Exposé 2 : Triades : définition et théorèmes fondamentaux

Daniel PERRIN

1. Introduction.

a) Familles de courbes à modules variables.

Le problème que nous abordons maintenant est celui de l'incidence des composants du schéma de Hilbert. Rappelons que le composant X_0 est dit sous-adhérent à X si X_0 rencontre l'adhérence de X et que cela signifie qu'il existe une famille de courbes paramétrée par un anneau de valuation discrète A, dont le point spécial C_0 est dans X_0 et dont le point générique C est dans X. L'idée qui nous guide pour construire de telles familles est de copier la construction des courbes (notamment des courbes minimales) à partir de leur module de Rao (la fonction q de [MDP1] IV).

Pour cela, il faut disposer d'une notion qui généralise au cas des familles de courbes (avec un module de Rao variable) celle de module de Rao ordinaire. On est ainsi à la recherche, pour tout anneau noethérien A d'une application $\Phi_A : H_{d,g}(A) \to \Theta(A)$ qui associe à une famille de courbes $\mathcal{C}$ paramétrée par A un objet $\Phi_A(\mathcal{C})$ (une triade[1] !) qui décrive la variation des modules de Rao des courbes de la famille. Plus précisément, si on s'inspire du rôle que jouent les modules de Rao ordinaires vis à vis des courbes sur un corps on attend d'une telle application les propriétés suivantes :

1) une propriété de surjectivité : tout élément de $\Theta(A)$, vérifiant des conditions convenables est, à décalage près, image par Φ_A d'une famille de courbes,

2) une description des fibres de Φ_A : deux familles de courbes ayant même image par Φ_A à décalage près, sont dans la même classe de biliaison,

3) une description des familles minimales : en complément du point 1), un élément de $\Theta(A)$ étant donné, il s'agit de décrire les familles minimales (au sens du moindre décalage) qui lui correspondent et de décrire les autres familles à partir de celles-ci,

4) une notion de dualité sur les éléments de $\Theta(A)$ qui corresponde sur les courbes à la notion de liaison impaire,

5) enfin, une étude de l'application Φ qui généralise les assertions de lissité et d'irréductibilité du théorème de l'étape intermédiaire (cf. [MDP1] VII 1.1 et 1.5).

Nous verrons ci-dessous que tous les objectifs, à l'exception du 5), sont atteints.

b) Le foncteur de Rao.

Étudier la variation du module de Rao de la famille de courbes $\mathcal{C}$ c'est essentiellement décrire les divers modules[2] $H^1_*(\mathcal{J}_{\mathcal{C}\otimes_A k(t)}) = H^1_*(\mathcal{J}_{\mathcal{C}} \otimes_A k(t))$ pour $t \in \operatorname{Spec} A$ et leurs

[1] Certains d'entre vous ont peut-être entendu l'exposé de Mireille Martin-Deschamps sur ce sujet à GAF 96. Par rapport à cette époque, si la problématique est restée la même, les définitions ont quelque peu évolué.

[2] On pose, pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{P}^3_A$, $H^i_*\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^i(\mathbf{P}^3_A, \mathcal{F}(n))$.

relations mutuelles. On sait (depuis les travaux de Grothendieck sur les théorèmes de cohomologie et changement de base) que pour ce faire il est commode d'introduire plus généralement le foncteur (que nous nommerons foncteur de Rao) $V_{\mathcal{C}} : Q \mapsto H^1_*(\mathcal{J}_{\mathcal{C}} \otimes_A Q)$ défini pour tout A-module Q et à valeurs dans la catégorie des R_A-modules gradués[3]. Attention, ce foncteur ne commute pas en général au changement de base, ce qui signifie que $V_{\mathcal{C}}(Q)$ n'est pas égal à $V_{\mathcal{C}}(A) \otimes_A Q$. Le foncteur $V_{\mathcal{C}}$ est un premier candidat pour $\Phi_A(\mathcal{C})$ (mais nous verrons que ce n'est pas le bon, cf. ci-dessous).

c) Courbes, modules et résolutions.

Pour étudier la variation du module de Rao dans une famille (i.e. le foncteur $V_{\mathcal{C}}$), nous allons tenter de copier ce que nous savons faire pour le module de Rao ordinaire. En effet, dans le cas d'une courbe C sur un corps il y a des relations très précises entre les résolutions de la courbe et celle de son module de Rao.

