propriétés de ce Φ. L'un des intérêts de cette étude pourrait être de fournir un outil pour aborder le problème de la connexité de $H_{d,g}$.

Un chemin possible pour la construction de Φ est le suivant :

• Montrer qu'il existe sur $H_{d,g}$ une résolution de type N (désaturée) **universelle**, c'est-à-dire que toute courbe C de $H_{d,g}$ admet une résolution $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C \to 0$ avec $\mathcal{P}$ dissocié et $\mathcal{N}$ triadique : $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$ (les $\mathcal{L}_i$ sont dissociés) et les chiffres de P et des L_i constants sur $H_{d,g}$.

• Avec ces notations considérer le schéma $\mathcal{K}_{d,g}$ des complexes de R-modules

$$P \xrightarrow{f} L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1}$$

avec les chiffres fixés ci-dessus. C'est un schéma de matrices f, d_1, d_0 vérifiant $d_1 f = d_0 d_1 = 0$. Il faut se limiter, en plus, aux complexes qui donnent des courbes (i.e. tels que $\operatorname{Ker} d_1 / \operatorname{Im} f$ soit l'idéal d'une courbe). Ce schéma est muni d'un morphisme $\Psi : \mathcal{K}_{d,g} \to H_{d,g}$ qui au complexe associe la courbe en question.

• Considérer ensuite le schéma $\Theta_{d,g}$ des complexes $L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1}$ (avec les chiffres correspondant à $\mathcal{K}_{d,g}$ et vérifiant des conditions supplémentaires, notamment que la suite des faisceaux associés $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$ est exacte).

• On a alors un morphisme Φ évident $\Phi : \mathcal{K}_{d,g} \to \Theta_{d,g}$ qui consiste à oublier f : $\Phi(f, d_1, d_0) = (d_1, d_0)$ et une voie naturelle d'étude de $H_{d,g}$ consiste à étudier successivement $\Theta_{d,g}$ et les deux morphismes Φ et Ψ. Nous n'avons pas encore réellement abordé cette étude.

d) Questions diverses.

Il semble que les triades devraient permettre d'aborder un certain nombre de questions d'existence de familles. Voici deux exemples (pas du tout évidents *a priori*) :

1) Le schéma $H^0_{7,0}$ est irréductible et sa courbe générique est tracée sur une surface quartique, mais il y a un composant X_0 (resp. X) de $H^0_{7,0}$ formé de courbes tracées sur des quadriques (resp. sur des surfaces cubiques). La question : X_0 est-il adhérent à X ? Dans ce cas il semble que la réponse soit positive, mais, bien entendu, de nombreuses variantes de cette question sont possibles et notamment pour les courbes rationnelles de degré d quelconque.

2) Lorsque $H^0_{d,g}$ contient des intersections complètes $s \times t$, celles-ci forment un composant X dont l'adhérence $\overline{X}$ est une composante irréductible de $H^0_{d,g}$. La question (bien connue) est : X est-il égal à $\overline{X}$? (On montre facilement que ce n'est pas vrai dans $H_{d,g}$ et N. Mohan Kumar, cf. [MK], a produit des contre-exemples en toute caractéristique positive mais la question reste ouverte en caractéristique 0.)