Rappelons qu'une courbe admet deux résolutions que nous appelons résolutions de types[4] N et E et qui sont de la forme suivante :

$$0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C \to 0$$

où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{E}$ sont des faisceaux localement libres vérifiant $H^1_*\mathcal{E} = 0$ et $H^2_*\mathcal{N} = 0$, et où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{F}$ sont dissociés (i.e. somme directe de faisceaux inversibles). Il revient au même de demander que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{E}$ s'insèrent dans des suites exactes :

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_3 \to \mathcal{E} \to 0$$

avec les $\mathcal{L}_i$ dissociés. On a des variantes évidentes en termes de modules gradués.

Le module de Rao M_C se calcule facilement à partir des résolutions de C. Précisément, si L_i est le module (libre gradué) $H^0_*\mathcal{L}_i$, on a $M_C = \mathrm{Coker}\,(L_1 \to L_0)$ et $M^*_C(4) = \mathrm{Coker}\,(L_3^\vee \to L_4^\vee)$ (M^*_C est le module dual de M_C, cf. [MDP1]).

Réciproquement, si on part d'un R-module de longueur finie M et de sa résolution minimale

$$0 \to L_4 \to L_3 \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0,$$

les résolutions de type N et E d'une courbe minimale qui correspond à M s'obtiennent en coupant en deux la résolution de M. Précisément, en notant $[A \xrightarrow{u} B]$ le noyau de u, ce sont respectivement :

$$0 \to P \to [L_1 \to L_0] \to I_C \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to L_4 \to L_3 \to F \to I_C \to 0,$$

avec $L_2 = P \oplus F$. Le module libre P est de la forme $P = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{q(n)}$ où q est la fonction (à support fini) définie dans [MDP1] IV. Cette fonction se calcule explicitement en termes des mineurs de la matrice $L_2 \to L_1$.

[3] Lorsque A est un anneau de valuation discrète de radical m, les valeurs pertinentes de $V_{\mathcal{C}}$ correspondent aux cas $Q = A$, $Q = k$ (corps résiduel), $Q = K$ (corps des fractions) et $Q = A/m^n$ (déformations infinitésimales).

[4] Voir [MDP1] II. Ces résolutions s'obtiennent à partir de résolutions libres des modules $I_C = H^0_*\mathcal{J}_C$ et $A_C = H^0_*\mathcal{O}_C$. Elles jouent des rôles symétriques et il est essentiel de les considérer toutes les deux pour comprendre les courbes.

Remarques 1.1.
1) Pour une courbe non minimale, on obtient des résolutions de type N et E en ajoutant aux faisceaux $\mathcal{N}$ et $\mathcal{E}$ de la courbe minimale des faisceaux dissociés.
2) On note que, traduit sur les résolutions, le morphisme $\Phi : C \mapsto M_C$ consiste simplement à tronquer le complexe à trois termes $P \to L_1 \to L_0$ (dont l'homologie au milieu est I_C) pour obtenir le complexe $L_1 \to L_0$ (dont le conoyau est M_C).

d) Exemple 1.

Nous allons maintenant tenter d'étendre les résultats précédents dans le cas des familles de courbes. Notre objectif est de comprendre les familles en termes de résolutions afin de calculer le foncteur $V_{\mathcal{C}}$ et de dégager le bon objet qui généralise le module de Rao. Pour cela, nous allons reprendre notre fil conducteur et examiner quelques exemples de familles de courbes de $H_{6,3}$.

Nous avons vu (cf. exposé 1) que la courbe générale C de X_5 est ACM et celle de X_4 une courbe de bidegré $(4,2)$ sur une quadrique, de module de Rao $k(-2)$ et qu'il y a une famille $\mathcal{C}_1$, à spécialité constante, qui joint X_4 et X_5. Cette famille admet la résolution de type N globale, c'est-à-dire sur R_A, suivante (cf. [MDP1] VII 2.6) :

$$0 \to R_A(-4)^3 \to [R_A(-3)^4 \oplus R_A(-2) \xrightarrow{d_1} R_A(-2)] \to I_{\mathcal{C}_1} \to 0$$

avec $d_1 = (X, Y, Z, T, a)$. Dans ce cas, comme la famille est à spécialité constante, $H^2_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}$ est plat sur A, donc $H^1_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}$ commute au changement de base et la variation du module de Rao est décrite par le module global $H^1_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1} = \operatorname{Coker} d_1 = R_A/(a, X, Y, Z, T)(-2)$.

On note qu'on voit dans la résolution ci-dessus à la fois la résolution de type N de C_0 (obtenue pour $a = 0$) et celle de C, obtenue pour a inversible, dans laquelle le facteur $R_A(-2)$ se simplifie, donnant bien une courbe ACM.

e) Exemple 2.

Il y a aussi dans $H_{6,3}$ une famille $\mathcal{C}_2$, à postulation constante, qui joint X_3 et X_5. Cette famille est duale de la précédente (elles sont échangées par une liaison 3×4). Cette fois, la famille admet la résolution de type E suivante (avec le même d_1) :

$$0 \to R_A(-5) \xrightarrow{{}^t d_1} R_A(-4)^4 \oplus R_A(-5) \to R_A(-3)^4 \oplus R_A(-4) \to I_{\mathcal{C}_2} \to 0$$

(cf. [MDP1] VII 2.1) et on voit, là encore, la simplification du terme $R_A(-5)$ au point générique.

Cependant, comme cette famille vérifie $V_{\mathcal{C}_2}(A) = M_A = H^1_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}_2} = 0$ mais $V_{\mathcal{C}_2}(k) \neq 0$, il est clair, par Nakayama, que la variation du module de Rao ne peut être décrite par le module M_A et le foncteur $V_{\mathcal{C}_2}$ n'est donc plus aussi évident que dans le cas précédent.

f) Exemple 3.

Dans les deux exemples précédents la famille $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) admet une résolution à trois termes, de type N (resp. E) et le passage de la courbe spéciale à la courbe générique correspond à une simplification évidente de la résolution. L'exemple suivant montre que les choses peuvent être plus complexes lorsque la famille n'est ni à spécialité, ni à postulation constante.

Il s'agit cette fois de relier les composants X_2 (courbes sous-extrémales) et X_4 (module $k(-2)$) de $H_{6,3}$. Il existe bien une telle famille, mais elle est non minimale et provient par une biliaison $(2,+1)$ d'une famille de $H_{4,0}$. Pour simplifier, nous allons regarder cette dernière, plus simple, mais tout à fait analogue.

Considérons donc le schéma $H_{4,0}$. Il possède deux composantes, toutes deux de dimension 16, l'une H_1 dont la courbe générale C_1 est une courbe de bidegré $(3,1)$ sur une quadrique, de module de Rao $k(-1)$, l'autre H_2 dont la courbe générale C_2 est réunion disjointe d'une cubique plane et d'une droite et a un module de Rao du type de $R/(X,Y,Z,T^3)$ de dimensions $1,1,1$, en degrés $0,1,2$. Voici les résolutions de type E de ces courbes :

$$0 \to R(-5) \to R(-4)^4 \to R(-2) \oplus R(-3)^3 \to I_{C_1} \to 0$$

$$0 \to R(-6) \to R(-3) \oplus R(-5)^3 \to R(-2)^2 \oplus R(-4)^2 \to I_{C_2} \to 0.$$

Nous verrons que H_2 est sous-adhérente à H_1 mais, cette fois, ce n'est pas clair au vu des résolutions de type E, pas plus d'ailleurs qu'avec celles de type N. En particulier, à l'inverse des exemples ci-dessus, aucune simplification n'est apparente.

On comprend un peu mieux ce phénomène si on note qu'il y a dans l'idéal de C_2 une équation de degré 2 de plus que dans celui de C_1 et si on supprime cette équation en **désaturant** l'idéal I_{C_2}. Par exemple[5], si C_2 est réunion de (X,Y) et de (Z,T^3), son idéal est (XZ, YZ, XT^3, YT^3) et, si on remplace YZ par les équations XYZ, Y^2Z, YZ^2, YZT, ce qui ne change pas C_2, on obtient un idéal J non saturé, donc de profondeur 1, donc avec une résolution a **quatre** termes :

$$0 \to R(-6) \to R(-5)^4 \oplus R(-6) \to R(-4)^6 \oplus R(-5)^3 \to R(-2) \oplus R(-3)^3 \oplus R(-4)^2 \to J \to 0$$

et là, on voit, après simplifications d'un 6, de trois 5 et de deux 4, apparaître les chiffres de la résolution de I_{C_1} dans celle de J (bien entendu ce calcul ne prouve pas l'existence d'une famille mais il donne un indice numérique favorable).

g) Conclusion.

L'idée fondamentale que nous voulons éclairer par ce dernier exemple c'est qu'on ne saurait comprendre les familles générales de courbes (celles qui ne sont ni à spécialité, ni à postulation constante) si l'on ne tolère pas cette opération de désaturation, avec comme conséquence inéluctable l'apparition de résolutions à quatre termes des idéaux (ou des modules dualisants).

C'est pourquoi nous introduisons dans [HMDP3] des résolutions de type E "cotriadiques" de $\mathcal{J}_C$, de la forme $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C \to 0$ où $\mathcal{E}$ est défini par une suite exacte $0 \to \mathcal{L}_5 \to \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_3 \to \mathcal{E} \to 0$ avec $\mathcal{F}$ et les $\mathcal{L}_i$ dissociés. Nous utilisons surtout la notion duale de résolution de type N "triadique" de la forme : $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C \to 0$, où $\mathcal{N}$ est défini par une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$ avec $\mathcal{P}$ et les $\mathcal{L}_i$ dissociés. Par

[5] Cet exemple est choisi parce que le calcul est immédiat, mais les courbes de H_2 réunions disjointes d'une cubique et d'une droite ne sont pas dans l'adhérence de H_1. Il faut utiliser des structures multiples, mais le calcul de la résolution du désaturé est identique.

rapport à une résolution de type E (resp. N) sur un corps, on notera la présence du terme supplémentaire $\mathcal{L}_5$ (resp. $\mathcal{L}_{-1}$).

L'intérêt de ces résolutions est de répondre à la question de la nature du foncteur $V_{\mathcal{C}}$ défini ci-dessus et qui décrit la variation du module de Rao. On montre en effet sans difficulté le lemme suivant :

Lemme 1.2. *Soit $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ le complexe de R_A-modules gradués associé à une résolution de type N triadique de $\mathcal{C}$. On a $V_{\mathcal{C}}(Q) = h_0(L_\bullet \otimes Q)$, où h_0 désigne l'homologie en degré 0 du complexe, i.e. $\mathrm{Ker}\,(d_0 \otimes Q)/\mathrm{Im}\,(d_1 \otimes Q)$.*

Le complexe $L_\bullet$ ci-dessus est appelé une **triade**. C'est cette notion qui va généraliser celle de module de Rao et l'application Φ_A associera à $\mathcal{C}$ la triade $L_\bullet$ définie ci-dessus. Là encore il s'agit d'une opération de troncature : à un complexe à 4 termes on associe un complexe à 3 termes.

2. Définition des triades.

a) Triades.

On note $h_i(L_\bullet)$ l'homologie en degré i du complexe $L_\bullet$.

Définition 2.1. *Soit A un anneau local et soit $L_\bullet = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ un complexe de R_A-modules gradués. On suppose que les composantes homogènes des L_i sont des A-modules plats et de type fini. Les R_A-modules gradués $N = h_1(L_\bullet)$, $H = h_0(L_\bullet)$, $C = h_{-1}(L_\bullet)$ sont appelés respectivement* **noyau, cœur** *et* **conoyau** *du complexe. On appelle* **foncteur associé** *à $L_\bullet$ et on note $V_{L_\bullet}$ le foncteur $h_0(L_\bullet \otimes_A \bullet)$. On dit que $L_\bullet$ est une* **triade** *si H et C sont des A-modules de type fini.*

Remarques 2.2.
1) Nous utiliserons le plus souvent ci-dessous des triades majeures (i.e. des triades dans lesquelles les modules L_i sont des R_A-modules libres gradués de type fini, cf. [HMDP3] 1.13). Cependant, il est important d'avoir une notion plus générale notamment pour aborder les questions de dualité, cf. [HMDP3] 1.26. Nous y utilisons en particulier des triades mineures dans lesquellesles L_i sont des A-modules de type fini, cf. [HMDP3] 1.23.
2) Lorsque $L_\bullet$ est une triade majeure, le faisceau $\mathcal{N}$ associé à N est un faisceau triadique (cela signifie simplement qu'il s'insère dans une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$ avec les $\mathcal{L}_i$ dissociés). On montre que la correspondance entre triades majeures et faisceaux triadiques est bijective (cf. [HMDP3] 2.4 et 2.5).

b) Triades associées à une famille de courbes.

Le théorème suivant se montre par désaturation (cf. 1.f), g)) et liaison. Il permet de définir une triade de Rao associée à une famille de courbes :

Théorème et définition 2.3. *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes de $\mathbf{P}^3_A$. Il existe une résolution de $\mathcal{C}$ de type N triadique, i.e., une suite exacte $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to 0$ où $\mathcal{P}$ est un faisceau dissocié et $\mathcal{N}$ un faisceau triadique défini par une suite $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_{-1} \to 0$. On pose $L_i = H^0_*\mathcal{L}_i$. Le complexe $L_\bullet = (L_1 \to L_0 \to L_{-1})$ est une triade. On dit que $L_\bullet$ est une triade de Rao de $\mathcal{C}$.*

Le faisceau $\mathcal{N}$ est le faisceau associé au noyau N de $L_\bullet$ et les foncteurs h_1, h_0, h_{-1} qui décrivent l'homologie de $L_\bullet$ sont exactement les foncteurs $H^0_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet)$, $H^1_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet)$ et $H^2_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet)$.

c) Pseudo-isomorphismes.

Dans la définition ci-dessus, il peut y avoir plusieurs résolutions de type N d'une famille de courbes (penser au cas trivial où on ajoute un même facteur dissocié à $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_0$), donc plusieurs triades associées et il faut certainement introduire une relation d'équivalence permettant d'identifier certaines triades. Le choix de cette notion est un peu délicat. Il y a évidemment deux options opposées :

1) Si on pense en termes de catégories dérivées il faut sans doute identifier deux triades $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ lorsqu'on a un quasi-isomorphisme entre elles (c'est-à-dire un morphisme qui induit un isomorphisme sur les foncteurs h_1, h_0, h_{-1}).

2) Pour pouvoir identifier deux triades, il faut en tous cas que les foncteurs $V = h_0$ associés (qui vont décrire la variation du module de Rao) soient isomorphes[6].

En fait, ni l'une ni l'autre de ces conditions ne sont satisfaisantes et la vérité est entre les deux : c'est la notion de pseudo-isomorphisme (en abrégé *psi*.)

Pour comprendre l'idée des *psi*, supposons qu'on ait deux résolutions de type N triadiques de $\mathcal{C}$ et un morphisme entre ces résolutions :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{P} & \to & \mathcal{N} & \to & \mathcal{J}_\mathcal{C} & \to & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \| & & \\ 0 & \to & \mathcal{P}' & \to & \mathcal{N}' & \to & \mathcal{J}_\mathcal{C} & \to & 0 \end{array}$$

Dans ce cas, on souhaite pouvoir dire que les faisceaux $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ (et les triades correspondantes) sont équivalents. Or, on constate que le morphisme induit un isomorphisme de foncteurs $H^1_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \to H^1_*(\mathcal{N}' \otimes_A \bullet)$, un épimorphisme $H^0_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \to H^0_*(\mathcal{N}' \otimes_A \bullet)$ et un monomorphisme $H^2_*(\mathcal{N} \otimes_A \bullet) \to H^2_*(\mathcal{N}' \otimes_A \bullet)$. C'est cette remarque (entre autres) qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.4. *Soit $u : L_\bullet \to L'_\bullet$ un morphisme de triades. On dit que u est un* **pseudo-isomorphisme** *(en abrégé un psi) s'il induit un isomorphisme de foncteurs $h_0(L_\bullet \otimes_A \bullet) \to h_0(L'_\bullet \otimes_A \bullet)$ et un monomorphisme de foncteurs $h_{-1}(L_\bullet \otimes_A \bullet) \to h_{-1}(L'_\bullet \otimes_A \bullet)$. On dit que deux triades $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont équivalentes pour la relation de pseudo-isomorphisme (ou simplement sont pseudo-isomorphes) s'il existe une chaîne de psi qui les joint, dans laquelle les $L^{(i)}_\bullet$ sont des triades :*

$$\begin{array}{ccccccc} & L^{(1)}_\bullet & & \cdots & & L^{(n)}_\bullet & \\ \swarrow & & \searrow \quad \swarrow & & \searrow \quad \swarrow & & \searrow \\ L_\bullet & & L^{(2)}_\bullet & & L^{(n-1)}_\bullet & & L'_\bullet \end{array}$$

[6] La solution consistant à imposer cette seule condition revient à prendre comme objet $\Phi_A(\mathcal{C})$ le foncteur "triadique" $V_\mathcal{C}$. C'était historiquement notre premier choix, appelé *vms* (variation of module structures). La suite a montré que ce n'était pas le bon.

Remarques 2.5.
1) La définition précédente permet de montrer que deux triades de Rao associées à une même famille de courbes sont pseudo-isomorphes (cf. [HMDP3] 3.6). L'application Φ_A associe donc à une famille de courbes sa triade de Rao, bien définie à *psi* près.
2) On peut donner une variante de la définition 2.4 en demandant qu'on ait aussi un épimorphisme au niveau des h_1 (c'est la notion de *psi* fort, essentielle pour définir la dualité). On montre (cf. [HMDP3] 1.25) que les deux relations engendrées par les *psi* et les *psi* forts sont les mêmes. L'intérêt de la notion de *psi* par rapport à celle de *psi* fort est qu'elle permet d'avoir un "lemme de Verdier", i.e., de se limiter à des chaînes de deux *psi*, cf. [HMDP3] 1.19.
3) Sur un anneau de valuation discrète on peut oublier, pour montrer qu'un morphisme est un *psi*, la condition sur le foncteur h_{-1} et se contenter de l'isomorphisme des foncteurs V, cf. [HMDP3] 1.33 (mais ce n'est pas le cas sur un anneau général, cf. [HMDP3] 1.35). Attention, même sur un anneau de valuation discrète, l'isomorphisme des foncteurs V ne suffit pas : l'existence d'une chaîne de morphismes entre les triades est essentielle, cf. [HMDP3] 1.35.
4) Toujours sur un anneau de valuation discrète on peut supposer que les faisceaux triadiques sont extravertis (cela signifie que le conoyau $C = H^2_* \mathcal{N}$ de la triade associée est un module de torsion). Dans ce cas, la notion de pseudo-isomorphisme, traduite en termes de faisceaux, n'est rien d'autre que celle d'isomorphisme stable, cf. [HMDP1] 2.8.

3. Les théorèmes fondamentaux.

Le meilleur argument en faveur des définitions ci-dessus c'est qu'elles donnent bien les généralisations attendues des théorèmes et notamment la caractérisation des classes de biliaison en termes de *psi*.

a) Le théorème de Rao.

Il décrit les fibres de Φ_A :

Théorème 3.1. *(Théorème de Rao pour les triades) On suppose A local à corps résiduel infini. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles plates de courbes paramétrées par A et soient $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ des triades de Rao de $\mathcal{C}$. Alors, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dans la même classe de biliaison si et seulement si les triades $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont pseudo-isomorphes, à décalage près.*

b) Dualité et liaison.

On a aussi le lien entre dualité et liaison :

Théorème 3.2. *On suppose A local à corps résiduel infini. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles plates de courbes paramétrées par A, et soient $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ des triades de Rao de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Alors, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont liées par un nombre impair de liaisons élémentaires si et seulement si les triades $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont duales à psi près et à décalage près, i.e. s'il existe un entier h tel que $L_\bullet(h)$ soit pseudo-isomorphe à une triade duale de $L'_\bullet$.*

c) Les familles minimales et le théorème de Lazarsfeld-Rao.

Nous verrons dans l'exposé numéro 3) qu'on a aussi la généralisation de l'assertion de surjectivité (toujours à décalage près) du théorème de Rao (i.e. de l'application Φ_A) :

Théorème 3.3. *On suppose A local à corps résiduel infini. Soit $L_{\bullet}$ une triade. Il existe une famille de courbes $\mathcal{C}$ telle que la triade associée à $\mathcal{C}$ soit pseudo-isomorphe à $L_{\bullet}$, à décalage près.*

Plus précisément, nous déterminerons exactement l'image de Φ_A en calculant les familles minimales associées à une triade et en montrant la généralisation du théorème de Lazarsfeld-Rao.